ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷ – ۲۳۴۵
جلد ۷، شماره ۴ (۱۴۰۱)، صص. ۳۳-۴۲
http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه‌های دووجهی و دودوری تعمیم یافته

محمدعلی سلحشور

چکیده. فرض کنیم G یک گروه متناهی غیرآبلی باشد. گراف جابجایی کلاس‌های تزویج G را که با نماد $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم، گراف ساده غیرجهتداری است که مجموعه رأس‌های آن کلاس‌های تزویج غیرمرکزی G و دو رأس متمایز A و B در این گراف وقتی به هم متصلند، هرگاه $a \in A$ و $b \in B$ یافت شوند به‌طوری‌که $ab = ba$. در این مقاله ساختار گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دو وجهی تعمیم یافته $D_{(m,n)}$ و گروه دو دوری تعمیم یافته $Dic(A, y, x)$ را به طور کامل مشخص می‌کنیم.

۱. مقدمه و مفاهیم اولیه

همبستگی و ارتباط بین ساختار گرافی و ساختار گروهی سبب تحقیق و پژوهش‌های زیادی در سال‌های اخیر شده است. یکی از این گراف‌ها، گراف جابجایی یك گروه است. گراف‌های جابجایی برای نخستین بار توسط بروئر و فولر در رابطه با رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی مطرح شدند[۲]. مکمل گراف‌های جابجایی را گراف‌های ناجابجایی گویند. این نوع گراف‌ها اولین بار توسط پل اردوش معرفی شدند و در کارهای نیومن ظاهر شده است[۵]. عبداللهی و همکارانش در [۱]، حدسی را بیان می‌کنند که اگر گروه ساده متناهی G و گروه متناهی M با مرکز بدیهی، دارای این خاصیت باشند که گراف‌های ناجابجایی آنها با هم یکریخت هستند، آنگاه G و M دو گروه یکریختند. این حدس در سال ۲۰۱۳ توسط سولومون و ولدار ثابت شد[۱۰].

سال ۲۰۰۹، هرزوگ و همکارانش گراف جابجایی کلاس‌های تزویج را معرفی کردند[۴]. اگر G یك گروه متناهی باشد، آنگاه گراف جابجایی کلاس‌های تزویج G، را که با نماد $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم، گراف ساده غیرجهتداری است که مجموعه رأس‌های آن کلاس‌های تزویج نابدیهی G هستند و دو رأس C و D در گراف وقتی مجاورند، هرگاه $x \in C$ و $y \in D$ وجود داشته باشند به طوری که $xy = yx$. آنها نشان دادند که برای گروه‌های غیرآبلی G، گراف $\Gamma(G)$ تهی است اگر و فقط اگر G با یکی از گروه‌های S_3، D_8 و Q_8 یکریخت باشد. محمدیان و همکارانش در [۶] گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه را برای حالتی در نظر گرفتند که مجموعه رأس‌ها، کلاس‌های تزویج غیرمرکزی باشند و به رده‌بندی گروه‌های متناهی پرداختند که گراف جابجایی کلاس‌های تزویج آنها فاقد مثلث هستند.

در این مقاله همه گروه‌ها، متناهی و غیرآبلی هستند و همه گراف‌ها، ساده و غیرجهتدار می‌باشند. همچنین تمام نمادهای استفاده شده در این مقاله چه در نظریه گروه و چه نظریه گراف به ترتیب از مراجع [۷] و [۳] اخذ شده است. فرض کنیم

عبارات و کلمات کلیدی: کلاس‌های تزویج، گراف جابجایی کلاس‌های تزویج، گروه دووجهی تعمیم یافته، گروه دودوری تعمیم یافته.
دبیرتخصصی رابط: حمید موسوی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۲۲   تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۲۱
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136084.1549 .

$X = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\}$ یک مجموعه از گراف‌های غیرجهتدار با مجموعه رأس‌های دو به دو متمایز باشند. در این‌صورت $\Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ گرافی با مجموعه رأس‌های $V(\Lambda_1) \cup \cdots \cup V(\Lambda_s)$ و مجموعه یال‌های $E(\Delta_1) \cup \cdots \cup E(\Delta_s)$ است. در این‌حالت اگر همه اعضای X یکریخت باشند، آنگاه به‌جای $\Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_s$ از نماد $s\Lambda_1$ استفاده می‌شود.

