

در مورد اصل انتخاب

سید محمد امین خاتمی

چکیده. در این مقاله، به اختصار به تاریخچه اصل انتخاب و مفاهیمی از نظریه مجموعه‌ها مرتبط با این اصل، می‌پردازیم. در این راستا بعضی از مهمترین معادل‌های اصل انتخاب و نیز برخی از صورت‌های ضعیف‌تر این اصل را بیان می‌کنیم و اشاره‌ای به مهمترین نتایج اصل انتخاب در شاخه‌های مختلف ریاضی خواهیم نمود.

۱. مقدمه

بعد از اصل توازی اقلیدس، اصل انتخاب یکی از مناقشه‌آمیزترین اصولی است که تا بحال در ریاضیات مطرح شده است. با این‌که این اصل یکی از جالب‌ترین اصول مطرح شده در ریاضیات است و نتایج بسیار شگفت‌آور و مفیدی با استفاده از آن به‌دست می‌آیند، اما نمی‌توان مفهومی را در ریاضیات یافت که به اندازه اصل انتخاب مورد حمله قرار گرفته باشد. باید اذعان کرد که بدون اصل انتخاب، ریاضیات چهره کاملاً متفاوتی می‌داشت و به عقیده عده‌ای شاید فقط به مجموعه‌ای از الگوریتم‌ها تبدیل می‌شد. در بسیاری از علوم با تعریف اشیاء جدید، بعضی از جزئیات برای مدت زمانی ممکن است مغفول بمانند. زمانی‌که نظریه‌ی نوین مجموعه‌ها؛ که شامل تعریفی برای مفهوم مجموعه نامتناهی بود؛ معرفی شد، شاید بتوان گفت برای اولین بار بشر مصداقی غیر ماورائی برای نامتناهی بالفعل در ذهن خویش یافته بود. این ذوق زدگی بابت وجود نامتناهی بالفعل در ذهن بشر و البته عدم تجربه کار با مفاهیم نامتناهی تا آن موقع، باعث شد که در ابتدای کار، بعضی از جزئیات مغفول بمانند. نظریه‌ی نوین مجموعه‌ها، از تجهیز نظریه طبیعی مجموعه‌ها^۱ به مفهوم مجموعه‌های نامتناهی در سال ۱۸۷۴ توسط کانتور^۲ پا به عرصه ریاضیات گذاشت [۱۰]، [۱۷]، (صفحه ۱۷۱).

در ادامه، بعد از بیان چند مفهوم اولیه در نظریه‌ی نوین مجموعه‌ها، مروری بر مباحث ابتدایی پیرامون اصل انتخاب خواهیم داشت.

۱.۱. رابطه‌های هم‌ارزی و ترتیبی. رابطه R روی مجموعه A را یک رابطه هم‌ارزی^۳ گویند هرگاه بازتابی، تقارنی و متعدی باشد. R را یک رابطه ترتیبی جزئی یا به اختصار ترتیبی^۴ می‌گویند هرگاه بازتابی، پادمتقارن و متعدی باشد و در این صورت A یا زوج (A, R) را یک مجموعه جزئاً مرتب یا به اختصار مرتب^۵ می‌نامند. گاهی اوقات وقتی R یک رابطه روی A است، به جای

عبارات و کلمات کلیدی: اصل انتخاب، نظریه مجموعه‌ها، معادل‌های اصل انتخاب، نتایج اصل انتخاب.
دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوری‌ولی

نوع مقاله: مروری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۲

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.135917.1545>

¹naive set theory ²G. Cantor ³equivalence relation ⁴partial order relation ⁵partially ordered set

اینکه بنویسند $(a, b) \in R$ از aRb استفاده می‌کنند. رابطه ترتیبی R روی مجموعه A را یک رابطه ترتیبی خطی (یا کلی) ^۶ می‌نامند هرگاه به ازای هر $a, b \in A$ ، یا $a = b$ ، یا aRb و یا bRa ، که در این صورت A را یک مجموعه مرتب خطی ^۷ می‌نامند.

۲.۱. رابطه هم‌توانی. دو مجموعه A و B را هم‌توان ^۸ گویند هرگاه یک تناظر یک‌به‌یک بین آنها موجود باشد. رابطه هم‌توانی یک رابطه هم‌ارزی بین مجموعه‌ها تعریف می‌کند.

۳.۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی. مجموعه X را نامتناهی (دکیند-نامتناهی) ^۹ گویند هرگاه با یک زیرمجموعه سره خودش هم‌توان باشد و در غیر این صورت آن را متناهی ^{۱۰} (دکیند-متناهی) گویند. تعریف دیگر به این صورت است که مجموعه A متناهی است هرگاه به ازای یک عدد طبیعی n ، مجموعه A با مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ هم‌توان باشد و در غیر این صورت نامتناهی است. دو تعریف مذکور در صورت پذیرش اصل انتخاب معادل هم هستند و در غیر این صورت معادل هم نمی‌باشند.

۴.۱. مجموعه شمارا و ناشمارا. مجموعه نامتناهی X را شمارا ^{۱۱} گویند هرگاه با $\mathbb{N}$ هم‌توان باشد و در غیر این صورت آن را ناشمارا ^{۱۲} می‌گویند.

۵.۱. مجموعه خوش‌ترتیب. رابطه ترتیبی خطی $\leq$ روی مجموعه X را یک رابطه خوش‌ترتیبی می‌نامند هرگاه هر زیرمجموعه X تحت رابطه $\leq$ دارای کوچکترین عضو باشد و در این صورت X را یک مجموعه خوش‌ترتیب ^{۱۳} می‌نامند.

۶.۱. اصل خوش‌ترتیبی. اصل خوش‌ترتیبی ^{۱۴} می‌گوید که هر مجموعه ناتهی X خوش‌ترتیب شدنی است. یعنی روی هر مجموعه X یک رابطه خوش‌ترتیبی وجود دارد.

۷.۱. تابع انتخاب و اصل انتخاب. به ازای هر مجموعه X از مجموعه‌های ناتهی، تابع انتخاب ^{۱۵}، تابعی است از X به $\cup X$ ^{۱۶} به طوری که به ازای هر $A \in X$ داریم $f(A) \in A$. اصل انتخاب ^{۱۷} می‌گوید به ازای هر مجموعه‌ای X از مجموعه‌های ناتهی، تابع انتخاب وجود دارد.

۸.۱. رابطه یکرختی ترتیبی. به ازای هر دو مجموعه مرتب $(A, \leq_A)$ و $(B, \leq_B)$ ، یک یکرختی ترتیبی ^{۱۸} از A به B تابع دوسویی $f: A \rightarrow B$ است که حافظ ترتیب باشد، بدین معنی که اگر $a \leq_A b$ آنگاه $f(a) \leq_B f(b)$. رابطه یکرختی ترتیبی یک رابطه هم‌ارزی است. هر کلاس هم‌ارزی از رابطه یکرختی ترتیبی را یک نوع ترتیبی ^{۱۹} می‌نامند.

۹.۱. اعداد ترتیبی. با توجه به تعریفی که در کتاب مبانی ریاضیات راسل ^{۲۰} و وایتهد ^{۲۱} [۵۲] آمده است، اعداد ترتیبی ^{۲۲} نوع‌های ترتیبی مجموعه‌های خوش‌ترتیب هستند. اما چون یک نوع ترتیبی در واقع یک کلاس هم‌ارزی هست و لزوماً یک مجموعه نیست، برای اینکه یک عدد ترتیبی یک مجموعه هم باشد، می‌توان آن را یک مجموعه خوش‌ترتیب خاص متعلق به یک نوع ترتیبی در نظر گرفت. با توجه به تعریف فون‌نویمان ^{۲۳} اولین عدد ترتیبی ω یا مجموعه تهی است و هر عدد ترتیبی دیگر عبارت است از مجموعه خوش‌ترتیب اعداد ترتیبی کوچکتر از آن. با این تعریف، اعداد ترتیبی تعمیمی از اعداد طبیعی هستند و عبارتند از $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \omega + \omega + 2, \dots, \omega + \omega + \omega, \dots$ که ω_1 اولین عدد ترتیبی ناشمارا است. α را یک عدد ترتیبی تالی می‌گویند هرگاه بزرگترین عدد ترتیبی کوچکتر از α موجود باشد و در غیر این صورت آن را عدد ترتیبی حدی می‌نامند. بنابراین $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega, \dots$ اعداد ترتیبی حدی هستند.

⁶linear order relation ⁷linearly ordered set ⁸equipotent ⁹infinite ¹⁰finite ¹¹countable ¹²uncountable ¹³well-ordered set
¹⁴well-ordering principle, WE ¹⁵choice function ¹⁶ $\cup X = \bigcup_{A \in X} A$ ¹⁷axiom of choice ¹⁸order isomorphism ¹⁹order type

²⁰B. Russell ²¹A. N. Whitehead ²²ordinal number ²³J. von Neumann

۱۰.۱. اعداد اصلی. کلاس‌های هم‌ارزی رابطه هم‌توانی معرف اعداد اصلی^{۲۴} هستند. مشابه نکته‌ای که در تعریف اعداد ترتیبی ذکر شد، برای اینکه یک عدد اصلی یک مجموعه باشد، باید یک عضو خاص از هر کلاس هم‌ارزی رابطه هم‌توانی را در نظر گرفت. با توجه به تعریف فون‌نویمان، کوچکترین عدد ترتیبی متعلق به کلاس‌های هم‌ارزی رابطه هم‌توانی را اعداد اصلی می‌نامیم. عدد اصلی مجموعه تهی را با 0 ، عدد اصلی مجموعه‌های تک‌عضوی را با 1 ، $\dots$ ، عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی را با $\aleph_0$ و عدد اصلی مجموعه اعداد حقیقی را با c نمایش می‌دهند. اگر a و b عدد اصلی مجموعه‌های A و B باشند، چنانچه تابع یک‌به‌یک $f: A \rightarrow B$ موجود باشد می‌نویسند $a \leq b$. می‌توان نشان داد رابطه $\leq$ روی اعداد اصلی یک رابطه ترتیبی است. با فرض اصل خوش‌ترتیبی، کوچکترین عدد اصلی بعد از یک عدد اصلی همواره موجود است و در این صورت اعداد اصلی را می‌توان با $\{\aleph_\alpha; \alpha \in \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{c\}\}$ نمایش داد. به ازای هر مجموعه A عدد اصلی مجموعه $P(A)$ که مجموعه توانی A است را با 2^a نمایش می‌دهند. کانتور در همان اوایل معرفی مجموعه‌های نامتناهی نشان داد $2^{\aleph_0} = c$. به علاوه خود کانتور با فرایندی موسوم به قطری‌سازی نشان داد $\aleph_0$ از $2^{\aleph_0}$ اکیداً کمتر است.

۱۱.۱. سه‌گانگی اعداد اصلی. خطی بودن رابطه $\leq$ روی اعداد اصلی به این معنی است که بین هر دو عدد اصلی a و b ، یا $a \leq b$ و یا $b \leq a$. حالا اگر $a < b$ به این معنی باشد که $a \leq b$ و $a \neq b$ (یعنی تابع یک‌به‌یک از A بتوی B موجود است ولی تابع دوسویی از A به B وجود ندارد)، آنگاه خطی بودن را می‌شود به این صورت نیز بیان کرد که بین هر دو عدد اصلی a و b ، یا $a < b$ ، یا $a = b$ و یا $b < a$ ، که از آن به سه‌گانگی اعداد اصلی^{۲۵} نیز نام می‌برند. کانتور با فرض اصل خوش‌ترتیبی، سه‌گانگی اعداد اصلی را ثابت کرده بود [۴۴، صفحه ۱۰]. هارتوختس^{۲۶} نشان داد که سه‌گانگی اعداد اصلی معادل اصل انتخاب است [۲۳].

۱۲.۱. فرض پیوستار. بر اساس فرض پیوستار^{۲۷} بین $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ عدد اصلی دیگری وجود ندارد. پس با فرض اصل خوش‌ترتیبی (که ایجاب می‌کند همه اعداد اصلی نامتناهی به صورت $\{\aleph_\alpha; \alpha \text{ عددی ترتیبی است}\}$ باشند)، فرض پیوستار می‌گوید $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

۱۳.۱. پارادکس راسل. تعریف کانتور از مجموعه به این صورت بود که یک مجموعه گردایه‌ای از اشیاء با خاصیت مشخص است. در سال ۱۹۰۱ راسل با الهام گرفتن از یکی از کارهای بورالی-فروتی^{۲۸} نشان داد که تعریف کانتور از مجموعه منجر به بروز پارادکسی به این صورت می‌شود که مجموعه‌ای مثل X می‌توان یافت که هیچ کدام از دو حکم $X \in X$ و $X \notin X$ در مورد آن درست نیست.

