http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۷، شماره ۴ (۱۴۰۱)، صص. ۸۵-۸۹

http://www.ui.ac.ir

هم درجه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر و حقیقی مقدار گروه‌های متناهی

زینب اخلاقی

چکیده. در این مقاله نشان می‌دهیم اگر هم درجه هر سرشت تحویل‌ناپذیر و حقیقی مقدار گروه متناهی G یک ۲ـعدد یا یک ۲′ـعدد باشد، آنگاه G حلپذیر است.

۱. مقدمه

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\mathrm{Irr}(G)$ مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه G باشد. اگر $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ ، هم درجه سرشت χ را با $\mathrm{cod}(\chi)$ نشان می‌دهیم که چنین تعریف می‌شود:

$$\mathrm{cod}(\chi) = \frac{|G|}{|\mathrm{ker}\chi|\chi(1)}.$$

همچنین، مجموعه هم درجه‌های سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه G را با $\mathrm{cod}(G)$ نمایش می‌دهیم. در سال‌های اخیر، تعداد زیادی از محققان به بررسی تاثیر این مجموعه از اعداد طبیعی بر ساختار گروه پرداخته‌اند و از مهمترین نتیجه‌ها در مورد این مجموعه می‌توان به نتیجه‌ایی از Qian و Isaacs اشاره کرد که ثابت می‌کند برای هر عضو g از گروه متناهی G سرشت تحویل‌ناپذیر χ موجود است به‌طوری‌که اعداد اول شمارنده مرتبه g هم درجه $\mathrm{cod}(\chi)$ را می‌شمارد. در حالتی‌که گروه G حلپذیر باشد مرتبه هر عنصر گروه G هم درجه یک سرشت تحویل‌ناپذیر G را می‌شمارد. این نتایج در [۸، ۱۲، ۱۳] به چاپ رسیده‌اند. منظور از یک عضو حقیقی در یک گروه متناهی G عضوی است که با وارونش مزدوج باشد. اخیراً قضیه مشابهی برای گروه‌های حلپذیر ثابت شده است که نشان می دهد نتیجه فوق برای عناصر حقیقی با مرتبه فرد و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر حقیقی مقدار نیز صحیح است. در واقع در [۳] ثابت شده است، اگر g عضوی حقیقی از مرتبه فرد از گروه حلپذیر G باشد، آنگاه سرشت تحویل‌ناپذیر و حقیقی مقدار χ موجود است که مرتبه g شمارنده $\mathrm{cod}(\chi)$ است. همین‌طور در تعداد زیادی از مقالات که اخیراً چاپ شده اند تاثیر مجموعه اعداد طبیعی $\mathrm{cod}(G)$ بر ساختار گروه G مورد مطالعه قرار گرفته است. برای اطلاعات بیشتر مقالات [۱، ۲، ۴، ۱۲، ۱۳، ۱۴] را ببینید. در این مقاله منظور ما از $\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G)$ مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر و حقیقی مقدار G است و

$$\mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(G) = \{\mathrm{cod}(\chi) | \chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G)\}.$$

عبارات و کلمات کلیدي: هم درجه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر، سرشت‌های تحویل‌ناپذیر حقیقی مقدار، گروه حلپذیر
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
نوع مقاله: علمی پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۱۹
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136265.1553 .

اگر p یک عدد اول باشد، منظور از یک p ـعدد، توانی از p است و منظور از یک p'ـعدد، عدد طبیعی است که توسط p شمرده نمی‌شود. ما در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر هر یک از اعضای $\mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(G)$ یک ۲ـعدد یا یک $۲'$ـعدد باشد، آنگاه G یک گروه حلپذیر است.

۲. قضایای اصلی

لم ۱.۲. [۷، قضیه ۴] فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای عدد اول p و عدد صحیح a داشته باشیم $|G|/\chi(۱) = p^a$. آنگاه $O_p(G) \neq ۱$.