هدف این مقاله محاسبه گراف جابجایی کلاس‌های تزویج دو گروه تعمیم یافته است. یکی گروه دو وجهی تعمیم یافته یعنی

$$D_{(m,n)} = \langle a, b \mid a^n = b^m = 1, bab^{-1} = a^{-1}\rangle,$$

که در آن $n \geq 3$، $m \geq 2$ و m عددی زوج است و دیگری، گروه دو دوری تعمیم یافته یعنی

$$Dic(A, y, x) = \langle A, x \mid x^2 = y,\ a^x = a^{-1},\ \forall a \in A\rangle$$

می‌باشد که در آن A یك گروه آبلی از مرتبه زوج با نمایی بزرگتر از ۲ و y یك عضو مرتبه ۲ از A است. در زیر به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که نویسنده و همکارانش به محاسبه گراف جابجایی کلاس‌های تزویج بعضی از گروه‌های خاص پرداختند. این قضیه، ما را در اثبات قضیه اصلی مقاله کمک می‌کند.

قضیه ۱.۱. حالت‌های زیر همواره برقرارند:

(۱) گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دو وجهی D_{2n} برابر است با:

$$\Gamma(D_{2n}) = \begin{cases} K_{\frac{n-1}{2}} \cup K_1 & \text{فرد } n \\ K_{\frac{n}{2}-1} \cup 2K_1 & \text{هر دو زوج } \tfrac{n}{2} \text{ و } n \\ K_{\frac{n}{2}-1} \cup K_2 & \text{زوج ولی } \tfrac{n}{2} \text{ فرد } n \end{cases}.$$

([۸، گزاره ۲.۱])

(۲) گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دودوری T_{4n} برابر است با:

$$\Gamma(T_{4n}) = \begin{cases} K_{n-1} \cup 2K_1 & \text{زوج } n \\ K_{n-1} \cup K_2 & \text{فرد } n \end{cases}.$$

([۸، گزاره ۲.۲])

(۳) اگر G یك گروه متناهی با مرکز Z باشد که $\frac{G}{Z} \cong D_{2n}$، آنگاه

$$\Gamma(G) = \begin{cases} K_{\frac{(n-1)|Z|}{2}} \cup 2K_{\frac{|Z|}{2}} & \text{زوج } n \\ K_{\frac{(n-1)|Z|}{2}} \cup K_{|Z|} & \text{فرد } n \end{cases}.$$

([۹، قضیه ۱.۲])

۲. نتایج اصلی

در این بخش، ابتدا به بیان و اثبات دو لم می‌پردازیم که ما را در محاسبه ساختار گراف جابجایی کلاس‌های تزویج دو گروه گفته شده، کمك می‌کند.

لم ۱.۲. فرض کنیم $D_{(m,n)}$ گروه دووجهی تعمیم یافته باشد. آنگاه

$$Z(D_{(m,n)}) = \begin{cases} \langle a^{\frac{n}{2}} \rangle \times \langle b^2 \rangle & \text{زوج } n \\ \langle b^2 \rangle & \text{فرد } n \end{cases}.$$

اثبات. می‌دانیم $D_{(m,n)} = \langle a, b \mid a^n = b^m = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ که در آن $n \geq 3$، $m \geq 2$ و m عددی زوج است. بنابر تعریف داریم:

$$ba = a^{-1}b \qquad \text{و} \qquad ba^{-1} = ab \tag{۱.۲}$$

بنابراین $b^2a = ba^{-1}b = ab^2$، یعنی $b^2 \in Z(D_{(m,n)})$ پس $\langle b^2 \rangle \leq Z(D_{(m,n)})$. بنابر رابطه (۱.۲)،

$$ba^2 = baa = a^{-1}ba = a^{-1}a^{-1}b = a^{-2}b$$

$$ba^3 = ba^2a = a^{-2}ba = a^{-2}a^{-1}b = a^{-3}b$$

پس برای هر $0 \leq i \leq n-1$ و $0 \leq j \leq m-1$،

$$b^ja^i = \begin{cases} a^ib^j & \text{زوج } j \\ a^{-i}b^j & \text{فرد } j \end{cases}. \tag{۲.۲}$$

