

نتایجی پیرامون بُدهای گرنشتاین یکدست (گرنشتاین همتابی) مدول‌ها بر حلقه‌های گروهی

علی حاجی‌زمانی

چکیده. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، Γ یک گروه و Γ' زیرگروهی از آن با اندیس متناهی باشد. در این مقاله، به مطالعه مدول‌های گرنشتاین یکدست (گرنشتاین همتابی) بر حلقه گروهی $R\Gamma$ می‌پردازیم. یکی از اهداف ما بررسی رفتار این نوع مدول‌ها و بُدهای تعریف شده بر اساس آن‌ها، نسبت به تغییر حلقه از $R\Gamma$ به $R\Gamma'$ است. به‌ویژه، نشان می‌دهیم که اگر M یک $R\Gamma$ -مدول با بُعد گرنشتاین یکدست متناهی باشد ($Gfd_{R\Gamma} M < \infty$)، آن‌گاه $Gfd_{R\Gamma} M \leq Gfd_R M + hd_{R\Gamma} \Gamma$ ، که در آن $hd_{R\Gamma} \Gamma$ نشان دهنده بُعد همولوژیک Γ بر R می‌باشد. به‌طور مشابه، ثابت خواهیم کرد که اگر Γ متناهی باشد، آن‌گاه $Gctd_{R\Gamma} M \leq Gctd_R M + cd_{R\Gamma} \Gamma$ ، که در آن $Gctd_{R\Gamma} M$ ($Gctd_R M$) نشان دهنده بُعد گرنشتاین همتابی $R\Gamma$ -مدول (R -مدول) M بوده و $cd_{R\Gamma} \Gamma$ نیز نماد بُعد کوهولوژیک Γ بر R است.

۱. مقدمه

فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد. حلقه گروهی Γ بر R که با نماد $R\Gamma$ نشان داده می‌شود، عبارت است از R -مدول آزادی که اعضای Γ را به‌عنوان پایه می‌پذیرد. بنابر تعریف، هر عضو $R\Gamma$ دارای نمایش منحصر بفردی به‌صورت $\sum_{g \in \Gamma} r_g g$ است، که در آن $r_g \in R$ و تمام r_g ها به‌جز تعداد متناهی از آن‌ها صفر است. جمع روی $R\Gamma$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{g \in \Gamma} r_g g + \sum_{g \in \Gamma} s_g g = \sum_{g \in \Gamma} (r_g + s_g) g$$

به‌علاوه، $R\Gamma$ با ضرب

$$\left(\sum_{g \in \Gamma} r_g g \right) \left(\sum_{g' \in \Gamma} s_{g'} g' \right) = \sum_{g, g' \in \Gamma} (r_g s_{g'}) gg'$$

عبارات و کلمات کلیدی: حلقه گروهی، مدول گرنشتاین یکدست، مدول گرنشتاین همتابی، بُعد گرنشتاین یکدست، بُعد گرنشتاین همتابی.

دبیر تخصصی رابط: جواد اسدالهی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۷/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۰۴

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.135459.1536>

یک حلقه تشکیل می‌دهد. توجه کنید که عضو همانی Γ عضو همانی $R\Gamma$ نیز است. واضح است که R را می‌توان به‌عنوان زیرحلقه‌ای از حلقه $R\Gamma$ در نظر گرفت. به‌ویژه، در حالتی که Γ یک گروه متناهی باشد، $R\Gamma$ یک R -جبر متناهی بُعد است. نکته مهمی که باید به آن توجه کرد این است که یک R -مدول M همراه با عمل گروه Γ بر روی M ، هم از نظر نمادی و هم از نظر مفهومی با $R\Gamma$ -مدول M یکسان است. همچنین روی حلقه‌های گروهی، هر مدول چپ می‌تواند دارای یک ساختار طبیعی راست مدولی باشد و برعکس. به بیان دقیق‌تر، اگر M یک $R\Gamma$ -مدول چپ باشد، آن‌گاه M را می‌توان به‌صورت زیر به‌عنوان یک $R\Gamma$ -مدول راست در نظر گرفت:

$$mg = g^{-1}m \quad \forall m \in M, g \in \Gamma.$$

بنابراین حلقه گروهی $R\Gamma$ با حلقه متضادش، $(R\Gamma)^{\text{op}}$ ، یکرخت است. به این دلیل، هرگاه درباره مدول‌ها بر حلقه‌های گروهی بحث می‌کنیم، از به‌کار بردن صفت راست و چپ صرف‌نظر می‌نماییم. همچنین اگر Γ' زیرگروهی از گروه Γ باشد، آن‌گاه حلقه گروهی $R\Gamma'$ زیرحلقه‌ای از حلقه $R\Gamma$ بوده، بنابراین هر $R\Gamma$ -مدول M را می‌توان به‌عنوان $R\Gamma'$ -مدول در نظر گرفت. در چنین مواردی، معمولاً از نماد $M \downarrow_{\Gamma'}$ برای نشان دادن مدول تحدید شده استفاده می‌شود. به‌علاوه، اگر N یک $R\Gamma'$ -مدول باشد، مدول‌های $N \otimes_{R\Gamma'} R\Gamma$ و $\text{Hom}_{R\Gamma'}(R\Gamma, N)$ دارای ساختار $R\Gamma$ -مدولی بوده و به‌ترتیب، مدول‌های القایی و هم-القایی از Γ' به Γ نامیده می‌شوند و اگر اندیس Γ' در Γ متناهی باشد، این دو $R\Gamma$ -مدول با یکدیگر یکرخت‌اند [۱۴، گزاره ۹.۵]. لازم به ذکر است که چون $R\Gamma$ هم به‌عنوان $R\Gamma'$ -مدول چپ و هم به‌عنوان $R\Gamma'$ -مدول راست آزاد است، تابعگون القایی و تابعگون تحدید هر دو دقیق بوده، بنابراین تصویری بودن را حفظ می‌کنند. همچنین تابعگون هم-القایی نیز تزریقی بودن را حفظ می‌کند. مطالعه حلقه‌های گروهی، ابتدا در چهارچوب نظریه نمایش گروه‌های متناهی انجام شد. مسأله مهمی که در نظریه نمایش گروه‌های متناهی مورد توجه قرار داشت، تعیین مدول‌های تصویری بر حلقه‌های گروهی بود. چوینارد^۱ ثابت کرد: یک $R\Gamma$ -مدول M تصویری است اگر و فقط اگر تحدید آن به هر زیرگروه آبلی مقدماتی از Γ ، تصویری باشد. لازم به ذکر است که دوگان قضیه چوینارد برای مدول‌های تزریقی نیز برقرار است [۱۵]. همچنین، توصیف دیگری برای تشخیص مدول‌های تصویری بر حلقه‌های گروهی توسط بنسن^۲ و گودیرل^۳ در [۹] ارائه شد. آن‌ها ثابت کردند که برای هر گروه متناهی Γ ، هر $R\Gamma$ -مدول یکدست که به‌عنوان R -مدول تصویری باشد، به‌عنوان $R\Gamma$ -مدول نیز تصویری است.

حلقه‌های گروهی گروه‌های نامتناهی در دهه سی در متون مربوط به نظریه گروه و توپولوژی جبری ظاهر شدند و دو دهه بعد عمدتاً کاربردهای آن‌ها مورد توجه قرار گرفت. در عین حال، آغاز دهه شصت را می‌توان نقطه عطف تحقیق بر روی این نوع حلقه‌ها دانست، به‌طوری‌که جریان تدوین مقالات در این زمینه به‌طور چشمگیری افزایش یافت. مثلاً کونل^۴ در [۱۷] شرایطی را بررسی کرد که تحت آن‌ها حلقه گروهی $R\Gamma$ ، نوتری، آرتینی، منظم، خود-تزریقی و شبه اول باشد.