لم ۲.۲. [۹، قضیه ۱.۲ و نتیجه ۲.۲] فرض کنیم N زیرگروه نرمال گروه متناهی G باشد و $\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(N)$. اگر $|G:N|$ فرد باشد، آنگاه θ به یک سرشت تحویل‌ناپذیر حقیقی مقدار یکتا در $\psi \in \mathrm{Irr}(I_G(\theta))$ گسترش می‌یابد. همچنین، $\psi^G \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G|\theta)$ سرشت تحویل‌ناپذیر حقیقی مقدار است.

لم ۳.۲. [۱۰، قضیه A] فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و هر سرشت تحویل‌ناپذیر غیرخطی $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G)$ از درجه زوج باشد. آنگاه G یک گروه ۲ـپوچتوان است.

لم ۴.۲. فرض کنیم S یک گروه ساده غیر آبلی باشد. آنگاه S دارای یک سرشت حقیقی مقدار θ است که به یک سرشت حقیقی مقدار $\mathrm{Aut}(S)$ گسترش می‌یابد.

اثبات. در حالتی‌که S یکی از گروه‌های ساده پراکنده یا یکی از گروه‌های تناوبی باشد، [۱۱، ۱.۴ قضیه] نتیجه را تضمین می‌کند. اگر S یکی از گروه‌های لی باشد، کافی است فرض کنیم θ یکی از سرشت‌های اشتنبرگ است، آنگاه طبق [۵، قضیه ۲] ، حکم ثابت می‌شود. □

لم ۵.۲. [۶، قضیه ۸.۲] فرض کنیم $N \cong S_۱ \times S_۲ \times \cdots \times S_n$ یک زیر گروه نرمال گروه متناهی G باشد. فرض کنید $S_i \cong S$ و S یک گروه ساده غیرآبلی باشد. اگر $\sigma \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(S)$ توسیع پذیر به یک سرشت حقیقی مقدار $\mathrm{Aut}(S)$ باشد، آنگاه $\theta = \sigma \times \cdots \times \sigma \in \mathrm{Irr}(N)$ توسیع‌پذیر به یک سرشت حقیقی مقدار در G است.

در ادامه با استفاده از نتایج ذکر شده در بالا به اثبات قضیه اصلی می‌پردازیم.

قضیه اصلی ۶.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. اگر هر عضو $\mathrm{cod}_{\mathbb{R}}(G)$ یک ۲ـعدد یا یک $۲'$ـعدد باشد، آنگاه G حلپذیر است.

اثبات. فرض کنیم G حل ناپذیر باشد. آنگاه، G دارای یک عامل اصلی مانند M/N است که غیر آبلی است. بنابراین $M/N = S^k$ که در آن S یک گروه ساده غیر آبلی و k یک عدد طبیعی است. فرض کنیم $C/N = C_{G/N}(M/N)$. واضح است که $MC/C = M/N$ تنها زیرگروه نرمال کمین G/C است و بنابراین

$$MC/C \leq G/C \leq \mathrm{Aut}(MC/C).$$

همچنین، طبق لم‌های ۴.۲ و ۵.۲ سرشتی تحویل‌ناپذیر و حقیقی مقدار مانند $\chi \in \mathrm{Irr}(MC/C)$ موجود است که به سرشت تحویل‌ناپذیر $\psi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G/C)$ گسترش می‌یابد. از آنجا که تنها زیرگروه نرمال کمین G/C، درون $\ker\psi$ قرار ندارد، نتیجه می‌گیریم که ψ با وفا است. بنابراین

$$\mathrm{cod}(\psi) = |G:C|/\psi(۱) = |G:C|/\chi(۱).$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136265.1553

با استفاده از لم ۲.۲، $\operatorname{cod}(\psi)$ توانی از یک عدد اول نمی‌تواند باشد و در نتیجه با توجه به فرض مساله یک ′۲ـعدد است. از آنجا که