فرض کنیم n زوج است، چون $a^n = 1$، $a^{\frac{n}{2}} = a^{-\frac{n}{2}}$. اگر در رابطه (۲.۲) قرار دهیم $i = \frac{n}{2}$ و $j = 1$، آنگاه $ba^{\frac{n}{2}} = a^{-\frac{n}{2}}b = a^{\frac{n}{2}}b$ که این یعنی $a^{\frac{n}{2}} \in Z(D_{(m,n)})$ در نتیجه $\langle a^{\frac{n}{2}} \rangle \leq Z(D_{(m,n)})$. بنابراین

$$\begin{cases} \langle a^{\frac{n}{2}} \rangle \times \langle b^2 \rangle \leq Z(D_{(m,n)}) & \text{زوج } n \\ \langle b^2 \rangle \leq Z(D_{(m,n)}) & \text{فرد } n \end{cases}.$$

حال ما فرض می‌کنیم $g = a^sb^t \in Z(D_{(m,n)})$ که $0 \leq s \leq n-1$ و $0 \leq t \leq m-1$. در این صورت برای هر عضو دلخواه مانند x از G،

$$x(a^sb^t) = (a^sb^t)x \tag{۳.۲}$$

اگر t فرد باشد، آنگاه در رابطه اخیر قرار می‌دهیم $x = a$، از این‌رو $a(a^sb^t) = (a^sb^t)a$. بنابر رابطه (۲.۲) نتیجه می‌شود $a^{-1}b^t = b^ta = ab^t$ و $a^2 = 1$. پس $2 \mid o(a) = n$ و $n \leq 2$ که این با فرض در تناقض است. لذا t همواره یك عدد زوج است. حال اگر در رابطه (۳.۲)، $x = b$ قرار دهیم، آنگاه $b(a^sb^t) = (a^sb^t)b$. بنابر رابطه (۲.۲) نتیجه می‌گیریم $a^{-s}b = ba^s = a^sb$ و $a^{2s} = 1$. پس $2s \mid o(a) = n$، در نتیجه $k \in \mathbb{N}$ یافت می‌شود به طوری که $2s = nk$. از طرفی $0 \leq s < n$ پس $0 \leq nk < 2n$ و $0 \leq k < 2$. اگر n زوج باشد، آنگاه $n' \in \mathbb{N}$ یافت می‌شود به طوری که $s = n'k$. چون $0 \leq k < 2$، $s = 0$ یا $\frac{n}{2}$. از این‌رو $g = b^t$ یا $a^{\frac{n}{2}}b^t$ و بنابراین $g \in \langle a^{\frac{n}{2}} \rangle \times \langle b^2 \rangle$. در نتیجه $Z(D_{(m,n)}) = \langle a^{\frac{n}{2}} \rangle \times \langle b^2 \rangle$. اما اگر n فرد باشد، آنگاه $2 \mid k$. پس $k = 0$ و از این رو $s = 0$ و $g = b^t \in \langle b^2 \rangle$. بنابراین $Z(D_{(m,n)}) = \langle b^2 \rangle$ و اثبات کامل است. □

لم ۲.۲. فرض کنیم $G = Dic(A, y, x)$ گروه دو دوری تعمیم یافته باشد. آنگاه

(۱) $G = A \cup xA$ به طوری که $A \cap xA = \emptyset$ و برای هر $xa \in xA$، $o(xa) = 4$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136084.1549

(۲) $Z(G)=\{a\in A \mid a^{2}=1\}$.

(۳) برای هر $a\in A\setminus Z(G)$، $a^G=\{a,a^{-1}\}$ و $C_G(a)=A$.

(۴) برای هر $xa\in xA$، $(xa)^G=xaA_2$ و $C_G(xa)=Z(G)\cup\{xb\in xA \mid b^2=a^2\}$ که در آن

$$A_2=\{g^2 \mid g\in A\}.$$

اثبات.

(۱) بنابر تعریف $y=x^2$ و $o(y)=2$ پس $o(x)=4$. از طرفی $G=\langle A,x\rangle$ بنابراین $G=A\cup xA\cup x^2A\cup x^3A$. چون $x^2A=A$ و $x^3A=xA$ پس $G=A\cup xA$. به وضوح $A\cap xA=\emptyset$ و برای هر $xa\in xA$، $xa\neq 1$. بنابر تعریف می‌دانیم $a^x=a^{-1}$ لذا $ax=xa^{-1}$. در نتیجه

$$\begin{aligned}(xa)^2&=(xa)(xa)=x(ax)a=x(xa^{-1})a=x^2=y\neq 1\\ (xa)^3&=(xa)^2(xa)=x^2(xa)=x^3a=xay\neq 1\\ (xa)^4&=(xa)^2(xa)^2=x^2x^2=x^4=1\end{aligned}$$