یکی از کاربردهای حلقه‌های گروهی، استفاده از آن‌ها برای مطالعه برخی ویژگی‌های گروه‌ها از طریق خواص (کو) همولوژیک آن‌ها است که کوهمولوژی گروه‌ها نامیده می‌شود. این نظریه که دارای ریشه‌های جبری و توپولوژیکی است، دارای پیشینه‌ای طولانی در نظریه گروه‌ها است. تاکنون، بُعدهای (کو) همولوژیک متعددی به یک گروه Γ نسبت داده شده است که مهمترین آن‌ها بُعد کوهمولوژیک (بُعد همولوژیک) گروه Γ بر حلقه R است که با $\text{cd}_R \Gamma$ (نشان داده می‌شود و بنابر تعریف عبارت است از بُعد تصویری (یکدست) $R\Gamma$ -مدول بدیهی R . در [۳۱] و [۳۲] ثابت شده است که گروه نابديهی Γ آزاد است، اگر و فقط اگر $\text{cd}_{\mathbb{Z}} \Gamma = ۱$. همچنین، قضیه‌ای موسوم به قضیه سر^۵ بیان می‌کند که اگر Γ یک گروه فارغ از تاب بوده و Γ' زیرگروهی از آن با اندیس متناهی باشد، آن‌گاه بُعدهای (کو) همولوژیک Γ و Γ' بر حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ برابرند.

^۱Chouinard ^۲Benson ^۳Goodearl ^۴Connell ^۵Serre

در سال ۱۹۵۳ نیز کوهمولوژی تیت^۶ برای گروه‌های متناهی معرفی شد. تعریف این کوهمولوژی بر اساس نتیجه‌ای بود که بیان می‌کرد، $\mathbb{Z}\Gamma$ -مدول $\mathbb{Z}$ با عمل بدیهی دارای یک تحلیل تصویری تام است. یادآوری می‌کنیم که اگر R حلقه‌ای یکدار (نه لزوماً جابه‌جایی) باشد، R -مدول (چپ) M دارای یک تحلیل تصویری تام است، در صورتی‌که دنباله‌ای دقیق از R -مدول‌های (چپ) تصویری مانند

$$\mathbf{P} : \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^\circ \longrightarrow P^1 \longrightarrow \dots$$

وجود داشته باشد، با این خاصیت که به ازای هر R -مدول (چپ) تصویری Q ، همبافت القا شده $\text{Hom}_R(\mathbf{P}, Q)$ دقیق بوده و $M \cong \text{Ker}(P^\circ \rightarrow P^1)$.

در سال ۱۹۶۶ اوسلندر^۷ در [۳] و با الهام از مشاهدات تیت، کلاسی از مدول‌های با تولید متناهی را معرفی کرد که دارای تحلیل تصویری تام بودند. سپس با استفاده از این نوع مدول‌ها، G -بُعد مدول‌های با تولید متناهی را بر حلقه‌های نوتری تعریف نمود. در واقع، این پایا تشریفی از بُعد تصویری چنین مدول‌هایی است. پس از آن و به‌منظور تعمیم مفهوم G -بُعد برای مدول‌های دلخواه روی هر حلقه، ایناکس^۸ و ژندا^۹ در [۲۳] مدول‌های دارای تحلیل تصویری تام را گرنشتاین تصویری نامیده و دوگان آن‌را مدول‌های گرنشتاین تریقی نامیدند. بر پایه این تعاریف، نظریه جبر همولوژیک گرنشتاین شکل گرفت که در واقع ایده اصلی شکل‌گیری آن جایگزین کردن مدول‌های گرنشتاین تصویری و گرنشتاین تریقی به‌ترتیب، به‌جای مدول‌های تصویری و تریقی در جبر همولوژیک کلاسیک بود. در ادامه و به‌منظور کامل نمودن این نظریه، مدول‌های گرنشتاین یکدست توسط ایناکس، ژندا و تورسیلاس^{۱۰} در [۲۴] معرفی شد که متناظر با مدول‌های یکدست در جبر همولوژیک کلاسیک می‌باشند (تعریف ۱.۲). بر پایه این مدول‌ها، پایاهایی تعریف شد که به‌ترتیب بُعد گرنشتاین تصویری، بُعد گرنشتاین تریقی و بُعد گرنشتاین یکدست نامیده شدند. برای مثال، بُعد گرنشتاین تصویری R -مدول M که با $\text{Gpd}_R M$ نشان داده می‌شود، برابر با کوچکترین عدد صحیح ناصفری مانند n است که به ازای آن یک دنباله دقیق از R -مدول‌های

$$\circ \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

با G_i ‌های گرنشتاین تصویری وجود داشته باشد. بُعد گرنشتاین تریقی و بُعد گرنشتاین یکدست نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شوند (تعریف ۳.۲).