۱۴.۱. ZF و ZFC. به منظور اجتناب از بروز پارادکس‌هایی مشابه پارادکس راسل، نظریه مجموعه‌ها به صورت اصل موضوعی از سال ۱۹۰۸ و با معرفی یک مجموعه نسبتاً کامل از اصول موضوعه توسط یک ریاضیدان جوان آلمانی به نام تسرملو^{۲۹} مورد توجه قرار گرفت. دستگاه اصل موضوعی ZF (تسرملو-فرانکل) عبارت است از اصول مطرح شده توسط تسرملو در سال ۱۹۰۸ منهای اصل انتخاب و البته همراه با اصلاحیه اصل جایگزینی^{۳۰} که توسط فرانکل^{۳۱} در سال ۱۹۲۲ پیشنهاد شد و به علاوه اصل انتظام^{۳۲} که توسط فون‌نویمان در سال ۱۹۲۵ معرفی شد. ZF به همراه اصل انتخاب را با ZFC نمایش می‌دهند. شاید مهمترین اصل بندی برای نظریه مجموعه‌ها همین ZFC باشد که در بخش ۳ با تفصیل بیشتر معرفی می‌شود. بیشتر ریاضیات امروزه مبتنی بر ZF و یا ZFC می‌باشد. اصول موضوعه فراوان دیگری نیز برای نظریه مجموعه‌ها ارائه شده‌اند که در شاخه‌های دیگر ریاضی، کاربردی ندارند و بیشتر در خود نظریه مجموعه‌ها به کار می‌روند. با توجه به اصل بندی ZF، فقط چیزهایی که همه

²⁴cardinal number ²⁵law of trichotomy, T ²⁶F. Hartogs ²⁷continuum hypothesis, CH ²⁸C. Burali-Forti ²⁹E. Zermelo

³⁰axiom of replacement ³¹A. Fraenkel ³²axiom of regularity

اصول ZF برای آنها صادق باشند مجموعه هستند. در این صورت، ممکن است به ازای یک فرمول در زبان نظریه مجموعه‌ها، گردایه عناصری که در آن فرمول صدق می‌کنند، یک مجموعه نسازند. چنین گردایه‌هایی را کلاس می‌نامند. مثلاً با توجه به پارادکس راسل که در بخش ۳ بیان خواهد شد، گردایه $\{x : x = x\}$ یک مجموعه نیست و یک کلاس است.

۱۵.۱. منطق محمولات. در زبان‌شناسی^{۳۳} منطق گزاره‌ای^{۳۴}، گزاره‌ها از روی یک مجموعه از گزاره‌های اتمی^{۳۵} مثل $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ به کمک رابط‌های منطقی $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ و نماد پرانتز ساخته می‌شوند ولی دیگر به جزئیات گزاره‌های اتمی پرداخته نمی‌شود. اما در گزاره‌شناسی منطق محمولات^{۳۶}، بطن گزاره‌های اتمی نیز قابل بررسی است^{۳۷}. در واقع در منطق محمولات، گزاره‌ها از روی یک زبان مثل $\mathcal{L}$ مشتمل بر نمادهای ثابت، نمادهای تابعی، و نمادهای محمولی به همراه مجموعه‌ای از متغیرها مثل $\{x, y, z, \dots\}$ ، رابط‌های منطقی $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ، سورهای $\{\forall, \exists\}$ ، و نماد پرانتز ساخته می‌شوند. در منطق محمولات مرتبه اول، سورها فقط روی متغیرها قرار می‌گیرند و در منطق محمولات مرتبه دوم و مراتب بالاتر سورها می‌توانند روی رابط‌ها، مجموعه‌ها، توابع، صفات و ... نیز قرار گیرند. لازم به ذکر است به لحاظ معنی‌شناسی، یک $\mathcal{L}$ -ساختار مجموعه‌ای است مثل M به همراه تعبیر نمادهای زبانی بدین صورت که تعبیر یک نماد ثابت یک عنصر از M ، تعبیر یک نماد تابعی n موضعی یک تابع از M^n به M ، و تعبیر یک نماد محمولی n موضعی یک زیرمجموعه از M^n است. با توجه به نحوه ساخته شدن گزاره‌ها، محمول‌ها باعث می‌شوند که بتوان در ساختارها برای جملات ارزش تعیین کرد. لذا برای عبارت‌هایی مثل $x + 2$ یا $3y$ که فاقد محمول هستند، هیچ ارزش راست یا دروغی نمی‌توان تعیین کرد ولی برای $3y = x + 2$ که محمول تساوی در آن است، چنانچه مقادیر متغیرها را در ساختار بدانیم، می‌توان ارزش تعیین کرد و همچنین برای $\forall x \exists y (2 + x = 3y)$ نیز به محض مشخص بودن ساختار می‌توان ارزش تعیین کرد. همان‌طور که در بخش ۳ خواهید دید، زبان نظریه مجموعه‌ها فقط شامل یک نماد محمولی $\in$ است و سایر نمادها مثل $=, \subseteq, \cup, \dots$ که در نظریه مجموعه‌ها مشاهده می‌کنید، به کمک $\in$ و اصول نظریه مجموعه‌ها قابل تعریف هستند.

۲. تاریخچه‌ای مختصر از پیدایش نظریه مجموعه‌های مدرن

پس از معرفی فرض پیوستار در سال ۱۸۷۸ و اصل خوش‌ترتیبی در سال ۱۸۸۳ توسط کانتور، هیلبرت^{۳۸} در سال ۱۹۰۰ در دومین کنگره بین‌المللی ریاضیدانان که در پاریس برگزار شده بود، اثبات فرض پیوستار و نیز اثبات اصل خوش‌ترتیبی را به عنوان یکی از ۲۳ مسئله مهم و قابل توجه ریاضیات قرن بیستم معرفی کرد.

کانتور از اصل خوش‌ترتیبی به عنوان یکی از قوانین تفکر نام می‌برد، ولی خوش‌ترتیبی توسط معاصرانش به عنوان یک اصل پذیرفته نشد تا جایی که خودش نیز به دنبال اثباتی برای آن بود [۱۷، صفحه ۲۶۴][۱۲]. او همچنین مدت‌ها برای اثبات فرض پیوستار تلاش کرد ولی به نتیجه‌ای نرسید [۱۷، صفحه ۱۷۱][۱۱].

بر مبنای اصل خوش‌ترتیبی که کانتور آن را به عنوان قانونی از تفکر بیان می‌کرد، روی هر مجموعه می‌توان یک رابطه خوش‌ترتیبی تعریف نمود. این موضوع برای $\mathbb{N}$ که واضح است. در مورد $\mathbb{Z}$ یک رابطه خوش‌ترتیبی ممکن $-2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots$ است.

^{۳۵} گزاره اتمی، جمله یا عبارت ساده خبری است که دارای ارزش راست یا دروغ است و نه هر دو، هر چند ارزش آن برای ما معلوم نباشد. مثلاً « $2 + 2 = 5$ » یک گزاره اتمی با ارزش دروغ و «۵ عددی اول است» یک گزاره اتمی با ارزش راست و «هر عدد زوج بزرگتر از ۲ به صورت مجموع دو عدد اول قابل نوشتن است» یک گزاره (غیر اتمی) با ارزش نامعلوم است. گزاره « $2 + 2 = 5$ » و «۵ عددی اول است» یک گزاره (غیر اتمی) است که از روی دو گزاره اتمی و با استفاده از رابط منطقی «و» ساخته شده است.

^{۳۷} در منطق گزاره‌ای، « $2 + 2 = 5$ » یک گزاره اتمی است که به جزئیات آن پرداخته نمی‌شود در حالی که در منطق محمولات، این گزاره ترکیبی از نمادهای ثابت ۲ و ۵، نماد تابعی + و نماد محمولی = است.

^{۳۳}syntax ^{۳۴}propositional logic ^{۳۶}predicate logic ^{۳۸}D. Hilbert

برای مجموعه اعداد گویا، با توجه به اینکه بین هر دو عدد گویا یک عدد گویای دیگر موجود است، موضوع ممکن است کمی پیچیده به نظر برسد، در حالی که کار خیلی هم سخت نیست. مثلاً اگر $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ با ضابطه $f(a/b) = 2^{a/d} 3^{b/d}$ تعریف شود که d بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است، آنگاه f یک تابع یک به یک خواهد بود و به علاوه رابطه $f \leq$ که به صورت « $x \leq_f y$ » اگر و فقط اگر « $f(x) \leq f(y)$ » تعریف می شود، یک رابطه خوش ترتیبی روی $\mathbb{Q}^+$ تعریف می کند که به راحتی می توان آن را به یک رابطه خوش ترتیبی روی $\mathbb{Q}$ تعمیم داد. موضوع البته از این هم ساده تر است و مثلاً می توان تحقیق کرد که $\mathbb{Q}$ با ترتیب زیر نیز یک مجموعه خوش ترتیب است.

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{4}{5}, \dots, \frac{5}{7}, \dots, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$$

اما برای $\mathbb{R}$ نمی توان به سادگی یک رابطه خوش ترتیبی معرفی کرد. در واقع اگر اصول موضوعه نظریه مجموعه ها را در نظر بگیریم، آنگاه با فرض سازگاری این اصول، وجود یک رابطه خوش ترتیبی روی $\mathbb{R}$ را توسط ZF نه می توان تایید کرد و نه رد ^{۳۹}. علاوه بر این، گرچه با فرض اصل خوش ترتیبی (و یا اصل انتخاب)، مطمئن هستیم که در همه مدل های ZFC حتماً یک رابطه خوش ترتیبی روی $\mathbb{R}$ وجود دارد، ولی در مورد اینکه این رابطه خوش ترتیبی چه ساختاری می تواند داشته باشد، تقریباً چیزی برای گفتن وجود ندارد. با مفروض بودن یک تابع انتخاب F روی $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \emptyset$ ، می توان رابطه خوش ترتیبی روی $\mathbb{R}$ را تا حدودی توصیف کرد [۵۳]، اما نقص بزرگ این توصیف این است که اصل انتخاب فقط وجود تابع F را تضمین می کند ولی از ساختارش چیزی نمی گوید.

در عین حال به نظر می رسد خوش ترتیب شدن $\mathbb{R}$ عجیب تر از عدم وجود تعریف ایجابی برای اعداد گنگ نیست. اثبات وجود اعداد گنگ را به مدرسه فیثاغورث در یونان باستان نسبت می دهند اما هنوز یک تعریف ایجابی مناسب برای همه اعداد گنگ ارائه نشده است و فقط به تعریف سلبی «هر عددی که گویا نباشد گنگ است» اکتفا می شود. در مورد ساختار رابطه خوش ترتیبی روی $\mathbb{R}$ در مدل های ZFC وضعیت از ارائه تعریف ایجابی برای اعداد گنگ بهتر است و می دانیم در ZFC قطعاً فرمولی در زبان نظریه مجموعه ها وجود ندارد که معرف یک رابطه خوش ترتیبی روی $\mathbb{R}$ باشد [۱۵]، قضیه ۱۱۰۴. همچنین می دانیم در صورت اضافه شدن اصل «ساختنی بودن مجموعه ها» ^{۴۰} به ZF، علاوه بر اینکه خوش ترتیب شدن $\mathbb{R}$ نتیجه می شود، وجود فرمولی که معرف این رابطه خوش ترتیبی باشد نیز تضمین می شود.

پس از اینکه هیلبرت اثبات فرض پیوستار و اصل خوش ترتیبی را جزو مسائل مهم ریاضیات قرن بیستم معرفی کرد، و از آنجایی که کسی نتوانسته بود یک رابطه خوش ترتیبی ساختنی روی $\mathbb{R}$ ارائه دهد، کونیش ^{۴۴} در سال ۱۹۰۴ در سومین کنگره بین المللی ریاضیدانان، یک سخنرانی برای رد کردن اصل خوش ترتیبی و همچنین فرض پیوستار ارائه کرد که در آن روز خیلی مورد استقبال قرار گرفت اما فقط یک روز بعد از سخنرانی کونینگ، ارنست تسرملو ریاضیدان ۳۳ ساله آلمانی، اشتباهی را در اثبات کونیش در استفاده از یکی از مقالات برنشتاین ^{۴۵} پیدا کرد [۴۴، صفحه ۸۶-۸۸].

^{۳۹} بخش ۴ در مورد استقلال اصل انتخاب (و نیز اصل خوش ترتیبی) از سایر اصول موضوعه نظریه مجموعه ها (یعنی اصول ZF) را ببینید. این استقلال ایجاب می کند که هم بتوان مدلی از ZF ساخت که $\mathbb{R}$ خوش ترتیب شدنی باشد و هم بتوان مدلی از ZF ساخت که روی $\mathbb{R}$ هیچ رابطه خوش ترتیبی موجود نباشد.

^{۴۰} اصل ساختنی بودن مجموعه ها ^{۴۱} یا $V = L$ ^{۴۲} بیان می کند که همه مجموعه ها ساختنی هستند، به این معنی که برای هر مجموعه A فرمولی در زبان نظریه مجموعه ها وجود دارد که معرف A است. به دلیل همین اعمال محدودیت شدیدی که این اصل برای معرفی مجموعه ها دارد، اکثر اهالی نظریه مجموعه ها به این اصل قائل نیستند. این اصل هم اصل خوش ترتیبی و هم فرض پیوستار را نتیجه می دهد.

^{۴۱} axiom of constructibility

^{۴۲} V به جهان فون نویمان مشهور است و به این صورت تعریف می شود که $V_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} V_\beta$ ، به ازای هر عدد ترتیبی α ، $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ و به ازای هر عدد ترتیبی α ، $V_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} V_\beta$.