$$\operatorname{cod}(\psi) = |G:C|/\chi(1) = |G:MC||MC:C|/\chi(1),$$

و اینکه $\chi(1)$ شمارنده‌ایی از $|MC:C|$ است، نتیجه می‌گیریم که $|G:MC|$ عددی فرد است. بنابراین طبق لم ۲.۲، هر $\theta \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{R}}(MC/C)$ یک گسترش یکتا $\theta_0 \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{R}}(I_{G/C}(\theta))$ دارد. در نتیجه بنابر تناظر کلیفورد، G/C دارای سرشت حقیقی مقدار η با درجه $|G:T|\theta(1)$ است که در آن $T/C = I_{G/C}(\theta)$. از طرفی، از آنجا که تنها زیرگروه نرمال کمین G/C درون $\ker\eta$ قرار ندارد، نتیجه می‌گیریم که η با وفا است. بنابراین

$$\operatorname{cod}(\eta) = |G/C|/|G/C:T/C|\theta(1) = |T/C|/\theta(1) = |T:MC||MC:C|/\theta(1).$$

در نتیجه $\operatorname{cod}(\eta)$ توسط $|M:N|/\theta(1)$ شمرده می‌شود. طبق لم ۲.۲، این عدد نمی‌تواند توانی از ۲ باشد، در نتیجه با توجه به فرضیات این عدد فرد است. پس تمامی سرشت‌های حقیقی مقدار M/N باید توسط $|M/N|_2$ شمرده شوند. اما طبق لم ۳.۲، M/N یک گروه ۲ـپوچتوان است و با توجه به ساختار M/N به تناقض می‌رسیم. بنابراین G حلپذیر است. □

مراجع

[1] N. Ahanjideh, The fitting subgroup, p-length derived length and charcter table, *Math. Nach.*, **294** (2021) 214-223.

[2] F. Alizadeh et al., Groups with few codegrees of irreducible characters, *Comm. Algebra*, **47** (2019) 1147–1152.

[3] Z. Akhlaghi, Real elements and real-valued irreducible character codegree, Submitted.

[4] R. Bahramian and N. Ahanjideh, p-divisibility of co-degrees of irreducible characters, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **103** (2021) 78–82.

[5] M. Bianchi, D. Chillag, M. L. Lewis and E. Pacifici, Character degree graphs that are complete graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135** (2007) 671–676.

[6] L. Bonazzi, Finite non-solvable groups whose real degrees are prime powers, *J. Group Theory*, **25** (2022) 741–751.

[7] D. Chillag, A. Mann and O. Manz, The co-degrees of irreducible characters, *Israel J. Math.*, **73** (1991) 207–223.

[8] I. Isaacs, Element orders and character codegrees, *Arch. Math. (Basel)*, **97** (2011) 499–501.

[9] G. Navarro and P. H. Tiep, Rational irreducible characters and rational conjugacy classes in finite groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360** (2008) 2443–2465.

[10] G. Navarro, L. Sanus and P. H. Tiep, Real characters and degrees, *Israel J. Math.*, **171** (2009) 157–173.

[11] G. Navarro and P. H. Tiep, Degrees of rational characters of finite groups, *Adv. Math.*, **224** (2010) 1121–1142.

[12] G. Qian, A note on element orders and character codegrees, *Arch. Math. (Basel)*, **97** (2011) 99–103.

[13] G. Qian, Elemment orders and character codegrees, *Bull. London Math. Soc.*, **53** (2021) 820–824.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136265.1553

[14] G. Qian, Y. Wang and H. Wei, Codegree of irreducible characters in finite groups, *J. Algebra*, **312** (2007) 946–955.

زینب اخلاقی
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران
z_akhlaghi@aut.ac.ir

زینب اخلاقی متولد شهریور ماه ۱۳۶۲ در شهر لار است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد و در سال ۱۳۹۰ مقطع دکتری این رشته را در دانشگاه مذکور به پایان رسانید.

The codegrees of real-valued Irreducible characters of finite groups

Zeynab Akhlaghi

Abstract: In this note we show that if every codegree of real-valued irreducible characters of a finite group G is either a 2-number or $2'$-number, then G is solvable.

Keywords: codegrees of irreducible characters, real-valued irreducible characters, solvable groups.

Zeynab Akhlaghi

Faculty of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran.

Email: h.alimorad@jahromu.ac.ir

Communicated by Alireza Abdollahi.

Article Type: Research Paper.

Received: 30/12/2022, Accepted: 10/03/2023.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136265.1553