یک اصل کلی بیان می‌کند که هر نتیجه در جبر همولوژیک کلاسیک دارای یک همتا در جبر همولوژیک گرنشتاین است. بر این اساس، تحقیق در این زمینه و به‌خصوص مطالعه پایاهایی که بنیان تعریف آن‌ها مدول‌های تعریف شده در نظریه مذکور هستند مورد استقبال گسترده محققان قرار گرفته است. به‌ویژه، هلم^{۱۱} در [۲۷] رده بندی‌های مهمی برای برخی از این پایاها ارائه کرد. همچنین با الهام از این، در دهه اخیر مطالعه مدول‌های گرنشتاین و پایاهای مربوط به آن‌ها بر روی حلقه‌های گروهی توسط برخی محققان مورد توجه قرار گرفته است [۱، ۲، ۴، ۵، ۱۳، ۱۸، ۲۱]. به‌عنوان مثال، اسدالهی^{۱۲} و همکاران در [۱] بُعد گرنشتاین تصویری $R\Gamma$ -مدول بدیهی R ، یعنی $\text{Gpd}_{R\Gamma} R$ ، را در حالتی‌که R یک حلقه جابه‌جایی و Γ یک گروه است، بُعد کوهمولوژیک گرنشتاین Γ بر R نامیدند و آن‌را با نماد $\text{Gcd}_R \Gamma$ نشان دادند. سپس رابطه آن‌را با سایر بُدهای کوهمولوژیک بررسی کرده و در نهایت نیز قضیه‌ای مشابه با قضیه سر برای بُعد معرفی شده ثابت کردند.

همان‌گونه که گفته شد، در سال‌های اخیر مطالعه بُدهای کوهمولوژیک گرنشتاین و به‌طور کلی مطالعه مدول‌های گرنشتاین تصویری روی حلقه‌های گروهی مورد توجه برخی پژوهش‌گران قرار گرفته است، برای مثال [۵، ۱۲، ۱۳، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۳۳] را ببینید. در مقاله‌های اخیر، حلقه زمینه R ، بیشتر حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یا یک حلقه جابه‌جایی با بُعد سراسری متناهی است، یعنی $\text{gldim}(R) < \infty$. علت اصلی استفاده از حلقه‌های گروهی با حلقه ضریب $\mathbb{Z}$ ، میدان متناهی K یا میدان اعداد گویای $\mathbb{Q}$ ،

⁶Tate ⁷Auslander ⁸Enochs ⁹Jenda ¹⁰Torrecillas ¹¹Holm ¹²Asadollahi

کاربردهای هندسی آن‌ها است. همچنین، دلیل اصلی استفاده از حلقه‌های گروهی $R\Gamma$ با R جابه‌جایی و $\text{gldim}(R)$ متناهی نیز این است که در این حالت هر مدول گرنتشتاین تصویری روی $R\Gamma$ به‌عنوان R -مدول، تصویری است [۲۱]، گزاره ۱۰.۱]. در بخش اول این مقاله، به مطالعه مدول‌های گرنتشتاین یکدست و بُعد گرنتشتاین یکدست مدول‌ها روی حلقه گروهی $R\Gamma$ که در آن R یک حلقه جابه‌جایی و دلخواه است، می‌پردازیم. قابل ذکر است که در [۲] نیز مدول‌های گرنتشتاین یکدست روی حلقه‌های گروهی با حلقه ضرب $\mathbb{Z}$ مطالعه شده و سپس بُعد همولوژیک گرنتشتاین گروه‌ها تعریف و ارتباط آن با سایر پایاهای همولوژیک گروه‌ها بررسی شده است. در اینجا ما برخی از این نتایج را به‌حالتی که R جابه‌جایی و دلخواه است، تعمیم می‌دهیم. یکی از اهداف ما در این بخش این است که نشان دهیم اگر M یک $R\Gamma$ -مدول با بُعد گرنتشتاین یکدست متناهی باشد، آنگاه $\text{Gfd}_{R\Gamma} M \leq \text{Gfd}_R M + \text{hd}_{R\Gamma}$ (قضیه ۹.۲). یادآوری می‌کنیم که از نماد $\text{Gfd}_{R\Gamma} M$ (به‌منظور نشان دادن بُعد گرنتشتاین یکدست $R\Gamma$ -مدول M (R -مدول) استفاده می‌شود.