^{۴۳} جهان ساختنی L یا جهان گودل به این صورت تعریف می شود که $L_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} L_\beta$ عدد ترتیبی α که در آن $L_\alpha = \emptyset$ ، به ازای هر عدد ترتیبی α ، $L_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} L_\beta$ و به ازای هر عدد ترتیبی α ، $L_{\alpha+1} = \text{Def}(L_\alpha) = \{x \in \mathcal{P}(L_\alpha) : x \text{ توسط یک فرمول با پارامتر قابل تعریف است}\}$.

^{۴۴}G. Konig ^{۴۵}F. Bernstein

بسیاری اما استدلال تسرملو را نپذیرفتند و تا مدتی فکر می‌کردند که اثبات کونیش اشکالی ندارد. گرچه شخص کانتور همچنان معتقد بود هم فرض پیوستار و هم اصل خوش‌ترتیبی درست هستند، ولی باز هم برای اطمینان یافتن از صحت ادعای تسرملو در مورد اشتباه کونیش، به همراه هیلبرت، هاسدورف^{۴۶} و شونفلیس^{۴۷} نشست علمی را برای بررسی بیشتر اثبات کونیش برگزار کردند که نتیجه

آن اصلاح اشتباه یکی از مقالات برنشتاین توسط هاسدورف در همان سال بود^{۴۸}. بعد از آن ماجرا هاسدورف بیش از پیش به اینکه واقعاً اصل خوش‌ترتیبی درست است معتقد شد و کانتور نیز اشتباه کونیش را به عنوان دلیل دیگری بر قبول اصل خوش‌ترتیبی مطرح کرد.

سال بعد که مجموعه مقالات سومین کنگره چاپ شد، کونیش اشتباهش را به این صورت اصلاح کرد که اگر نتیجه‌ای که برنشتاین منتشر کرده درست می‌بود، آن‌گاه $\mathbb{R}$ را نمی‌شد خوش‌ترتیب کرد. کونیش عکس این موضوع را نیز نتیجه گرفت و گفت اگر $\mathbb{R}$ خوش‌ترتیب نباشد، آنگاه به ازای هر α $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_\alpha}$. اما او در واقع یک اشتباه دیگر کرده بود. زیرا این‌که به ازای هر α $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_\alpha}$ ، حالتی از سه‌گانگی اعداد اصلی را در بر دارد که می‌گوید هر $\aleph_\alpha$ با $2^{\aleph_\alpha}$ قابل مقایسه است. این موضوع البته بعد از اصل‌بندی اولیه نظریه مجموعه‌ها و در سال ۱۹۱۵ توسط هارتوخس ثابت شد که اگر $\mathbb{R}$ خوش‌ترتیب نباشد، لزوماً به ازای هر α نامساوی $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_\alpha}$ برقرار نیست و در واقع نتیجه‌گیری جدید کونیش نیز نادرست بود [۲۳].

مراجعه‌ای به مقاله کونیش نشان می‌دهد که او حتی از صورتی از اصل انتخاب نیز در اثباتش برای نتیجه‌گیری خوش‌ترتیب نبودن $\mathbb{R}$ از روی نتیجه اشتباه برنشتاین، بهره برده بود [۴۲]. اشتباهات کونیش، بیانگر سوء برداشت او از ارتباط بین اصل انتخاب، سه‌گانگی اعداد اصلی و اصل خوش‌ترتیبی است. کونیش با استفاده از اصل انتخاب نتیجه‌ای می‌گیرد که به اندازه کافی برای اثبات خوش‌ترتیبی $\mathbb{R}$ کفایت نمی‌کند [۴۴، صفحه ۸۶، فرمول ۱۰.۱۲ و ۲۰.۱۲] و سپس با توجه به نتیجه اشتباه برنشتاین به این موضوع می‌رسد که نمی‌توان روی $\mathbb{R}$ یک رابطه خوش‌ترتیبی تعریف نمود. هنگام نتیجه‌گیری عکس این موضوع نیز با فرض این‌که هر $\aleph_\alpha$ با $2^{\aleph_\alpha}$ قابل مقایسه است (که در واقع صورت دیگری از سه‌گانگی اعداد اصلی است که کانتور آن را با اصل خوش‌ترتیبی نتیجه گرفته بود) ثابت می‌کند $\mathbb{R}$ خوش‌ترتیب شدنی نیست. اینکه محقق در سطح کونیش چگونه این سوء برداشت را داشته است، نشان می‌دهد که کار تسرملو در روشن کردن این مفاهیم چقدر قابل توجه بوده است.

تسرملو علاوه بر پیدا کردن اشتباه کونیش، قبلاً نیز نگاه عمیقش به نظریه مجموعه‌ها را نشان داده بود. با توجه به نامه‌ای که از هیلبرت به فرگه^{۴۹} موجود است، تسرملو دو سال قبل از راسل و در سال ۱۸۹۹ به پارادکس راسل پی‌برده بود و آن را با هیلبرت در میان گذاشته بود [۱۸، صفحه ۵۱-۵۲]، [۴۴، صفحه ۸۹]. همچنین در جریان تدریسی که در سال ۱۹۰۱ داشت، تردیدش در مورد سه‌گانگی اعداد اصلی را اظهار کرده بود [۴۴، صفحه ۸۹]. بعد از اینکه تسرملو به اشتباه کونیش در رد اصل خوش‌ترتیبی پی برد، در همان سال ۱۹۰۴ در مقاله‌ای سه صفحه‌ای اصل خوش‌ترتیبی را، با استفاده از صورتی از اصل انتخاب که امروزه آن را با «وجود تابع انتخاب»^{۵۰} می‌شناسند، ثابت کرد [۵۳]، [۵۵، صفحات ۱۱۵ تا ۱۱۸]. تسرملو در انتهای اثباتش می‌گوید با توجه به اثبات اصل خوش‌ترتیبی، عدد اصلی هر مجموعه نامتناهی به صورت یک $\aleph_\alpha$ هست و به علاوه سه‌گانگی اعداد اصلی نیز درست است. او در نهایت اضافه می‌کند که گرچه وجود تابع انتخاب معادل این است که حاصل ضرب دکارتی نامتناهی مجموعه ناتهی، ناتهی است، و ظاهراً نمی‌توان آن را به موضوع منطقی ساده‌تری تحویل کرد، ولی در جاهای مختلفی ریاضیدانان از وجود

^{۴۸} برنشتاین ابتدا ثابت کرده بود که برای هر عدد ترتیبی α ، $\aleph_\alpha \cdot 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$. ولی به گفته تسرملو این اتحاد برای هر عدد ترتیبی α درست نبود و هاسدورف اتحاد را به این صورت اصلاح کرد که به ازای هر دو عدد ترتیبی α و β ، $\aleph_{\alpha+\beta} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta$ [۲۴].
^{۵۰} بخش ۷.۱ در صفحه ۱۰۴ را ببینید.

^{۴۶}F. Hausdorff ^{۴۷}A. M. Schoenflies ^{۴۹}G. Frege

تابع انتخاب بدون هیچ تردیدی استفاده کرده‌اند. به عنوان یک مثال، اعتبار اصل تقسیم‌بندی مجموعه‌ها^{۵۱} به اصل انتخاب می‌باشد.

می‌توان کارهای بسیاری را در ریاضیات قبل از سال ۱۹۰۴ یافت که در آنها از اصل انتخاب استفاده شده است. هنر اصلی تسرملو در روشن ساختن اصل انتخاب بود. در واقع تا قبل از سال ۱۹۰۴ افراد بدون اطلاع از این اصل آن را به کار می‌بردند ولی بعد از ۱۹۰۴ متوجه شدند که از چنین اصلی استفاده نموده‌اند.

شاید به خاطر این که تسرملو اصل تقسیم‌بندی را به عنوان شاهی بر درستی اصل انتخاب ذکر کرده بود، اولین شخصی که در مقابل اصل انتخاب موضع گرفت یک ریاضیدان ایتالیایی به نام لوی^{۵۳} بود. لوی قبلاً در زمان ارائه رساله‌ی دکتری برنشتاین، چون برنشتاین از حالت کلی اصل تقسیم‌بندی (برای هر مجموعه دلخواه M و هر افراز دلخواه آن مثل S) استفاده کرده بود، رساله‌ی دکتری برنشتاین را نیز رد کرده بود [۴۴، صفحه ۷۹].

به زودی در محافل مختلف محلی و ملی در آلمان، ایتالیا، فرانسه، لهستان، انگلستان، هلند و ایالات متحده مباحث بسیار زیاد ریاضی و فلسفی در مورد اصل انتخاب مطرح شدند. تسرملو انتظار مخالفت با اصل انتخاب را داشت ولی هجمه مخالفان در مقابل موافقان به ظاهر بیشتر بود. با مرور زمان و کم‌کم، اما بسیاری از مخالفان از موضع مخالف کوتاه می‌آمدند.

به عنوان مثال در مباحثی که در فرانسه بین بورل^{۵۴}، بئر^{۵۵}، و لبگ^{۵۶} مطرح شد، در ابتدا ریاضیات با اصل انتخاب را ریاضیات ایده‌آل‌گرایان نامیدند و ریاضیات بدون اصل انتخاب را ریاضیات واقع‌گرایان نامیدند. اما بعداً که متوجه شدند اصل انتخاب باعث می‌شود بتوان شمارا بودن اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا را ثابت کرد، دیگر نسبت به مخالفت خود مُصر نبودند. زیرا اگر احیاناً $\mathbb{R}$ را می‌شد با اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا نمایش داد^{۵۷}، آنگاه هم سلسله مراتب مجموعه‌های بورل^{۶۱} بدیهی می‌شد و هم دسته‌بندی بئر از توابع^{۶۲} نیز بدیهی می‌گردید و به علاوه اندازه لبگ دیگر خاصیت جمعی بودن به صورت شمارا^{۶۳} را نمی‌داشت. جریان نسبتاً کاملی از مباحثه‌هایی که بعد از مطرح شدن اصل انتخاب توسط تسرملو بین ریاضیدانان مطرح شده‌اند را می‌توانید در [۴۴، صفحه ۹۲-۱۴۱] ببینید.

بعد از ارائه یک دستگاه اصل موضوعی برای نظریه مجموعه‌ها در سال ۱۹۰۸ توسط تسرملو [۵۴]، علاوه بر جوابگویی به پارادکس‌هایی نظیر پارادکس راسل، بسیاری از مخالفت‌های صریح علیه اصل انتخاب یا به موافقت تبدیل شدند و یا به سوالاتی حل نشده تقلیل یافتند. شاید بتوان گفت به مرور زمان و کم‌کم با کامل‌تر شدن دستگاه اصل موضوعی نظریه مجموعه‌ها و همچنین جواب به سوالاتی که در مورد سازگاری اصل انتخاب با سایر اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها^{۶۴} مطرح بود، اکثریت ریاضیدانان منطق‌گرا^{۶۵} و صورت‌گرا^{۶۶} به ریاضیات و نظریه مجموعه‌های با اصل انتخاب (ZFC) قائل شدند، و ریاضیدانانی که به شهودگرایی^{۶۷} در ریاضیات قائل بودند، به دلیل ماهیت وجودی و غیرساختنی تابع انتخاب، ریاضیات بدون اصل انتخاب (ZF) را پذیرفتند که البته عده خیلی از ریاضیدانان را تشکیل می‌دهند. با این اوصاف، باز هم موقع طرح شدن هر واقعیت جدیدی در ریاضیات،

^{۵۱} اصل تقسیم‌بندی^{۵۲} می‌گوید اگر مجموعه M توسط خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های متمایزش مثل S افراز شود، آنگاه عدد اصلی S کوچکتر یا مساوی عدد اصلی M خواهد بود ($|S| \leq |M|$). کانتور در سال ۱۸۸۳، بورالی-فورتنی در سال ۱۸۹۶ و برنشتاین در سال ۱۹۰۱ از این اصل استفاده کرده بودند که خیلی به زمان کار تسرملو نزدیک بود.

^{۵۲}partition principle

^{۵۷} در سال ۱۹۶۳ فرمن^{۵۸} و لوی^{۵۹} به کمک فورسینگ مدلی از نظریه مجموعه‌های بدون اصل انتخاب ارائه دادند که $\mathbb{R}$ به صورت اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا بود. فورسینگ روشی نیرومند در نظریه مجموعه‌ها است که از آن برای ساختن مدل‌هایی از نظریه مجموعه‌ها با خواص اضافی مطلوب استفاده می‌کنند. روش فورسینگ در سال ۱۹۶۳ توسط کوهن^{۶۰}، ابداع شد.

^{۵۸}S. Feferman

^{۵۹}A. Levy

^{۶۰}P. Cohen

^{۶۴} بخش ۴ که در مورد استقلال اصل انتخاب از اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها (ZF) می‌باشد را ببینید.

^{۵۳}B. Levi ^{۵۴}E. Borel ^{۵۵}R-L Baire ^{۵۶}H. Lebesgue ^{۶۱}hierarchy of Borel sets ^{۶۲}Baire's classification of functions ^{۶۳}countably additive ^{۶۵}logicism ^{۶۶}formalism ^{۶۷}intuitionism

یکی از مهمترین سوالات این است که آن واقعیت با قبول اصل انتخاب (و یا صورت‌های ضعیف‌تر یا قوی‌تر اصل انتخاب) نتیجه گرفته شده و یا بدون قبول اصل انتخاب نتیجه شده است.