(۲) ابتدا نشان می‌دهیم $Z(G)\subseteq A$. زیرا در غیر این‌صورت $g\in Z(G)$ یافت می‌شود که $g\notin A$. چون $g\in G=A\cup xA$ و $A\cap xA=\emptyset$. بنابراین $g\in xA$ و لذا $b\in A$ یافت می‌شود به‌طوری‌که $g=xb$. از طرفی واضح است که $A\setminus Z(G)\neq\emptyset$. پس عضوی مانند $a\in A\setminus Z(G)$ یافت می‌شود و داریم:

$$xa^{-1}b=axb=ag=ga=xba=xab$$

در نتیجه $a^2=1$ و $a\in Z(G)$ که این تناقض است. بنابراین همواره داریم $Z(G)\subseteq A$. حال قرار می‌دهیم $M=\{a\in A \mid a^2=1\}$. به‌وضوح $M\subseteq Z(G)$. برعکس، فرض می‌کنیم $g\in Z(G)$. چون $Z(G)\subseteq A$، پس $g\in A$ و داریم $xg=gx=xg^{-1}$. در نتیجه $g^2=1$، و در نتیجه $g\in M$. بنابراین اثبات این قسمت کامل است.

(۳) بنابر تعریف $a^x=a^{-1}$ و A یک گروه آبلی است. چون $G=A\cup xA$، بنابراین برای هر $a\in A\setminus Z(G)$،

$$\begin{aligned}a^G&=\Big\{g^{-1}ag \mid g\in G\Big\}\\ &=\Big\{g^{-1}ag \mid g\in A\Big\}\cup\Big\{g^{-1}ag \mid g\in xA\Big\}\\ &=\{a\}\cup\Big\{g^{-1}ag \mid g=xb\in xA\Big\}\\ &=\{a\}\cup\Big\{(xb)^{-1}a(xb) \mid xb\in xA\Big\}\\ &=\{a\}\cup\Big\{b^{-1}x^{-1}xa^{-1}b \mid xb\in xA\Big\}\\ &=\Big\{a,a^{-1}\Big\}\end{aligned}$$

به‌وضوح $A\subseteq C_G(a)$. با استدلالی مشابه قسمت (۲) داریم $C_G(a)\cap xA=\emptyset$، پس $C_G(a)=A$.

(۴) بنابر تعریف $a^x = a^{-1}$ و A یک گروه آبلی است. چون $G = A \cup xA$، بنابراین برای هر $xa \in xA$،

$$\begin{aligned}
(xa)^G &= \left\{g^{-1}(xa)g \mid g \in G\right\} \\
&= \left\{g^{-1}(xa)g \mid g \in A\right\} \cup \left\{g^{-1}(xa)g \mid g \in xA\right\} \\
&= \left\{xg^{2}a \mid g \in A\right\} \cup \left\{g^{-1}(xa)g \mid g = xb \in xA\right\} \\
&= \left\{xg^{2}a \mid g \in A\right\} \cup \left\{(xb)^{-1}(xa)(xb) \mid xb \in xA\right\} \\
&= \left\{xag^{2} \mid g \in A\right\} \cup \left\{xa^{-1}b^{2} \mid b \in A\right\} \\
&= xaA_2 \cup xa^{-1}A_2
\end{aligned}$$

که در آن $A_2 = \{g^2 \mid g \in A\}$. به‌وضوح $A_2 \leq A$. چون $a^2 \in A_2$، $a^2A_2 = A_2$ و $a^{-1}A_2 = aA_2$. از این‌رو $(xa)^G = xaA_2$. همچنین

$$\begin{aligned}
C_G(xa) &= \left\{g \in G \mid (xa)g = g(xa)\right\} \\
&= \left\{g \in A \cup xA \mid (xa)g = g(xa)\right\} \\
&= \left\{g \in A \mid (xa)g = g(xa)\right\} \cup \left\{g = xb \in xA \mid (xa)g = g(xa)\right\} \\
&= \left\{g \in A \mid xag = xag^{-1}\right\} \cup \left\{xb \in xA \mid x^2a^{-1}b = x^2ab^{-1}\right\} \\
&= \left\{g \in A \mid g^2 = 1\right\} \cup \left\{xb \in xA \mid b^2 = a^2\right\} \\
&= Z(G) \cup \left\{xb \in xA \mid b^2 = a^2\right\}
\end{aligned}$$