نوع دیگری از مدول‌ها که نقش مؤثری در جبر همولوژیک و به‌ویژه در اثبات حدس ایناکس در مورد پوشش‌های یکدست دارد، مدول‌های همتایی است. یادآوری می‌کنیم که اگر R یک حلقه باشد، R -مدول (چپ) C را همتایی نامند، هرگاه به ازای هر R -مدول یکدست (چپ) F ، $\text{Ext}_R(F, C) = 0$. با جایگزین کردن مدول‌های گرنتشتاین یکدست به جای مدول‌های یکدست در این تعریف، همتای این مدول‌ها در جبر همولوژیک گرنتشتاین، یعنی مدول‌های گرنتشتاین همتایی، معرفی شدند [۲۴]. ویژگی‌های این نوع مدول‌ها در [۲۵] و [۲۸] مطالعه شدند و بر اساس آن‌ها، بُعد گرنتشتاین همتایی حلقه‌ها و مدول‌ها تعریف شد. هدف ما در بخش دوم مقاله، مطالعه این نوع مدول‌ها بر روی حلقه‌های گروهی است. به‌ویژه، رفتار مدول‌های گرنتشتاین همتایی و بُعدهای وابسته را نسبت به تغییر حلقه از $R\Gamma$ به $R\Gamma'$ ، با فرض اینکه Γ' زیرگروهی از Γ با اندیس متناهی است، بررسی می‌کنیم. هدف اصلی در این بخش این است که نشان دهیم در حالتی که Γ متناهی است، نابرابری $\text{Gctd}_{R\Gamma} M \leq \text{Gctd}_R M + \text{cd}_{R\Gamma}$ بین بُعد گرنتشتاین همتایی $R\Gamma$ -مدول M ، R -مدول M و بُعد کوه‌همولوژیک Γ بر R ، یعنی $\text{cd}_{R\Gamma}$ ، برقرار است (قضیه ۱۱.۳).

۲. مدول‌های گرنتشتاین یکدست بر حلقه‌های گروهی

در این بخش به بررسی مدول‌های گرنتشتاین یکدست و بُعدهای همولوژیک تعریف شده بر مبنای این نوع مدول‌ها بر حلقه‌های گروهی می‌پردازیم. ابتدا تعریف زیر را یادآوری می‌نماییم.

تعریف ۱.۲. اگر R حلقه‌ای یکدار باشد، R -مدول چپ M گرنتشتاین یکدست نامیده می‌شود، اگر یک تحلیل یکدست تام، یعنی دنباله‌ای دقیق از R -مدول‌های چپ یکدست مانند

$$F : \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F^\circ \longrightarrow F^1 \longrightarrow \dots$$

با این خاصیت که به ازای هر R -مدول راست تزریقی I ، تابعگون $I \otimes_R -$ دقیق بودن F را حفظ کند، وجود داشته باشد که $M \cong \text{Ker}(F^\circ \rightarrow F^1)$.

واضح است که هر R -مدول یکدست، گرنتشتاین یکدست است.

تبصره ۲.۲. هلم در [۲۷] ثابت کرد که اگر R یک حلقه منسجم^{۱۳} راست باشد، آنگاه کلاس R -مدول‌های چپ گرنتشتاین یکدست تحت توسیع و جمع‌وندهای مستقیم بسته است. بر این اساس، در [۶] حلقه‌هایی که بر آن‌ها کلاس R -مدول‌های گرنتشتاین یکدست تحت توسیع بسته است، حلقه‌های GF-بسته چپ نامیده شد و خواص مدول‌های گرنتشتاین یکدست روی این نوع حلقه‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. نشان داده شد که کلاس حلقه‌های GF-بسته چپ اکیداً کلاس حلقه‌های منسجم راست

¹³coherent

را شامل می‌شود. به‌تازگی، ثابت شده است که کلاس R -مدول‌های چپ گرنشتاین یکدست همیشه تحت توسیع و جمع‌وندهای مستقیم بسته است، یعنی هر حلقه R یک حلقه GF-بسته چپ است [۳۰، نتیجه ۱۲.۴].