۳. اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها و اصل انتخاب

برای اجتناب از بروز پارادکس‌هایی نظیر پارادکس راسل، در سال ۱۹۰۸ تسرملو و راسل تقریباً به صورت هم‌زمان به ترتیب روش اصل موضوعی^{۶۸} [۵۴]، [۵۵]، صفحات ۱۸۹ تا ۲۲۹ و نظریه انواع^{۶۹} [۴۹] را برای مطالعه مجموعه‌ها پیشنهاد کردند. هر دو روش برای اجتناب از پارادکس راسل مناسب بودند ولی با توجه به تعدد ریاضیدانان صورت‌گرا در آن زمان، روش اصل موضوعی تسرملو محبوب‌تر واقع شد.

کانتور برای کار با مجموعه‌ها و به خصوص تعریف مفهوم بی‌نهایت از مفهوم مجموعه به صورت طبیعی آن استفاده کرد. این مفهوم می‌گوید «یک مجموعه، گردایه‌ای از اشیاء است با خاصیت مشخص» و هر شی x داخل یک مجموعه A را عضوی از مجموعه A می‌نامند و می‌نویسند $x \in A$. پس در مورد یک شی x و یک مجموعه A ، حتماً باید یکی از دو حکم $x \in A$ و یا $x \notin A$ درست باشد.

پارادکس راسل، که با الهام گرفتن راسل از روی یکی از مقالات بورالی-فروتی صورت‌بندی شده است، در واقع به دلیل همین تعریف از مجموعه رخ می‌دهد. فرض کنیم A گردایه همه مجموعه‌هایی باشد که با خودشان مساوی هستند. با توجه به تعریف گفته شده برای مجموعه، A یک مجموعه است. اکنون با توجه به این‌که هر شی x داخل A یک مجموعه است، لذا این سوال که « x عضوی از خودش است یا نه؟» سوالی معنی‌دار و دارای جواب «بله» و یا «خیر» می‌باشد. فرض کنید $B = \{x \in A : x \notin x\}$. مجدداً با توجه به تعریف مجموعه، B یک مجموعه است. پس در مورد مجموعه B ، نیز باید سوال «آیا B عضوی از خودش است؟» دارای جواب مشخص بله و یا خیر باشد. اما هم جواب «بله» و هم جواب «خیر» به این سوال منجر به تناقض می‌شود.

- اگر فرض کنیم جواب سوال «بله» باشد، آن‌گاه B مجموعه‌ای است با این خاصیت که متعلق به خودش است. به عبارت دیگر B در خاصیت عضوهای مجموعه B (با توجه به تعریف مجموعه B) صدق نمی‌کند و بنابراین متعلق به مجموعه B نیست. اما این نتیجه با فرض این‌که جواب سوال «بله» است در تناقض است.
- به طور مشابه اگر فرض کنیم جواب سوال «خیر» باشد، آن‌گاه B مجموعه‌ای است با این خاصیت که متعلق به خودش نیست. پس B در خاصیت عضوهای مجموعه B صادق است و بنابراین متعلق به مجموعه B است و این نتیجه با فرض این‌که جواب سوال «خیر» است در تناقض است.

جواب‌های راسل و تسرملو برای حل این مشکل تا حدودی به هم شباهت دارند. راسل می‌گوید که در مباحث ریاضی باید نوع اشیاء مشخص باشد. پس در تعریف مجموعه باید گفته شود «هر گردایه اشیاء از نوع مشخص که دارای خاصیت مشخص هستند را یک مجموعه می‌نامند»^{۷۰}. تسرملو نیز در یکی از اصول موضوعه به نام اصل تصریح در مورد ساختن یک مجموعه به کمک خاصیتی مشخص، تعبیر مشابهی دارد. اصل تصریح می‌گوید اگر A یک مجموعه باشد، آنگاه عناصری از A که دارای خاصیت مشخصی در زبان نظریه مجموعه‌ها باشند نیز یک مجموعه تشکیل می‌دهند. به عبارت دیگر همه عناصر از «نوع عناصر مجموعه A » و با خاصیت مشخص یک مجموعه تشکیل می‌دهند.

^{۷۰} در واقع راسل در معنی‌شناسی زبانی، با فرض اضافی تعیین نوع اشیاء می‌خواهد بگوید که ایهامی در زبان نباید باشد و فهم زبان از روی متن به صورت مستقیم بایستی صورت گیرد. در زبان روزمره وقتی یک شکارچی از شکارچی دیگری می‌پرسد «چیزی هم پیدا میشه؟» منظورش از چیز «شکار» می‌باشد و گفته‌اش ایرادی ندارد در حالی که در هیچ فرهنگ لغتی نگفته‌اند مراد از «چیز» یعنی «شکار». به عقیده راسل در زبان ریاضی باید این ایهام در مفهوم یک چیز را با تعیین نوع آن بر طرف کرد و مثلاً گفت فلان چیز از نوع «شکار» و یا از نوع «فعل» است. به عبارت دیگر راسل می‌گفت به جز معنی‌شناسی، باید مرادشناسی هم موقع بیان گزاره‌ها در نظریه مجموعه‌ها صورت گیرد.

به عبارت دیگر در هر دو دیدگاه، زبان حال عناصر یک مجموعه به این صورت است که اولاً معلوم است از کجا آمده‌اند و ثانیاً معلوم است که چه خاصیتی دارند.

رفع شدن مشکل پارادکس راسل توسط دستگاه اصل موضوعی ارائه شده توسط تسرمولو و اقبال آن زمان ریاضیدانان از مکتب صورت‌گرایی باعث شد افراد زیادی دستگاه اصل موضوعی تسرمولو را بپذیرند. با اصلاحات پیشنهادی فرانکل و اسکولم^{۷۱} برای اصل جایگزینی^{۳۰} در سال ۱۹۲۲ و پیشنهاد فون‌نویمان برای افزودن اصل انتظام^{۳۲} در سال ۱۹۲۵، این دستگاه اصل موضوعی را به اختصار بدون اصل انتخاب با ZF و به همراه اصل انتخاب با ZFC نمایش می‌دهند.^{۷۲} زبان نظریه مجموعه‌ها را معمولاً $L_{set} = \{\in\}$ در نظر می‌گیرند که $\in$ رابطه تعلق نامیده می‌شود و یک محمول^{۳۶} دو موضعی است. اصول موضوعه ZF در منطق مرتبه اول عبارتند از:

- (axiom of empty set) اصل وجود مجموعه تهی: یک مجموعه که شامل هیچ عضوی نیست وجود دارد،
- (axiom of extensionality) اصل گسترش یا تساوی: اگر دو مجموعه X و Y عضوهای یکسانی داشته باشند، با هم مساوی هستند،
- (axiom of pairing) اصل زوجیت: به ازای هر دو مجموعه X و Y ، $\{X, Y\}$ یک مجموعه است،
- (axiom schema of specification (separation)) اصل الگوار تصریح: اگر P خاصیتی با پارامتر p باشد و X یک مجموعه باشد، آنگاه $\{x \in X : P(x, p)\}$ یک مجموعه است،
- (axiom of union) اصل اجتماع: اگر X یک مجموعه باشد، آنگاه اجتماع اعضای X یک مجموعه است که آن را با نماد $\cup X$ نمایش می‌دهند،
- (axiom of power set) اصل مجموعه توانی: اگر X یک مجموعه باشد، مجموعه همه زیرمجموعه‌های X که آن را با $\mathcal{P}(X)$ یا 2^X نمایش می‌دهند، یک مجموعه است،
- (axiom of infinity) اصل وجود مجموعه نامتناهی: یک مجموعه نامتناهی^{۷۵} وجود دارد،
- (axiom schema of replacement) اصل الگوار جایگزینی^{۷۶}: اگر F یک تابع^{۷۷} باشد، آنگاه به ازای هر مجموعه X ، تصویر X تحت F که با $F(X)$ نمایش داده می‌شود یک مجموعه است،
- (axiom of regularity) اصل انتظام^{۷۸}: هر مجموعه ناتهی X یک عنصر مینیمال تحت رابطه تعلق دارد.

اکنون اگر $\mathcal{V} = (V, \in)$ یک ساختار مرتبه اول باشد که مدلی از ZF (ZFC) است، هر عنصر V را یک مجموعه می‌نامند. پس در جهان V از مجموعه‌ها، هر چیزی یک مجموعه است و عضوهای هر مجموعه نیز مجموعه هستند. در عین اینکه خود V که

^{۷۲} دستگاه‌های اصل موضوعی دیگری نیز برای نظریه مجموعه‌ها معرفی شده‌اند ولی اکثر آنها مبتنی بر ZF و یا ZFC هستند. به علاوه دستگاه‌های اصل موضوعی دیگر در شاخه‌های دیگر ریاضیات، کمتر دیده می‌شوند. دو دستگاه اصل موضوعی مشهورتر NBG^{۷۳} و MK^{۷۴} هستند. NBG مجهز به مفهومی عمومی‌تر از مجموعه به نام کلاس است. در NBG گردابه مجموعه‌هایی که توسط یک فرمول با یک سور روی مجموعه‌ها معرفی می‌شوند کلاس نامیده می‌شود. در MK سور علاوه بر اینکه روی مجموعه‌ها می‌تواند بسته می‌شود، می‌تواند روی خود کلاس‌ها نیز بسته شود.

^{۷۳} von Neumann–Bernays–Gödel

^{۷۴} Morse–Kelley

^{۷۵} اصل وجود مجموعه نامتناهی در واقع می‌گوید، یک مجموعه B وجود دارد که شامل $\emptyset$ است و به علاوه به ازای هر $x \in B$ ، تالی x ، یعنی $\{x\} \cup x$ نیز متعلق به B است.
^{۷۶} اصل تصریح و اصل جایگزینی، برای هر خاصیت P و تابع F ذکر شده‌اند و لذا با توجه به توضیحاتی که در بخش ۱.۵.۱ در مورد منطق مرتبه اول و منطق مرتبه اول برای هر خاصیت مشخص P و هر تابع مشخص F باید این اصول جداگانه نوشته شوند و لذا در واقع مشتمل بر نامتناهی اصل می‌باشند. کمله الگوار در صورت این اصول هم به همین واقعیت اشاره دارد. البته اصل تصریح از روی اصل جایگزینی قابل اثبات است. در عین حال از آنجا که اصل تصریح در جاهای مختلفی از ریاضیات ظهور می‌یابد ولی اصل جایگزینی بیشتر در خود نظریه مجموعه‌ها کاربرد دارد، لذا اصل تصریح را نیز ذکر می‌کنند. یکی از کاربردهای اصل جایگزینی، اثبات وجود اعداد ترتیبی حدی بزرگتر از ω است.

^{۷۷} اگر جهان شامل همه مجموعه‌ها را V بنامیم، منظور از یک تابع، رابطه‌ای است مثل $F \subseteq V \times V$ که خواص تابع را دارد.

^{۷۸} کاربردهای اصل انتظام صرفاً برای خود نظریه مجموعه‌ها می‌باشد و در شاخه‌های دیگر ریاضی ظهور چندانی ندارد. یکی از نتایج اولیه این اصل این است که اگر $x_1, x_2, \dots$ عناصر یک مجموعه باشند، آنگاه دنباله‌ای به صورت $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \dots$ ظاهر نخواهد شد. همچنین اصل انتظام با اصل زوجیت نتیجه می‌دهند که به ازای هر مجموعه x ، $x \notin x$.

^{۷۱} T. Skolem

مشمتمل بر همه مجموعه‌ها است، با توجه به استدلالی شبیه پارادکس راسل دیگر یک مجموعه متعلق به این جهان V از مجموعه‌ها نمی‌باشد. چون به ازای هر پارامتر p و فرمول $\varphi(x, p)$ ، گردایه $\{x : \varphi(x, p)\}$ را یک کلاس می‌نامند، پس $V = \{x : x = x\}$ نیز یک کلاس است. اصل انتخاب به صورت زیر است:

• (axiom of choice, AC) هر مجموعه از مجموعه‌های ناتهی دارای یک تابع انتخاب است.

فرض کنید X یک مجموعه مشتمل بر مجموعه‌های ناتهی باشد. اصل انتخاب می‌گوید که تابعی مثل $f : X \rightarrow \cup X$ وجود دارد که به ازای هر مجموعه A از X ، $f(A) \in A$ ، تابع f را تابع انتخاب می‌نامند و تصویر X تحت f که طبق اصل جایگزینی یک مجموعه است را مجموعه انتخاب می‌نامند. توجه دارید که مجموعه انتخاب زیر مجموعه $\cup X$ و لذا عضوی از $\mathcal{P}(\cup X)$ است اما بدون اصل انتخاب لزوماً یک مجموعه نیست (در واقع معلوم است عناصرش از کجا آمده‌اند ولی خواص آنها معلوم نیست). پس وجود تابع انتخاب، به نوعی بیانگر خواص عناصر مجموعه انتخاب است.

اگر X مجموعه‌ای از مجموعه‌های ناتهی جدا از هم به صورت $X = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ باشد و f یک تابع انتخاب برای مجموعه X باشد، آنگاه مجموعه انتخاب $Y = f(X)$ دارای این خاصیت است که دقیقاً یک عضو از هر A_α در Y قرار دارد. و البته به وضوح وجود مجموعه Y با این خاصیت که دقیقاً یک عضو از هر A_α در آن باشد، وجود یک تابع انتخاب برای X را نتیجه می‌دهد. توجه دارید که اصل انتخاب وجودی است و بنابراین وجود مجموعه Y را تضمین می‌کند ولی در مورد ساختار مجموعه Y چیزی برای گفتن ندارد.