و لذا اثبات کامل است. □

در ادامه قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که در آن ساختار کلی گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دووجهی تعمیم یافته یعنی $D_{(m,n)}$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۲. گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دووجهی تعمیم یافته $D_{(m,n)}$ برابر است با:

$$\Gamma(D_{(m,n)}) = \begin{cases} K_{\frac{m(n-1)}{4}} \cup K_{\frac{m}{2}} & n \text{ فرد} \\ K_{\frac{m(n-2)}{4}} \cup 2K_{\frac{m}{2}} & n \text{ و } \frac{n}{2} \text{ زوج} \\ K_{\frac{m(n-2)}{4}} \cup K_{m} & n \text{ زوج و } \frac{n}{2} \text{ فرد} \end{cases}.$$

اثبات. می‌دانیم $G = D_{(m,n)} = \langle a, b \mid a^n = b^m = 1, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$ که در آن $n \geq 3$، $m \geq 2$ و m عددی زوج است. ابتدا نشان می‌دهیم

$$\frac{G}{Z(G)} \cong \begin{cases} D_{2n} & n \text{ فرد} \\ D_n & n \text{ زوج} \end{cases}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136084.1549

برای این‌منظور دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) فرض می‌کنیم n فرد باشد. بنابر لم ۱.۲، $Z = Z(G) = \langle b^2 \rangle$. چون $b \notin Z$ و $b^2 \in Z$ پس $o(bZ) = 2$. از طرفی $o(aZ) = n$. زیرا اولاً $(aZ)^n = (a^n Z) = Z$. ثانیاً اگر $1 \neq o(aZ) = k < n$، آنگاه $a^k \in Z = \langle b^2 \rangle$ که این تناقض است. حال برای هر $x = a^i b^j \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} xZ &= a^i b^j Z \\ &= a^i Z b^j Z \\ &= \begin{cases} a^i Z = (aZ)^i & 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{و} \quad j \text{ زوج} \\ a^i ZbZ = (aZ)^i (bZ) & 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{و} \quad j \text{ فرد} \end{cases} . \end{aligned}$$

همچنین بنابر تعریف $bab^{-1} = a^{-1}$، از این‌رو $(bZ)(aZ)(bZ)^{-1} = (aZ)^{-1}$ و

$$\frac{G}{Z} = \langle aZ, bZ \mid (aZ)^n = (bZ)^2 = Z \ , \ (bZ)(aZ)(bZ)^{-1} = (aZ)^{-1} \rangle \cong D_{2n}$$

(۲) فرض می‌کنیم n زوج باشد. بنابر لم ۱.۲، $Z = Z(G) = \langle a^{\frac{n}{2}} \rangle \times \langle b^2 \rangle$. واضح است که $o(bZ) = 2$. همچنین می‌توان دید که $o(aZ) = \frac{n}{2}$. زیرا اولاً $(aZ)^{\frac{n}{2}} = a^{\frac{n}{2}} Z = Z$. ثانیاً اگر $1 \neq o(aZ) = k < \frac{n}{2}$، آنگاه $a^k \in Z = \langle a^{\frac{n}{2}} \rangle \times \langle b^2 \rangle$ که این تناقض است. حال برای هر $x = a^i b^j \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} xZ &= a^i b^j Z \\ &= a^i Z b^j Z \\ &= \begin{cases} a^i Z = (aZ)^i & 0 \leq i \leq \frac{n}{2}-1 \quad \text{و} \quad j \text{ زوج} \\ a^i ZbZ = (aZ)^i (bZ) & 0 \leq i \leq \frac{n}{2}-1 \quad \text{و} \quad j \text{ فرد} \end{cases} . \end{aligned}$$

همچنین بنابر تعریف $bab^{-1} = a^{-1}$، از این‌رو $(bZ)(aZ)(bZ)^{-1} = (aZ)^{-1}$ و

$$\frac{G}{Z} = \langle aZ, bZ \mid (aZ)^{\frac{n}{2}} = (bZ)^2 = Z \ , \ (bZ)(aZ)(bZ)^{-1} = (aZ)^{-1} \rangle \cong D_n$$

بنابراین نشان دادیم:

$$\frac{G}{Z} \cong \begin{cases} D_{2n} & n \text{ فرد} \\ D_n & n \text{ زوج} \end{cases} .$$