تعریف ۳.۲. فرض کنیم M یک R -مدول ناصفر باشد. بُعد گرنشتاین یکدست M که با $\text{Gfd}_R M$ نشان داده می‌شود، برابر است با کوچکترین عدد صحیح $n \geq 0$ به‌طوری‌که به ازای آن یک دنباله دقیق از R -مدول‌ها مانند

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

با F_i ‌های گرنشتاین یکدست، موجود باشد. اگر چنین n ‌ای موجود نباشد، آنگاه $\text{Gfd}_R M$ نامتناهی فرض می‌شود. همچنین بنابر قرارداد، $\text{Gfd}_R 0 = -\infty$.

اکنون به بررسی ویژگی‌های این بُدها بر حلقه‌های گروهی می‌پردازیم. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که چون حلقه‌های گروهی با حلقه متضادشان یکریخت هستند، از این رو در رویارویی با این حلقه‌ها از به‌کاربردن صفت چپ و راست اجتناب می‌کنیم.

گزاره ۴.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی، Γ یک گروه و Γ' زیرگروهی از آن باشد.

(الف) اگر F یک $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین یکدست باشد، آنگاه $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F$ نیز به‌عنوان $R\Gamma$ -مدول گرنشتاین یکدست است.

(ب) به ازای هر $R\Gamma'$ -مدول M داریم: $\text{Gfd}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M) \leq \text{Gfd}_{R\Gamma'} M$.

اثبات. (الف) چون F یک $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین یکدست است، یک تحلیل یکدست تام از $R\Gamma'$ -مدول‌ها مانند

$$\mathbf{F} : \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F^\circ \longrightarrow F^1 \longrightarrow \cdots$$

وجود دارد، به‌طوری‌که $F \cong \text{Ker}(F^\circ \rightarrow F^1)$. حال از آنجا که تابعگون $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} -$ دقیق است، بنابراین همبافت $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} \mathbf{F}$ یک دنباله دقیق از $R\Gamma$ -مدول‌ها بوده و در آن به ازای هر عدد صحیح $i \geq 0$ ، مدول‌های $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F^i$ و $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F_i$ به‌وضوح یکدست هستند. همچنین،

$$R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F \cong \text{Ker}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F^\circ \rightarrow R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F^1).$$

اکنون $R\Gamma$ -مدول تزریقی I را در نظر می‌گیریم. چون I به‌عنوان $R\Gamma'$ -مدول تزریقی است، با در نظر گرفتن یکریختی‌های

$$I \otimes_{R\Gamma'} (R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} \mathbf{F}) \cong (I \otimes_{R\Gamma'} R\Gamma) \otimes_{R\Gamma'} \mathbf{F} \cong I \otimes_{R\Gamma'} \mathbf{F},$$

و اینکه همبافت سمت راست دقیق است، نتیجه می‌گیریم که $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} \mathbf{F}$ یک تحلیل یکدست تام بوده، پس $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F$ گرنشتاین یکدست است.

(ب) فرض کنیم $\text{Gfd}_{R\Gamma'} M = m$ و متناهی باشد. در این صورت دنباله دقیقی مانند

$$0 \longrightarrow F_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

از $R\Gamma'$ -مدول‌ها موجود است که در آن هر F_i یک $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین یکدست است. اگر تابعگون دقیق $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} -$ را روی آن اثر دهیم، دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F_0 \longrightarrow R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M \longrightarrow 0$$

از RF -مدول‌ها به دست می‌آید که در آن بنابر قسمت قبل، هر RF -مدول $F_i \otimes_{\text{RF}'} \text{RF}$ گرنشتاین یکدست است. در نتیجه $\text{Gfd}_{\text{RF}}(\text{RF} \otimes_{\text{RF}'} M) \leq m$ و حکم ثابت می‌شود.

□

قضیه ۵.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و Γ' زیرگروهی از گروه Γ با اندیس متناهی باشد. آن‌گاه، هر RF -مدول M گرنشتاین یکدست است اگر و فقط اگر به عنوان RF' -مدول گرنشتاین یکدست باشد.