بعضی اوقات البته نیازی به اصل انتخاب نیست. مثلاً وقتی X متناهی باشد، وجود تابع انتخاب نیازی به اصل انتخاب ندارد. فرض کنید $X = \{A_i\}_{i=1}^n$ که A_i ها ناتهی هستند. پس در هر A_i عضوی مثل a_i وجود دارد و با توجه به اصل زوجیت $\{a_i\}$ ها مجموعه هستند. مجدداً اصل زوجیت^{۷۹} در کنار اصل اجتماع ایجاب می‌کنند که $Y = \cup_{i=1}^n \{a_i\}$ نیز یک مجموعه باشد. پس وجود مجموعه انتخاب در حالتی که تعداد عناصر X متناهی باشد، نیازی به اصل انتخاب ندارد. حالت ساده‌تر این موضوع، وقتی است که X تک عضوی و فقط شامل یک مجموعه ناتهی A باشد. در این حالت اصل انتخاب فقط در مورد وجود یک عنصر a در A صحبت می‌کند که موضوعی کاملاً بدیهی است. توجه دارید که برای مجموعه متناهی و یا تک عضوی X ، فقط وجود مجموعه Y توسط ZF ثابت می‌شود ولی در مورد اینکه عناصر مجموعه Y چگونه از هر عنصر X انتخاب شده‌اند نه ZF و نه ZFC چیزی بیان نمی‌کنند.^{۸۰}

یکی دیگر از حالت‌هایی که در آن نیاز به اصل انتخاب نداریم، وقتی است که وجود یک رابطه یا تابع روی هر یک از عناصر X مثل A_α ، امکان انتخاب عضوی مشخص از A_α را بدهد. در این حالت خاصیت اعضای مجموعه انتخاب مشخص خواهد بود و چون همه این اعضا از $\cup X$ می‌آیند با توجه به اصل اجتماع و اصل تصریح مجموعه انتخاب یک مجموعه است و نیازی به اصل انتخاب نیست. مثلاً اگر $X = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک مجموعه مشتمل بر مجموعه‌های ناتهی A_α باشد و به علاوه روی هر A_α رابطه ترتیبی مثل $\leq_\alpha$ موجود باشد که $(A_\alpha, \leq_\alpha)$ دارای بزرگترین عضو باشد، آنگاه

$$Y = \{a \in \cup_{\alpha \in I} A_\alpha : \forall x (x \in A_\alpha \rightarrow x \leq_\alpha a)\}$$

با توجه به اصل اجتماع و تصریح یک مجموعه است. به عنوان یک مثال دیگر، اگر عضوهای مجموعه X به صورت بازه‌های (a_i, b_i) از اعداد حقیقی باشند، آنگاه گردایه همه $(a_i + b_i)/2$ ها از دید ZF یک مجموعه است و نیازی به استفاده از اصل انتخاب

^{۷۹} اگر A و B دو مجموعه باشند، طبق اصل زوجیت $\{A, B\}$ یک مجموعه است و لذا طبق اصل اجتماع $A \cup B$ یک مجموعه است.
^{۸۰} بحثی به صورت داستان‌وار در همین مورد در [۱] مطرح شده است. به خصوص می‌توانید به صفحات ۴۱ تا ۴۳ مرجع [۱] در مورد انتخاب عناصر از یک مجموعه ناتهی مراجعه کنید.

نیست. راسل نیز مثالی برای فهم بهتر اصل انتخاب به این صورت ارائه کرده است که «اگر بخواهیم از بی‌نهایت جفت جوراب، از هر جفت دقیقاً یک لنگه جوراب برداریم نیاز به اصل انتخاب داریم ولی در مورد بی‌نهایت جفت کفش، دیگر اصل انتخاب لازم نیست» که در واقع می‌خواهد بگوید همین‌که در کفش‌ها امکان برگزیدن کفش راست یا چپ به‌عنوان خاصیت وجود دارد، دیگر نیاز به اصل انتخاب را مرتفع می‌کند. توجه کنید که در مثال‌های مطرح شده، خاصیت عناصر مجموعه انتخابی که وجود آن نیاز به اصل انتخاب ندارد باید توسط یک فرمول در زبان L_{set} قابل بیان باشد.

۴. استقلال اصل انتخاب از ZF

بدیهی به نظر رسیدن بعضی از معادل‌های اصل انتخاب مثل ناتهی بودن حاصل ضرب دکارتی دلخواه از مجموعه‌های ناتهی، در کنار متناقض بودن بعضی از نتایج این اصل مانند وجود یک رابطه خوش‌ترتیبی روی $\mathbb{R}$ باعث شد که پژوهشگران زیادی به دنبال تعیین تکلیف این اصل به لحاظ اثبات یا ابطال و با استفاده از سایر اصول نظریه مجموعه‌ها و به‌خصوص اصول ZF باشند. این موضع‌گیری البته تا قبل از سال ۱۹۰۸ با توجه به وجود مسائلی شبیه پارادکس راسل به تمام نظریه مجموعه‌ها برمی‌گشت. در این بین حتی جملاتی به بعضی از بزرگان ریاضیات نیز منصوب شده است، مثلاً هیلبرت در دفاع از مکتب صورت‌گرایی در ریاضیات در مقابل شهودگرایی براوئر^{۸۱} می‌گوید «هیچ کس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور برای ما آفریده است، خارج کند» [۲۹]. در جبهه مخالفین، پوانکاره^{۸۲} که سرآمد ریاضیدانان آن زمان فرانسه بوده است، در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در سال ۱۹۰۸ می‌گوید «نظریه مجموعه‌ها مرضی است که ریاضیات از دست آن خلاص خواهد شد» [۴۱، صفحه ۱۰۰۳]، که البته این جمله در مجموعه مقالات کنفرانس ذکر نشده و با توجه به مکتوب نبودن نقل قول مذکور، به عقیده بسیاری از اهالی ریاضیات، این جمله واقعیت چیزی که پوانکاره اظهار کرده است نمی‌باشد [۲۱].

ارائه اصل‌بندی تسرمولو برای نظریه مجموعه‌ها در سال ۱۹۰۸ و حل شدن مشکل پارادکس راسل، تا حدودی پایه‌های نظریه مجموعه‌ها را مستحکم کرد. ولی هنوز خیلی‌ها اصل انتخاب را به‌عنوان یکی از اصول نظریه مجموعه‌ها قبول نداشتند و بعضی به دنبال اثباتی برای آن بودند و محدود افرادی نیز برای ابطال آن تلاش می‌کردند. در سال ۱۹۱۸ یک پژوهشگاه تحقیقات ریاضیات در لهستان به سرپرستی سرپینسکی^{۸۳}، تحقیقات مدون و دقیقی را حول اصل انتخاب برنامه‌ریزی کرد. ظرف چند سال، لهستانی‌ها ارتباط تنگاتنگی بین اصل انتخاب و خیلی از شاخه‌های دیگر ریاضیات پیدا کردند [۴۴، صفحات ۱۹۷-۲۰۹]. تارسکی^{۸۴}، در همین دوره نشان داد که حتی برای اینکه بتوانیم نشان دهیم دو تعریف متداول مجموعه متناهی که در بخش ۳.۱ معرفی شدند، با هم معادل هستند، نیازمند اصل انتخاب هستیم [۵۱، صفحه ۴۸-۴۹]. علیرغم پیدا نشدن هیچ اثباتی برای اصل انتخاب از روی ZF تا سال ۱۹۳۸، کاربردهای زیادی از این اصل در آنالیز، توپولوژی، جبر، جبرخطی، جبر بول و منطق پیدا شدند که نشان می‌دادند عدم قبول این اصل، محدودیت‌های زیادی را بر شاخه‌های مختلف ریاضی تحمیل خواهد کرد.

بالاخره در سال ۱۹۳۸ گودل نشان داد اگر ZF سازگار باشد و مدلی مثل $\mathfrak{M}$ داشته باشد، آنگاه جهان مجموعه‌های ساختنی L ^{۸۵} یک مدل داخلی $\mathfrak{M}$ است^{۸۶} و در L هم اصل انتخاب و هم فرض پیوستار درست می‌باشد [۱۹]. به عبارت دیگر گودل با فرض سازگار بودن ZF نه تنها نشان داد ZFC سازگار است، بلکه نشان داد ZF با فرض پیوستار نیز سازگار است.

^{۸۵} جهان مجموعه‌های ساختنی که به جهان گودل نیز معروف است در پاروقی^{۸۳} در صفحه ۱۰۷ معرفی شد.
^{۸۶} اگر یک تنوری مثل ZF دارای مدلی مثل $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه یک مدل داخلی $\mathfrak{M}$ زیرساختاری از $\mathfrak{M}$ مثل $\mathfrak{N}$ است که اولاً تعبیر رابطه تعلق در $\mathfrak{N}$ همان تعبیر تعلق در $\mathfrak{M}$ است، ثانیاً $\mathfrak{N}$ نیز مدلی از تنوری اولیه (در اینجا ZF) است، ثالثاً دامنه مدل $\mathfrak{N}$ که آن را با N نشان می‌دهیم یک کلاس متعدی است به این معنی که اگر $A \in N$ و $X \in A$ ، آنگاه $X \in N$ ، و رابعاً N شامل همه اعداد ترتیبی است که در دامنه مدل $\mathfrak{M}$ هستند.

⁸¹L. E. J. Brouwer ⁸²H. Poincare ⁸³W. Sierpinski ⁸⁴A. Tarski

کارگودل در واقع نشان می‌داد ZF نقیض اصل انتخاب را نتیجه نمی‌دهد. اما هنوز معلوم نبود که ZF در مورد خود اصل انتخاب چه تصمیمی می‌گیرد. در واقع سوال این بود که آیا ZF قادر است خود اصل انتخاب را ثابت کند و یا نه؟ حدس بر این بود که ZF خود اصل انتخاب را هم ثابت نمی‌کند، اما تمامی تلاش‌ها برای ارائه مدلی از ZF که در آن مدل، اصل انتخاب درست نباشد با شکست مواجه می‌شدند. بالاخره در سال ۱۹۶۳ پل کوهن، با ابداع روش جدیدی به نام فورسینگ^{۸۷}، با مفروض بودن یک مدل $\mathfrak{M}$ برای ZF توانست مدلی از ZF ارائه دهد که در آن اصل انتخاب برقرار نیست [۱۳]. کارهای کوهن و گودل در اثبات این مسئله که نه خود اصل انتخاب و نه نقیض آن از روی ZF قابل اثبات نیستند، هنوز نیز جزو بزرگترین پیشرفت‌ها در حوزه نظریه مجموعه‌ها به حساب می‌آیند.

۵. بعضی از معادل‌های اصل انتخاب

از آنجایی که تا سال‌ها بعد از مطرح شدن اصل انتخاب، فهم این اصل در بین خیلی از ریاضیدانان با سوء برداشت‌هایی همراه بود، معادل‌های منطقی مختلفی برای اصل انتخاب توسط محققین ارائه شده‌اند که زوایای مختلف اصل انتخاب را واضح‌تر می‌کنند. مجموعه‌ای نسبتاً کامل از نتایج معادل با اصل انتخاب که تا سال ۱۹۸۵ به دست آمده‌اند در [۴۸] جمع‌آوری شده‌اند. در این بخش برخی از مشهورترین معادل‌های اصل انتخاب که بیشتر در حوزه خود نظریه مجموعه‌ها هستند را بیان می‌کنیم.

۱.۵. (AC) یا (AC₁) وجود تابع انتخاب. برای اولین بار در سال ۱۹۰۴، تسرملو به این صورت اصل انتخاب را معرفی می‌کند: «به ازای هر مجموعه ناتهی M ، به هر عضو ناتهی M' از M ، عضوی مثل $m' \in M'$ را می‌توان نسبت داد». این انتساب عضو را می‌توان به وجود یک تابع انتخاب تعبیر نمود «به ازای هر خانواده M از مجموعه‌های ناتهی، تابع انتخابی مثل f از M به UM وجود دارد به طوری که به ازای هر عضو $M' \in M$ ، $f(M') \in M'$ ». این موضوع را اینگونه نیز می‌توان بیان کرد که به ازای هر تابع $g: I \rightarrow M$ ، تابعی مثل $f: I \rightarrow UM$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $i \in I$ ، چنانچه $g(i) \neq \emptyset$ ، $f(i) \in g(i)$. توجه دارید که اصل انتخاب فقط در مورد وجود تابع انتخاب صحبت می‌کند و از ساختار این تابع چیزی نمی‌گوید.

۲.۵. (AC₂) حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌های ناتهی. بدون استفاده از اصل انتخاب می‌توان نشان داد حاصل ضرب دکارتی n مجموعه ناتهی، یک مجموعه ناتهی است. اما برای خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های ناتهی $M = \{A_i\}_{i \in I}$ اگر فرض کنیم $f: M \rightarrow UM$ تابع انتخابی باشد که اصل انتخاب وجود آن را نتیجه می‌دهد، آنگاه با توجه به اینکه می‌توان f را به عنوان تابعی از I به UM قلمداد کرد که به هر i عنصری از A_i منسوب می‌کند، پس $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. البته وجود تابع انتخاب برای مجموعه $M = \{A_i\}_{i \in I}$ مشتمل بر مجموعه‌های ناتهی A_i نیز از اینکه $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ نتیجه می‌شود.