حال اگر n فرد باشد، آنگاه بنابر رابطه اخیر و این‌که $|G| = mn$، پس $\frac{G}{Z} \cong D_{2n}$ و $|Z| = \frac{m}{2}$. پس بنابر قسمت سوم از قضیه ۱.۱، $\Gamma(G) = K_{\frac{m(n-1)}{4}} \cup K_{\frac{m}{2}}$. اما اگر n زوج باشد، آنگاه $\frac{G}{Z} \cong D_n = D_{2(\frac{n}{2})}$ و $|Z| = m$، پس بنابر قسمت سوم قضیه ۱.۱،

$$\Gamma(G) = \begin{cases} K_{\frac{m(n-2)}{4}} \cup 2K_{\frac{m}{2}} & \frac{n}{2} \text{ زوج} \\ K_{\frac{m(n-2)}{4}} \cup K_m & \frac{n}{2} \text{ فرد} \end{cases} .$$

و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. $\square$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136084.1549

مثال ۴.۲. اگر در گروه دووجهی تعمیم یافته $D_{(m,n)}$، $m=2$ قرار دهیم، آنگاه $D_{(2,n)} = D_{2n}$. از این‌رو بنابر قضیه ۳.۲،

$$\Gamma(D_{2n}) = \Gamma(D_{(2,n)}) = \begin{cases} K_{\frac{n-1}{2}} \cup K_1 & n \text{ فرد} \\ K_{\frac{n}{2}-1} \cup 2K_1 & n \text{ و } \frac{n}{2} \text{ زوج} \\ K_{\frac{n}{2}-1} \cup K_2 & n \text{ زوج و } \frac{n}{2} \text{ فرد} \end{cases}.$$

که این همان قضیه ۱.۱(۱) است.

در ادامه به محاسبه گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دودوری تعمیم یافته می‌پردازیم. می‌دانیم که $Dic(A,y,x) = \langle A, x \mid x^2 = y,\ a^x = a^{-1},\ \forall a \in A\rangle$. حال در این گروه قرار می‌دهیم $A_2 = \{g^2 \mid g \in A\}$. واضح است که $A_2 \leq A$. همچنین اگر $B = \{aA_2 \mid a \in A\}$ مجوعه همدسته‌های چپ A_2 در A باشد، آنگاه رابطه $\sim$ را روی B که به صورت زیر تعریف می‌کنیم، به وضوح یك رابطه هم‌ارزی است.

$$aA_2 \sim bA_2 \iff \exists g \in A_2 :\ a^2 = b^2 g^2 \tag{۴.۲}$$

کلاس‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$ را با نماد $\overline{aA_2}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۵.۲. گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دودوری تعمیم یافته $Dic(A,y,x)$ برابر است با:

$$\Gamma(Dic(A,y,x)) = K_t \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} K_{|\overline{a_iA_2}|}\right)$$

که $t = \frac{|A|-|Z(Dic(A,y,x))|}{2}$، $A_2 = \{g^2 \mid g \in A\} \leq A$ و $\overline{a_iA_2}$ها همگی کلاس‌های هم‌ارزی مجزا هستند. همچنین $\sum_{i=1}^{r} |\overline{a_iA_2}| = [A : A_2]$ که در آن r تعداد کلاس‌های هم‌ارزی متمایز است.

اثبات. قرار می‌دهیم $G = Dic(A,y,x) = \langle A, x \mid x^2 = y,\ a^x = a^{-1},\ \forall a \in A\rangle$. بنابر بندهای (۱) و (۲) لم ۲.۲، $G = A \cup xA$، $Z(G) \leq A$ و $Z(G) \cap xA = \emptyset$. پس اعضای غیر مرکزی گروه G برابر است با $(A \setminus Z(G)) \cup xA$. حال دو حالت در نظر می‌گیریم.

(۱) فرض می‌کنیم $a \in A \setminus Z(G)$. بنابر قسمت سوم از لم ۲.۲، $a^G = \{a, a^{-1}\} \subset A$ و $C_G(a) = A$. چون A یک گروه آبلی است، پس همه کلاس‌های به صورت a^G در گراف $\Gamma(G)$ با هم مجاورند. تعداد چنین کلاس‌هایی برابر با $t = \frac{|A|-|Z(G)|}{2}$ پس در این حالت $\Gamma(G)$ دارای زیرگراف کامل K_t است.