۳.۵. (AC₃) وجود مجموعه انتخاب. اگر $M = \{A_i\}_{i \in I}$ مجموعه‌ای مشتمل بر مجموعه‌های ناتهی جدا از هم باشد، آنگاه مجموعه‌ای مثل C_M وجود دارد که به ازای هر $i \in I$ یک و فقط یک عضو از هر $A_i \in M$ در C_M قرار دارد. در واقع اگر $C_M = f(I)$ تابع انتخاب باشد، آنگاه $f: I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i$.

۴.۵. (AC₄) وجود معکوس برای توابع. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد، آنگاه تابعی مثل $g: f(X) \rightarrow X$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $y \in f(X)$ ، $f(g(y)) = y$. در واقع اگر رابطه هم‌ارزی $\sim$ روی اعضای X به صورت « $a \sim b$ اگر و فقط اگر $f(a) = f(b)$ » تعریف شود، و X' مجموعه انتخابی باشد که از کلاس‌های هم‌ارزی رابطه $\sim$ به دست می‌آید، آنگاه تحدید f به X' یک تابع یک‌به‌یک خواهد بود که معکوس f' تابع g را ارائه خواهد کرد. وجود تابع g نیز البته وجود تابع انتخاب را نتیجه می‌دهد. برای مشاهده جزئیات می‌توانید [۴۸]، قضیه ۵.۲ و ۶.۲ و [۳۰۲] را ببینید.

^{۸۷} پاورقی ۵۷ در صفحه ۱۰۹ را نیز ببینید.

۵.۵. (WE) یا (WE₁) اصل خوش‌ترتیبی. یکی از اولین معادل‌های اصل انتخاب، و یکی از عواملی که باعث شده است تسرملو بتواند به اصل انتخاب پی ببرد، اصل خوش‌ترتیبی است. اصل خوش‌ترتیبی می‌گوید هر مجموعه خوش‌ترتیب شدنی است. یعنی روی هر مجموعه X رابطه ترتیبی خطی وجود دارد که هر زیرمجموعه X تحت آن رابطه، دارای کوچکترین عنصر می‌باشد. معادل بودن اصل انتخاب با اصل خوش‌ترتیبی در بازه سال‌های ۱۹۰۴ تا ۱۹۰۷ ثابت شد. البته همین معادل بودن اصل انتخاب با اصل خوش‌ترتیبی و عدم پیدا شدن یک رابطه خوش‌ترتیبی روی اعداد حقیقی باعث بعضی از مخالفت‌ها با قبول اصل انتخاب شد.

۶.۵. (WE₂) تعریف اعداد اصلی به کمک اعداد ترتیبی. به ازای هر مجموعه X یک عدد ترتیبی α وجود دارد که X هم‌توان با α است. واضح است که (WE₁) از روی (WE₂) نتیجه می‌شود. از طرفی چون فرض (WE₁)، (AC₁) را نتیجه می‌دهد، لذا چنانچه f یک تابع انتخاب روی مجموعه X باشد، رابطه ترتیبی روی X را با در نظر گرفتن $a = f(X)$ به‌عنوان اولین عنصر، $b = f(X - \{a\})$ به‌عنوان دومین عنصر و ... تعریف می‌کنیم که (WE₂) را نتیجه خواهد داد. جزئیات را می‌توانید در [۴۸، قضیه ۸.۲] یا [۲۰، قضیه ۷.۷] ببینید.

با کمک (WE₂) می‌توان مفهوم عدد اصلی را به این شکل تعریف کرد که «عدد اصلی مجموعه X کوچکترین عدد ترتیبی α ای است که هم‌توان X است». در این صورت یک عدد اصلی، یک مجموعه است. این در حالی است که با تعریف اولیه مفهوم عدد اصلی که در بخش ۱۰.۱ صفحه ۱۰۵ ذکر شد، یک عدد اصلی لزوماً یک مجموعه نیست. وضعیت اعداد اصلی بدون مفروض بودن اصل انتخاب در [۳۵، فصل ۱۱] به‌خوبی توصیف شده است.

۷.۵. (WE₃) خوش‌ترتیب شدن مجموعه توانی. در سال ۱۹۶۳ یکی دیگر از معادل‌های اصل انتخاب توسط روبین^{۸۸}، به این صورت معرفی گردید که «مجموعه توانی هر مجموعه خوش‌ترتیب، خوش‌ترتیب شدنی است» [۴۸، قضیه ۲۱.۷].

۸.۵. (T) سه‌گانگی اعداد اصلی. به ازای هر دو مجموعه X و Y ، یا X هم‌توان زیرمجموعه‌ای از Y است و یا Y هم‌توان زیرمجموعه‌ای از X است. به‌وضوح با توجه به تعریف رابطه ترتیبی روی اعداد اصلی که در بخش ۱۰.۱ گفته شد، این موضوع معادل این است که به ازای هر دو عدد اصلی a و b ، یا $a < b$ و یا $a = b$ و یا $b < a$. سه‌گانگی اعداد اصلی در سال ۱۹۱۵ توسط هارتوخنس ثابت شد [۲۳].

۹.۵. (M₁) لم تسورن (زرن). یکی دیگر از مشهورترین معادل‌های اصل انتخاب، لم تسورن^{۸۹} است. لم تسورن را می‌توان در دسته اصل‌هایی که به اصل بیشین مشهور هستند، دسته‌بندی کرد. اولین اصل بیشین توسط هاسدورف در سال ۱۹۰۹ (و البته بدون هیچ اشاره‌ای به واژه بیشین) ارائه شد [۲۵]. برای بهبود بخشیدن کار هاسدورف، یک ریاضیدان جوان لهستانی به نام کوراتفسکی^{۹۰} در سال ۱۹۲۲ اصل بیشین هاسدورف را تعمیم می‌دهد و به‌علاوه یک اصل کمین متناظر نیز ارائه می‌دهد [۴۳]. هاسدورف در سال ۱۹۲۷ بدون اطلاع از نتیجه ارائه شده توسط کوراتفسکی، نتیجه قبلی‌اش را (این دفعه با واژه بیشین) و با یک فرمول‌بندی بهتر به همراه یک اصل کمین در ویرایش دوم کتاب «نظریه مجموعه‌ها» بیان می‌کند [۲۶]. در سال ۱۹۳۵ ماکس تسورن^{۹۱} بدون اطلاع دقیق از کارهای هاسدورف و کوراتفسکی، یک اصل بیشین خیلی شبیه به آنچه کوراتفسکی ارائه کرده بود را به‌همراه چند کاربرد خیلی جذاب از آن اصل در جبر ارائه می‌کند [۵۶]. تسورن در انتهای مقاله‌اش، به معادل بودن اصل بیشینی که ارائه کرده است با اصل خوش‌ترتیبی و اصل انتخاب اشاره می‌کند. با توجه به کاربردهای مطرح شده توسط تسورن، اصل‌های بیشین معادل لم تسورن را با عنایت به کاربردهایشان در جبر و آنالیز و توپولوژی معمولاً با نام لم تسورن می‌شناسند.

⁸⁸H. Rubin ⁸⁹Zorn lemma ⁹⁰K. Kuratowski (C. Kuratowski) ⁹¹M. Zorn

لم تسورن می‌گوید «اگر $M = \{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و به ازای هر زنجیر^{۹۲} $\{B_j\}_{j \in J}$ داخل M ، $\bigcup_{j \in J} B_j$ داخل M باشد، آنگاه M دارای یک عضو بیشین^{۹۴} مانند C است».

۱۰.۵. (M۲) اصل‌های بیشین دیگر. چند مورد از مشهورترین اصول بیشین معادل لم تسورن به شرح زیر هستند.

- اگر $(A, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه هر زیرمجموعه مرتب خطی آن مثل $(B, \leq)$ مشمول در یک زیر مجموعه مرتب خطی بیشین از A خواهد بود،
- هر مجموعه مرتب جزئی دارای یک زیر مجموعه مرتب خطی بیشین است،
- به ازای هر مجموعه دلخواه A و هر خاصیت $\varphi(x)$ از مشخصه متناهی^{۹۵}، زیرمجموعه بیشینی از A مثل M وجود دارد که $\varphi(M)$ درست است.

فهرست کامل‌تری از اصل‌های بیشین معادل اصل انتخاب را می‌توانید در [۴۸، بخش ۵] ببینید.

۱۱.۵. معادل‌های اصل انتخاب در حساب اعداد اصلی. علاوه بر معادل بودن سه‌گانگی اعداد اصلی با اصل انتخاب که توسط هارتوخنس ثابت شد [۲۳]، بعضی از قواعد دیگری که در حساب اعداد اصلی نامتناهی مورد استفاده قرار می‌گیرند، معادل با اصل انتخاب هستند. اولین نتایج در این موضوع که توسط تارسکی در سال ۱۹۲۴ ارائه شدند به شرح زیر هستند [۵۱].

- به ازای هر دو عدد اصلی نامتناهی a و b ، $a + b = a.b$.
- به ازای هر عدد اصلی نامتناهی a ، $a^2 = a$.
- به ازای هر سه عدد اصلی a و b و c ، $a.c < a.b$ ایجاب می‌کند $c < b$.

برای دیدن نتایج بسیار دیگری که در حساب اعداد اصلی معادل با اصل انتخاب هستند می‌توانید به [۴۸، بخش ۶ و ۷] مراجعه کنید.

۶. بعضی از نتایج اصل انتخاب

مشابه با معادل‌های اصل انتخاب، نتایج حاصل از پذیرش اصل انتخاب نیز بسیار زیاد و متنوع هستند. مجموعه نسبتاً کاملی از نتایج اصل انتخاب در [۳۲] گردآوری شده است. در این بخش اشاره‌ای خواهیم داشت به برخی از نتایج حاصل از پذیرش اصل انتخاب در شاخه‌های مختلف ریاضی. در مورد خیلی از نتایج اصل انتخاب، یکی از سوالات مهم این است که آیا آن نتیجه معادل اصل انتخاب است و یا از گزاره‌های ضعیف‌تری از اصل انتخاب نیز ممکن است نتیجه شود. در نتایجی از اصل انتخاب که در اینجا ذکر کرده‌ایم، مسئله معادل بودن آنها با اصل انتخاب را نیز تا حدی مشخص کرده‌ایم. البته در مورد ارتباط اصل انتخاب با هر یک از نتایجی که ذکر شده است، میزان تحقیقات آنچنان زیاد و متنوع است که می‌توان برای هر یک از نتایج ذکر شده یک مقاله مروری مفصل نوشت. تمام نتایجی که در ذیل آمده‌اند مستقل از ZF هستند و برای اثبات آنها یا اصل انتخاب و یا صورت‌های ضعیف‌تری از اصل انتخاب لازم است.

^{۹۲} یک خانواده N از مجموعه‌ها را یک زنجیر^{۹۳} می‌نامند هرگاه تحت رابطه زیرمجموعه بودن، مرتب خطی باشد. یعنی به ازای هر $A, B \in N$ ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$.

^{۹۳}chain

^{۹۴} برای یک خانواده N از مجموعه‌ها، $C \in N$ را بیشین می‌نامند هرگاه C زیرمجموعه سره هیچ عضوی از N نباشد.

^{۹۵} خاصیت $\varphi(x)$ با یک متغیر x که x مجموعه است را از مشخصه متناهی می‌گویند هرگاه اولاً $\varphi(\emptyset)$ درست باشد و ثانیاً به ازای هر مجموعه X ، $\varphi(X)$ درست باشد اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه متناهی F از X ، $\varphi(F)$ درست باشد.

۱.۶. نظریه مجموعه‌ها.

- (OP) ^{۹۶} روی هر مجموعه X یک رابطه ترتیبی خطی وجود دارد.
 - (ACF) برای هر مجموعه X از مجموعه‌های ناتهی متناهی، یک تابع انتخاب وجود دارد. این موضوع را این‌گونه نیز می‌توان گفت که به ازای هر مجموعه X ، تابعی وجود دارد که به هر زیرمجموعه ناتهی متناهی A از X یک عضو $a \in A$ را نسبت می‌دهد.
 - (C_n) فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد. برای هر مجموعه X از مجموعه‌های ناتهی n عضوی، یک تابع انتخاب وجود دارد.
 - (P₂) هر مجموعه نامتناهی X را می‌توان به دو زیرمجموعه نامتناهی افراز کرد. یعنی دو زیرمجموعه نامتناهی A و B از X وجود دارند که $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = X$.
 - (DC) ^{۹۷} به ازای هر مجموعه X و هر رابطه R روی X که دامنه آن تمام X باشد، دنباله‌ای مثل $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n R x_{n+1}$.
 - (ACC) ^{۹۸} برای هر مجموعه شمارا از مجموعه‌های ناتهی، یک تابع انتخاب وجود دارد.
- فرض کنیم $\psi \rightarrow \varphi$ به این معنی است که درستی گزاره φ درستی گزاره ψ را نتیجه می‌دهد و به‌علاوه برعکس آن برقرار نیست. در این‌صورت قضایای زیر را در مورد صورت‌های ضعیف‌تر اصل انتخاب می‌توان بیان کرد [۱۴، ۲۸، ۳۵]:
- $$AC \rightarrow OP \rightarrow ACF \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}, C_n \rightarrow C_n \rightarrow P_2,$$
- $$AC \rightarrow DC \rightarrow ACC.$$

شمارا بودن اجتماع شمارا از مجموعه‌های شمارا از نتایج ACC است که از AC ضعیف‌تر می‌باشد. همین‌طور معادل بودن دو مفهوم متناهی و ددکیند متناهی که در بخش ۳.۱ آمده‌اند نیز از نتایج DC است [۲۸، فصل ۲ و ۳].

۲.۶. جبر و جبر خطی.

- اگر p یک عدد اول باشد، آن‌گاه هر گروه G دارای یک p -زیرگروه بیشین است (معادل AC است [۳۴]).
- به ازای هر گروه آبلی G از مرتبه بزرگتر یا مساوی ۳ و هر زیرگروه بخش‌پذیر H از G از مرتبه G ، زیرگروهی مثل F از G وجود دارد که $F \cup H = F \cap H = \{0\}$ و $F \cup H$ گروه G را تولید می‌کند (معادل AC است [۴۰]).
- هر ایده‌آل سره از یک مشبکه ^{۹۹} با عضو یکه، مشمول در یک ایده‌آل بیشین است (معادل AC است [۵۰]).
- (NS) قضیه نیلسون-شرایر ^{۱۰۰}: اگر G یک گروه آزاد باشد، آن‌گاه هر زیرگروه G نیز آزاد خواهد بود (معادل بودن با AC هنوز ثابت نشده است [۳۱]).
- گروه‌های جمعی $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{C}, +)$ یکرخت هستند [۳] (از AC ضعیف‌تر است. در واقع این مطلب از اینکه روی مجموعه اعداد حقیقی یک رابطه خوش‌ترتیبی وجود دارد نتیجه می‌شود [۹] و این نتیجه اخیر اکیداً ضعیف‌تر از AC است [۳۲]).
- هر میدان دارای یک بستر جبری منحصر بفرد است [۲، صفحات ۱۱-۱۲] (معادل AC نیست و در واقع ضعیف‌تر از AC است [۴]).
- هر حلقه جابجایی با ۱ دارای ایده‌آل بیشین است [۲، صفحات ۳-۴] (معادل AC است [۳۰]).
- هر فضای برداری دارای پایه است (معادل AC است [۷]).

⁹⁶ordering principle ⁹⁷dependent choice ⁹⁸countable choice ⁹⁹lattice ¹⁰⁰Nielsen-Schreier theorem

- (BPI) هر جبر بول دارای ایده‌آل اول است. (ضعیف‌تر از AC است [۲۲]). در عین حال ACF را نتیجه می‌دهد ولی DC از روی آن نتیجه نمی‌شوند [۳۳]. معمولاً BPI را به‌عنوان یکی از نگارش‌های ضعیف AC و حتی به‌عنوان یکی از اصول نظریه مجموعه‌ها در نظر می‌گیرند.

۳.۶. آنالیز ریاضی و توپولوژی.

- در یک فضای متریک، هر تابع حقیقی مقدار به‌طور دنباله‌ای پیوسته، پیوسته است [۸] (معادل ACC است).
- قضیه تیخونوف^{۱۰۱}: حاصل ضرب دکارتی هر خانواده از فضاها با توپولوژی فشرده با توپولوژی حاصل ضربی فشرده است (معادل AC است [۳۹]).
- قضیه هاینه-بورل^{۱۰۲}: برای $A \subseteq \mathbb{R}$ دو حکم "بسته و کراندار بودن A" و "فشرده بودن A" معادل هستند (از نتایج ACC است [۳۵، صفحه ۲۱]).
- اگر X یک فضای نرم‌دار روی اعداد حقیقی باشد، آنگاه گوی یک روی دوگان X دارای نقاط گوشه‌ای^{۱۰۳} است (معادل AC است).
- (KM) قضیه کرین-میلن^{۱۰۵}: فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک موضعاً محدب و K یک زیرمجموعه محدب فشرده از X باشد. در این صورت K دارای نقاط گوشه‌ای است. به‌علاوه پوش محدب بسته^{۱۰۶} تولید شده توسط نقاط گوشه‌ای K برابر خود K می‌باشد (یعنی K توسط نقاط انتهایی‌اش مشخص می‌شود) [۴۷، صفحه ۱۷۷]. (معلوم نیست که معادل AC است و یا نه. در عین حال KM و BPI با هم AC را نتیجه می‌دهند [۵].)
- قضیه رسته‌ای بئر^{۱۰۸}: هر فضای متریک کامل^{۱۰۹} مثل M یک فضای بئر است، یعنی اشتراک هر خانواده شمارا از زیرمجموعه‌های چگال در M ، در M چگال است. (از AC ضعیف‌تر است ولی معادل DC می‌باشد [۶].)
- قضیه گسترش تیتسه^{۱۱۰}: اگر X یک فضای توپولوژیک نرمال و A زیرمجموعه بسته‌ای از X باشد، آنگاه هر تابع پیوسته $f: A \rightarrow [0, 1]$ را می‌توان به یک تابع پیوسته $\bar{f}: X \rightarrow [0, 1]$ تعمیم داد. (از روی DC بدست می‌آید [۳۲، فرم ۳۵۷]). لم اوریسون^{۱۱۱} که از روی قضیه گسترش تیتسه ثابت می‌شود از دیگر نتایج اصل انتخاب در آنالیز و توپولوژی می‌باشد.
- قضیه نگاشت باز^{۱۱۲}: اگر $f: X \rightarrow Y$ یک تابع خطی پیوسته از فضای باناخ X بتوی فضای باناخ Y باشد، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه باز A از X ، $f(A)$ یک زیرمجموعه باز Y است. (با توجه به اینکه به کمک قضیه رسته‌ای بئر ثابت می‌شود، پس از AC ضعیف‌تر است. به‌تازگی اثبات شده است که ACC نیز قضیه نگاشت باز را نتیجه می‌دهد [۱۶] و می‌دانیم ACC اکیداً از DC ضعیف‌تر است).
- اندازه لبگ به صورت جمعی شمارا است [۴۶، صفحه ۳۳، گزاره ۳] (از روی DC نتیجه می‌شود).

^{۱۰۳} اگر A یک زیرمجموعه محدب فضای برداری Z باشد، نقطه $a \in A$ را یک نقطه گوشه‌ای^{۱۰۴} می‌نامند اگر هیچ پاره خط باز گذرنده از نقطه a بطور کامل در A قرار نگیرد. به عبارت دیگر به ازای هر $x, y \in A$ اگر $t \in (0, 1)$ موجود باشد که $tx + (1-t)y = a$ ، آنگاه a .

^{۱۰۴}extreme point

^{۱۰۶} کوچکترین مجموعه محدب بسته شامل A را پوش محدب بسته^{۱۰۷} تولید شده توسط A می‌نامند و با $\overline{\text{co}}(A)$ نمایش می‌دهند.

^{۱۰۷}closed convex hull

^{۱۰۹} یک فضای متریک که در آن دنباله‌های کُشی، همگرا باشند را کامل می‌نامند.

^{۱۰۱}Tychonoff's theorem ^{۱۰۲}Heine-Borel theorem ^{۱۰۵}Krein-Milman theorem ^{۱۰۸}Baire category theorem ^{۱۱۰}Tietze extension theorem ^{۱۱۱}Urysohn's lemma ^{۱۱۲}Open mapping theorem

- (UL) لم ابرفیلتر^{۱۱۳} : هر فیلتر^{۱۱۴} روی یک مجموعه مثل X مشمول در یک ابرفیلتر بیشین است. (لم ابرفیلتر معادل BPI و لذا ضعیف‌تر از AC است [۲۷].)
 - (HB) قضیه هان-باناخ^{۱۱۵} : فرض کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ ، S یک زیرفضای V ، p یک تابع زیرخطی^{۱۱۶} روی V و f یک تابع خطی^{۱۱۶} روی S باشد که به ازای هر $x \in S$ ، $f(x) \leq p(x)$. در این صورت توسیعی از f مثل g به تمام فضای برداری V وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in V$ ، $g(x) \leq p(x)$. (از AC ضعیف‌تر است و حتی از BPI نیز ضعیف‌تر است [۳۶، ۳۷].)
 - (PBT) پارادکس باناخ-تارسکی^{۱۱۷} : به ازای هر دو مجموعه کران‌دار A و B از فضای $\mathbb{R}^3$ درون آن‌ها ناتهی باشد، افزایی از A به تعداد متناهی قسمت جدا از هم مثل P وجود دارد که با تجدید آرایش عناصر P ، مجموعه B به دست می‌آید. (از AC ضعیف‌تر است و در واقع از روی HB به دست می‌آید [۴۵].) این موضوع از آنجا که به نظر می‌رسد با شهود هندسی تضاد دارد، پارادکس نامیده می‌شود. در واقع با توجه به PBT یک کره A را با تقسیم به یک افزای متناهی P و سپس با حرکت‌های دوران و انتقال روی عناصر P ، می‌توان به مجموعه B مشتمل بر دو کره که هر کدام به اندازه کره A هستند، تبدیل کرد. نکته‌ای که در صورت پارادکس نیست و در اثبات آن دیده می‌شود این است که بعضی از قطعات افزای P به گونه‌ای هستند که نمی‌توان آن‌ها را با یک چاقو به شکل معمولی از کره A جدا کرد و با جدا کردن بعضی از اتم‌های کره A و کنار هم قرار دادن مجدد آن اتم‌ها، آن قطعات خاص بدست می‌آیند. بنابراین می‌توان گفت وجود این قطعات خاص در افزای P ، نشان می‌دهند که ماهیت PBT تناقضی با شهود هندسی ما ندارد.
- ۴.۶. منطق.

- قضیه فشردگی برای منطق گزاره‌ای و منطق مرتبه اول: اگر Σ مجموعه‌ای از گزاره‌ها باشد و هر زیرمجموعه متناهی Σ دارای مدل باشد، آن‌گاه Σ نیز مدل خواهد داشت (معادل UL و در نتیجه معادل BPI است و بنابراین ضعیف‌تر از AC است [۲۷].)
- قضیه تمامیت برای منطق گزاره‌ای و منطق مرتبه اول: هر مجموعه سازگار^{۱۱۸} از گزاره‌ها، دارای مدل است (معادل UL و بنابراین ضعیف‌تر از AC است [۲۷].)
- قضیه لوفن‌هایم-اسکولم کاهشی: اگر در منطق مرتبه اول، مجموعه‌ای از گزاره‌ها مثل Σ متعلق به یک زبان مرتبه اول شمارا باشد و دارای مدلی مثل $\mathcal{M}$ باشد، آن‌گاه زیرمدل شمارایی از $\mathcal{M}$ مانند $\mathcal{N}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{N}$ نیز مدلی از Σ است (ضعیف‌تر از AC و در واقع معادل DC است [۳۸].)

۷. نتیجه‌گیری

همان‌طور که قبلاً گفتیم، با این‌که اصل انتخاب حالت ساختاری ندارد و فقط در مورد وجود یک تابع انتخاب صحبت می‌کند، اما پذیرش آن عجیب‌تر از عدم وجود یک تعریف ایجابی برای اعداد گنگ نیست. معادل‌ها و نتایج اصل انتخاب نشان می‌دهند که با پذیرش اصل انتخاب، علیرغم نبود ماهیت ساختاری برای تابع انتخاب، ظاهراً مدل‌های ریاضی رفتار منظم‌تر، بهتر و قابل

^{۱۱۴} یک فیلتر روی مجموعه X ، یک خانواده ناتهی از زیرمجموعه‌های ناتهی X است مثل $\mathcal{F}$ به طوری که اولاً اگر $A \in \mathcal{F}$ ، آن‌گاه هر ابرمجموعه A نیز متعلق به $\mathcal{F}$ است و ثانیاً $\mathcal{F}$ تحت اشتراک متناهی اعضایش بسته است.

^{۱۱۶} هر تابع $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ که به ازای هر $x, y \in V$ و هر $r \in \mathbb{R}$ دارای دو خاصیت الف) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ و ب) $f(rx) = rf(x)$ باشد را یک تابع زیرخطی می‌نامند. f را یک تابع خطی می‌نامند هرگاه خاصیت الف به صورت $f(x+y) = f(x) + f(y)$ باشد.