(۲) فرض می‌کنیم $xa \in xA$ بنابر قسمت چهارم از لم ۲.۲، $C_G(xa) = Z(G) \cup \{xb \in xA \mid b^2 = a^2\}$ و $(xa)^G = xaA_2$ که $A_2 = \{g^2 \mid g \in A\}$. حال اگر $(xa)^G$ و $(xb)^G$ دو کلاس باشند واضح است که

$$(xa)^G \cap (xb)^G = \emptyset \ \Leftrightarrow\ aA_2 = bA_2 \tag{۵.۲}$$

پس در این‌حالت تعداد کلاس‌های تزویج متمایز برابر با $[A : A_2]$. حال فرض می‌کنیم $(xa)^G$ و $(xb)^G$ دو رأس مجاور در گراف $\Gamma(G)$ باشند. از این‌رو عضوهای $g, h \in A_2$ یافت می‌شوند به‌طوری‌که $xag \in (xa)^G$ و

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136084.1549

$xbh \in (xb)^G$. پس داریم:

$$\begin{aligned}(xag)(xbh)=(xbh)(xag) &\Leftrightarrow (ag)x(bh)=(bh)x(ag)\\ &\Leftrightarrow (ag)(bh)^{-1}x=(bh)(ag)^{-1}x\\ &\Leftrightarrow (ag)^2=(bh)^2\\ &\Leftrightarrow a^2=b^2s^2\end{aligned}$$

که در آن $s=hg^{-1}\in A_2$. بنابر رابطه ۵.۲ و نتیجه اخیر درمی‌یابیم که دو رأس $(xa)^G$ و $(xb)^G$ در گراف $\Gamma(G)$ وقتی مجاورند اگر و تنها اگر $aA_2 \sim bA_2$. همچنین $B=\{aA_2 \mid a\in A\}=\bigcup_{i=1}^{r}\overline{a_iA_2}$ که در آن $\overline{a_iA_2}$ نشان دهنده کلاس هم‌ارزی رابطه $\sim$ و r تعداد کلاس‌های هم‌ارزی متمایز است. بنابراین داریم $[A:A_2]=\sum_{i=1}^{r}|\overline{a_iA_2}|$. بنابراین در این حالت $\Gamma(G)$ دارای یک زیرگراف به صورت $\bigcup_{i=1}^{r}K_{|\overline{a_iA_2}|}$ است.
بنابر قسمت‌های سوم و چهارم لم ۲.۲، برای هر $a\in A$ و هر $xb\in xA$، $C_G(a)\cap C_G(xb)=Z(G)$. در نتیجه هیچ کلاسی از بندهای (۱) و (۲) در گراف $\Gamma(G)$ با هم مجاور نیستند. از این‌رو گراف جابجایی کلاس‌های تزویج G برابر است با:

$$\Gamma(G)=K_t\cup\left(\bigcup_{i=1}^{r}K_{|\overline{a_iA_2}|}\right).$$

که $t=\frac{|A|-|Z(G)|}{2}$. بنابراین اثبات کامل است. $\square$

مثال ۶.۲. در قضیه ۵.۲، اگر $A=\langle a\rangle$ یک گروه دوری از مرتبه $2n$ باشد، آنگاه

$$Dic(A,y,x)=T_{4n}=\langle a,x \mid a^{2n}=1, a^n=x^2, a^x=a^{-1}\rangle.$$

به‌وضوح می‌توان دید $T_{4n}=A\cup xA$ که در آن $A=\{1,a,\ldots,a^{2n-1}\}$ و $xA=\{x,xa,\ldots,xa^{2n-1}\}$. همچنین برای هر $0\le i\le 2n-1$، $o(xa^i)=4$ و

$$o(a^i)=\begin{cases}1 & : i=0\\ 2 & : i=n\\ s & : i\neq 0,n\end{cases}$$

که در آن $s=\dfrac{2n}{(i,2n)}$ و $s\neq 1,2$. بنابراین $Z(T_{4n})=\{1,a^n\}$ و $A_2=\{1,a^2,a^4,\ldots,a^{2(n-1)}\}$. لذا $|A_2|=n$ و $[A:A_2]=2$. پس کلاس‌های تزویج غیرمرکزی T_{4n} برابر است با

$$(a^i)^{T_{4n}}=\{a^i,a^{-i}\}\qquad,\qquad x^{T_{4n}}=xA_2\qquad,\qquad (xa)^{T_{4n}}=xaA_2$$