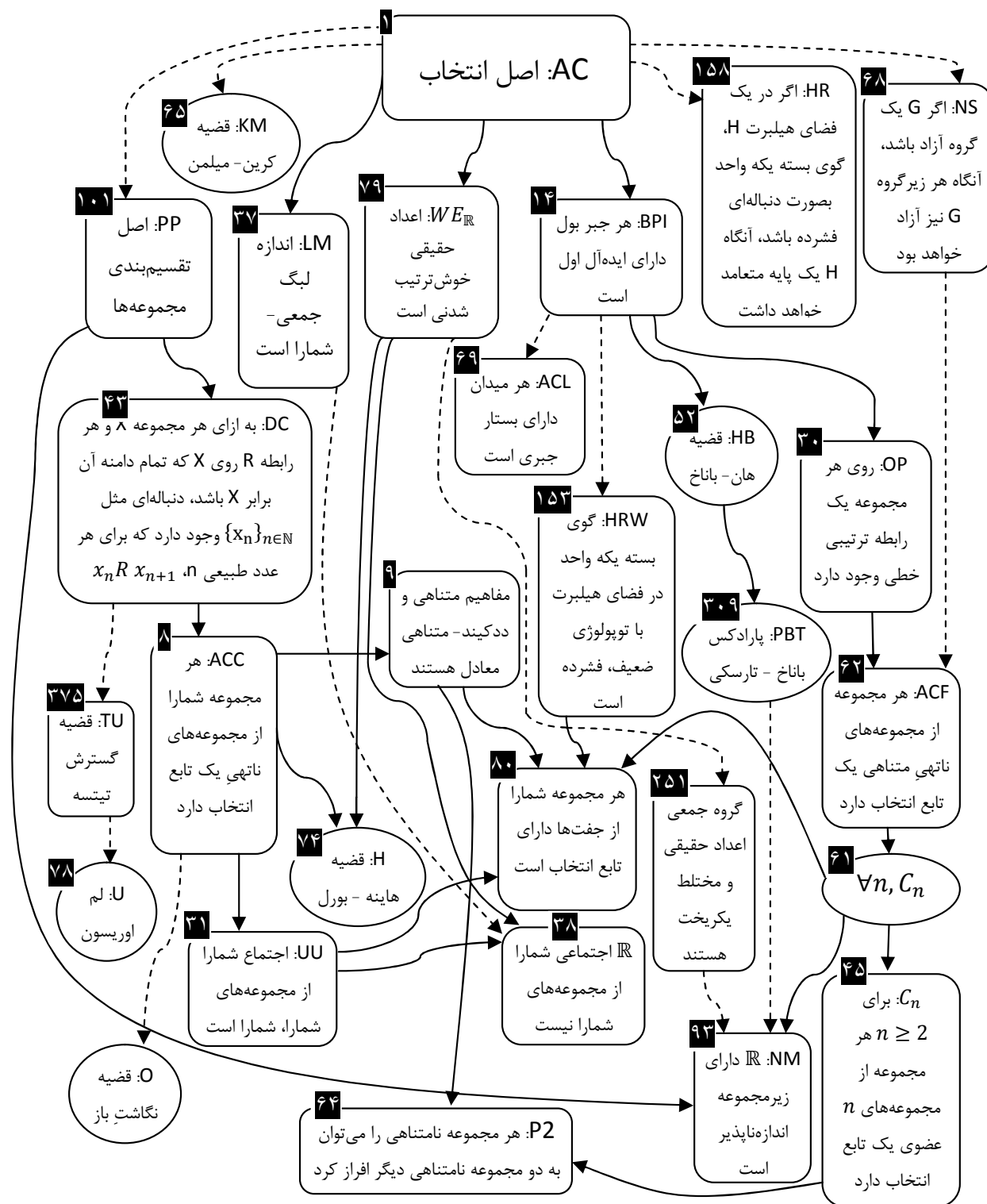
^{۱۱۸} یک مجموعه از گزاره‌ها را سازگار می‌نامند هرگاه توسط آن مجموعه و قوانین اثبات، نتوان تناقض را نتیجه گرفت.

¹¹³Ultrafilter lemma ¹¹⁵Hahn-Banach theorem ¹¹⁷Banach-Tarski paradox

انتظارتری از خود بروز می‌دهند. به‌علاوه نباید از این مهم غافل شد که در عین اینکه با پذیرش اصل انتخاب موارد پارادکس آمیزی مثل وجود یک رابطه خوش‌ترتیبی روی $\mathbb{R}$ و یا پارادکس باناخ-تارسکی حادث می‌شوند، ولی عدم پذیرش اصل انتخاب پارادکس‌های فراوان دیگری را در بر دارد.

در اینجا فقط برگزیده‌ای از معادل‌های اصل انتخاب و نتایج حاصل از پذیرش این اصل را به‌صورت خیلی مختصر ذکر کردیم. در مورد هر یک از معادل‌ها و نتایج اصل انتخاب، شاید به اندازه یک مقاله مروری مفصل مطلب موجود باشد. در مقاله حاضر سعی ما بر این بود که یک شخص مبتدی که در آغاز راه مطالعه ریاضیات پیشرفته قرار دارد، با توجه به معادل‌ها و نتایج اصل انتخاب، شناخت بهتری از آنچه این اصل بیان می‌کند، داشته باشد.

تصویر صفحه بعد ارتباط نتایجی از اصل انتخاب که در این مقاله بیان شدند را بهتر نشان می‌دهد. در اینجا $A \rightarrow B$ به این معنی است که از روی A ، گزاره B نتیجه می‌شود و به‌علاوه قطعاً نتیجه عکس درست نیست. از طرفی $A \dashrightarrow B$ به این معنی است که A ، گزاره B را نتیجه می‌دهد اما هنوز نتیجه عکس معلوم نشده است. شماره‌های کنار هر کادر نیز شماره فرم مربوطه در کتاب [۳۲] را نشان می‌دهند که معادل‌های آن حکم را می‌توان در فرم مربوطه مشاهده کرد. قضیه نگاشت باز در هیچ فرمی ذکر نشده بود و نتیجه مربوط به آن به‌تازگی ثابت شده است [۱۶].



مراجع

- [۱] ا. ممتحن، در بهار اتفاق می‌افتد، فرهنگ و اندیشه ریاضی، انجمن ریاضی ایران، شماره ۳۹ ۳۶-۵۵.
- [2] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley publishing Company, 1994.
- [3] C. J. Ash, A consequence of the axiom of choice, *J. Austral. Math. Soc.*, **19** (1975) 306–308.
- [4] B. Banaschewski, Algebraic closure without choice, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, **38** (1992) 383–385.
- [5] J. Bell and D. Fremlin, A geometric form of the axiom of choice, *Fund. Math.*, **77** (1972) 167–170.
- [6] C. E. Blair, The Baire category theorem implies the principle of dependent choices, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **25** (1977) 933–934.
- [7] A. Blass, Existence of bases implies the axiom of choice, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, **31** (1984) 31–33.
- [8] N. Bruuner, Sequential continuity, *Kyungpook Math. J.*, **22** (1982) 233–233.
- [9] N. Brunner, Realisierung und auswahlaxiom, (German), *Arch. Math. (Brno)*, **20** (1984) 39–42.
- [10] G. Cantor, (in German), Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, (German), *J. Reine Angew. Math.*, **77** (1874) 258–262.
- [11] G. Cantor, Ein beitrag zur mannigfaltigkeitslehre, (in German), *J. Reine Angew. Math.*, **84** (1878) 242–258.
- [12] G. Cantor, Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, (German), *Math. Ann.*, **21** (1883) 545–591.
- [13] P. J. Cohen, The independence of the axiom of choice, Stanford Digital Repository, (1963) 1–34, .
- [14] O. De La Cruz and C. A. Di Prisco, *Weak forms of the axiom of choice and partitions of infinite sets*, Kluwer Academic Publishers, Springer, Dordrecht, 1998 47–70.
- [15] S. Feferman, Some applications of the notions of forcing and generic sets, *Fund. Math.*, **56** (1964) 325–345.
- [16] A. F. D. Fellhauer, On the relation of three theorems of analysis to the axiom of choice, *J. Log. Anal.*, **9** (2017) 1–23.
- [17] J. Ferreirós, *Labyrinth of thought: a history of set theory and its role in modern mathematics*, 2nd edition, Birkhauser Basel Publication, 2007, .
- [18] G. Frege, *Philosophical and mathematical correspondence*, Edited and with an introduction by Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel and Albert Veraart, Abridged from the German edition and with a preface by Brian McGuinness, Translated from the German by Hans Kaal, With an appendix by Philip E. B. Jourdain. University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1980.
- [19] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis, *Proceeding of the National Academy of Sciences USA*, **24** (1938) 556–557.
- [20] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, (Russian), *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, **3** (1948) 96–149.
- [21] J. Gray, Did Poincaré say “set theory is a disease”?, *Math. Intelligencer*, **13** (1991) 19–22.
- [22] J. Halpern and D. Levy, The boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice, Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, *American Mathematical Society*, **13** Part I (1971) 83–134.
- [23] F. Hartogs, Über das problem der wohlordnung, (German), *Math. Ann.*, **76** (1915) 438–443.
- [24] F. Hausdorff, Der potenzbegriff in der mengenlehre (the concept of power in set theory), (in German), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **13** (1904) 569–571.
- [25] F. Hausdorff, Die graduierung nach dem endverlauf (the graduation of the ending process), (in German), Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, *Mathematisch-Physische Klasse*, **31** (1909) 296–334.
- [26] F. Hausdorff, *Mengenlehre (set theory)*, 2nd edition, Berlin-Leipzig de Gruyter, 1927 (1st edition 1914, 3rd edition 1935, translated to english 1957).

- [27] L. A. Henkin, Metamathematical theorems equivalent to the prime ideal theorems for Boolean algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954) 387–388.
- [28] H. Herrlich, *Axiom of choice*, Mathematical Logic and Foundations, **1876**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [29] D. Hilbert, Über das Unendliche, (German), *Math. Ann.*, **95** (1926) 161–190.
- [30] W. Hodges, Krull implies zorn, *J. London Math. Soc. (2)*, **19** (1979) 285–287.
- [31] P. E. Howard, Subgroups of a free group and the axiom of choice, *J. Symbolic Logic*, **50** (1985) 458–467.
- [32] P. E. Howard and J. E. Rubin, *Consequences of the axiom of choice*, Mathematical Surveys and Monographs, **59**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [33] P. E. Howard and J. E. Rubin, The Boolean prime ideal theorem plus countable choice do [does] not imply dependent choice, *Math. Logic Quart.*, **42** (1996) 410–420.
- [34] P. E. Howard and M. Yorke, Maximal p -subgroups and the axiom of choice, *Notre Dame J. Formal Logic*, **28** (1987) 276–283.
- [35] T. Jech, *The Axiom of choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **75**, North Holland, 1973.
- [36] J. Łoś, and C. Ryll–Nardzewski, On the application of Tychonoff’s theorem in mathematical proofs, *Fund. Math.*, **38** (1951) 233–237.
- [37] W. A. J. Luxemburg, *Reduced powers of the real number system and equivalents of the Hahn-Banach extension theorem*, 1969, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability (Internat. Sympos., Pasadena, Calif.), Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967 123–137
- [38] A. Karagila, *Downward löwenheim–skolem theorems and choice principles*, 2014, .
- [39] J. Kelley, The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, *Fund. Math.*, **37** (1950) 75–76.
- [40] K. Keremedis, Some equivalents of AC in algebra, *Algebra Universalis*, **36** (1996) 564–572.
- [41] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- [42] J. König, Zum kontinuum-problem (on the continuum problem), (in German), *Vethandlungen des Diitten Internal Mathematiker Kongresses in Heidelberg*, **3** (1905) 144–147.
- [43] C. Kuratowski, Une Méthode d’élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fund. Math.*, **3** (1922) 76–108.
- [44] G. H. Moore, *Zermelo’s axiom of choice: its origins, development, and influence*, Springer-Verlag New York, 1982.
- [45] J. Pawlikowski, The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox, *Fund. Math.*, **138** (1991) 21–22.
- [46] H. Royden, *Real analysis*, 4nd edition, Prentice Hall, 2010.
- [47] H. Rubin, and J. E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice*, II, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **116**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.
- [48] H. Rubin and J. E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970.
- [49] B. Russell, Mathematical logic as based on the theory of types, *Amer. J. Math.*, **30** (1908) 222–262.
- [50] D. Scott, The theorem on maximal ideals in lattices and the axiom of choice, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954) pp. 83.
- [51] A. Tarski, Sur les Ensembles Finis (On Finite Sets), (in Ferench), *Fund. Math.*, **6** (1924) 45–95.
- [52] A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia mathematica*, Cambridge University Press, 1910.
- [53] E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, (German), *Math. Ann.*, **59** (1904) 514–516.
- [54] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. (German), *Math. Ann.*, **65** (1908) 261–281.

- [55] E. Zermelo, *Ernst zermelo - gesammelte werke (collected works)*, (Editors: Ebbinghaus, H. D. and Kanamori, A. and Fraser, C. G.), **1**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [56] M. Zorn, A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **41** (1935) 667–670.

سید محمد امین خاتمی

گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران.

khatami@birjandut.ac.ir

سید محمد امین خاتمی، عضو هیات علمی گروه علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی بیرجند با تخصص منطق ریاضی است. نظریه مدل منطق پیوسته و منطق فازی، نظریه مجموعه‌ها، ترکیبیات، تاریخ و فلسفه ریاضی از علایق پژوهشی آقای خاتمی هستند.



On the Axiom of Choice

Seyed Mohammad Amin Khatami

Abstract: In this article, we have a brief historical overview of the facts around the axiom of choice (AC) in set theory. In this regard, we will state some of the most important equivalents of AC and also some of the weaker forms of AC. We will try to mention the most important results of AC in different branches of mathematics.

Keywords: Axiom of choice (AC), set theory, equivalents of AC, results of AC.

Seyed Mohammad Amin Khatami

Department of Computer Science, Birjand University of Technology, Birjand, Iran.

Email: khatami@birjandut.ac.ir

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Review Paper.

Received: 31/10/2022, Accepted: 02/01/2023.