که در آن $1\le i\le n-1$. چون A یک گروه آبلی است، لذا تمام کلاس‌ها به صورت $(a^i)^{T_{4n}}$ همگی در گراف $\Gamma(T_{4n})$ مجاورند. حال اگر n زوج باشد، آنگاه هیچ عنصری مانند $g\in A_2$ یافت نمی‌شود که $a^2=g^2$. بنابراین دو کلاس $x^{T_{4n}}$ و $(xa)^{T_{4n}}$ در گراف $\Gamma(T_{4n})$ مجاور نیستند. اما اگر n فرد باشد، آنگاه واضح است که $a^{n+1}\in A_2$ و داریم $a^2=(a^{n+1})^2$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136084.1549

پس دو کلاس $x^{T_{۴n}}$ و $(xa)^{T_{۴n}}$ در گراف $\Gamma(T_{۴n})$ مجاورند. بنابراین گراف جابجایی کلاس‌های تزویج گروه دو دوری $T_{۴n}$ برابر است با:

$$\Gamma(T_{۴n}) = \begin{cases} K_{n-۱} \cup ۲K_{۱} & n \text{ زوج} \\ K_{n-۱} \cup K_{۲} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

که این همان قضیه ۱.۱(۲) می‌باشد.

مراجع

[1] A. Abdollahi, S. Akbari and H. R. Maimani, Non-commuting graph of a group, *J. Algebra*, **298** (2006) 468–492.

[2] R. Brauer and K. A. Fowler, On groups of even order, *Ann. of Math.*, **62** (1955) 565–583.

[3] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[4] M. Herzog, P. Longobardi and M. Maj, On a commuting graph on conjugacy classes of groups, *Comm. Algebra*, **37** (2009) 3369–3387.

[5] B. H. Neumann, A problem of Paul Erdös on groups, *J. Aust. Math. Soc. Ser. A*, **21** (1976) 467–472.

[6] A. Mohammadian, A. Erfanian, M. Farrokhi D. G. and B. Wilkens, Triangle-free commuting conjugacy class graphs, *J. Group Theory*, **19** (2016) 1049–1061.

[7] D. J. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[8] M. A. Salahshour and A. R. Ashrafi, Commuting conjugacy class graph of finite CA-groups, *Khayyam J. Math.*, **6** (2020) 108–118.

[9] M. A. Salahshour, Commuting conjugacy class graph of G when $\frac{G}{Z(G)} \cong D_{2n}$, *Mathematics Interdisciplinary Research*, **5** (2020) 379–385.

[10] R. M. Solomon and A. J. Woldar, Simple groups are characterized by their non-commuting graphs, *J. Group Theory*, (2013) 1–32.

محمدعلی سلحشور

گروه ریاضی، واحد سوادکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، سوادکوه، ایران

MA.Salahshour@iau.ac.ir

محمدعلی سلحشور متولد بهمن ماه سال ۱۳۵۳ در شهر قائمشهر است. او در سال ۱۳۷۲ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه پیام‌نور واحد ساری شد. در سال ۱۳۷۹ جهت ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش گروه وارد دانشگاه کاشان شد. همچنین در سال ۱۳۹۳ در همین دانشگاه برای اخذ مقطع دکتری در گرایش گروه‌ها، تحصیلات خود را ادامه داد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136084.1549

Commuting conjugacy classes graph of the generalized dihedral and dicyclic groups

Mohammadali Salahshour

Abstract: Suppose G is a finite non-abelian group and $\Gamma(G)$ is a simple graph with the non-central conjugacy classes of G as its vertex set. Two different non-central conjugacy classes A and B are assumed to be adjacent if and only if there are elements $a, b \in G$ such that $a \in A$, $b \in B$ and $ab = ba$. This graph is called the commuting conjugacy class graph of G. In this paper, the structure of the commuting conjugacy class graph of the generalized dihedral group $D_{(m,n)}$ and the generalized dicyclic group $Dic(A, y, x)$ are completely determined.

Keywords: conjugacy classes, commuting conjugacy classes graph, the generalized dihedral group, the generalized dicyclic groups.

Mohammadali Salahshour
Department of Mathematics, Swadkoh Branch, Islamic Azad University, Swadkoh, Iran.
Email: MA.Salahshour@iau.ac.ir

Communicated by Hamid Mousavi.
Article Type: Research Paper.
Received: 13/12/2022, Accepted: 12/03/2023.