اثبات. برای اثبات کفایت شرط، می‌توان درست همان اثبات [۲، لم ۱۰.۴] را با جایگزین کردن حلقه R به جای حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ، به کار برد. اما در اینجا با به کارگیری [۶، لم ۴.۲] آن را با کمی تغییر به صورت زیر اثبات می‌کنیم. فرض کنیم M یک RF -مدول گرنشتاین یکدست باشد. به ازای هر RF -مدول تزریقی E و به ازای هر $i > 0$ ، $\text{Tor}_i^{\text{RF}}(E, M) = 0$ و دنباله‌ای دقیق از RF -مدول‌ها به صورت

$$\mathbf{F}^\bullet : 0 \longrightarrow M \longrightarrow F^0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow \dots \quad (*)$$

وجود دارد که در آن F^i ها یکدست بوده و دنباله $E \otimes_{\text{RF}} \mathbf{F}^\bullet$ دقیق است. اکنون M را به عنوان RF' -مدول در نظر گرفته، فرض کنید I یک RF' -مدول تزریقی باشد. آن‌گاه، $\text{RF} \otimes_{\text{RF}'} I \cong \text{Hom}_{\text{RF}'}(\text{RF}, I)$ به عنوان RF -مدول تزریقی است. پس بنابر آنچه در بالا به آن اشاره شد، به ازای هر $i > 0$ ، $\text{Tor}_i^{\text{RF}}(\text{RF} \otimes_{\text{RF}'} I, M) = 0$ ، اما چون بنابر [۲۹، قضیه ۵۳.۱۱]

$$\text{Tor}_i^{\text{RF}}(\text{RF} \otimes_{\text{RF}'} I, M) \cong \text{Tor}_i^{\text{RF}}(M, \text{RF} \otimes_{\text{RF}'} I) \cong \text{Tor}_i^{\text{RF}'}(M \otimes_{\text{RF}} \text{RF}, I) \cong \text{Tor}_i^{\text{RF}'}(M, I)$$

$$\text{Tor}_i^{\text{RF}'}(I, M) \cong \text{Tor}_i^{\text{RF}'}(M, I) = 0, \quad i > 0.$$

بنابراین به ازای هر $i > 0$ ، $\text{Tor}_i^{\text{RF}'}(I, M) \cong \text{Tor}_i^{\text{RF}'}(M, I) = 0$ ، اکنون اگر دنباله $(*)$ را به عنوان دنباله‌ای از RF' -مدول‌ها در نظر بگیریم، F^i ها به عنوان RF' -مدول یکدست بوده و به ازای هر RF' -مدول تزریقی I ، داریم:

$$(\text{RF} \otimes_{\text{RF}'} I) \otimes_{\text{RF}} \mathbf{F}^\bullet \cong \mathbf{F}^\bullet \otimes_{\text{RF}} (\text{RF} \otimes_{\text{RF}'} I) \cong \mathbf{F}^\bullet \otimes_{\text{RF}'} I \cong I \otimes_{\text{RF}'} \mathbf{F}^\bullet$$

چون سمت چپ یکرختی یک همبافت دقیق است، بنابراین سمت راست نیز دقیق می‌باشد. به کارگیری مجدد [۶، لم ۴.۲]، نتیجه می‌دهد که M به عنوان RF' -مدول نیز گرنشتاین یکدست است. برای اثبات لزوم شرط، کافی است در اثبات [۴، قضیه ۶.۲]، حلقه R را با حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ جایگزین کنیم.

□

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ' زیرگروهی از گروه Γ با اندیس متناهی باشد. اگر M یک RF -مدول باشد، آن‌گاه $\text{Gfd}_{\text{RF}} M = \text{Gfd}_{\text{RF}'} M$.

□

اثبات. با توجه به [۶، قضیه ۸.۲] و تبصره ۲.۲، بی‌درنگ از قضیه قبل به دست می‌آید.

در ادامه این بخش به بررسی ارتباط بین بُعد گرنشتاین یکدست مدول M بر حلقه‌های RF و R ، با استفاده از بُعد همولوژیک گروه Γ بر حلقه R می‌پردازیم. برای این منظور، ابتدا به لم و قضیه زیر نیاز داریم.

لم ۷.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد. فرض کنیم M و P دو RF -مدول باشند به طوری که P تصویری است. آن‌گاه، به ازای هر $n > 0$ ، $\text{Tor}_n^{\text{RF}}(M \otimes_R P, R) = 0$.

لازم به ذکر است که ساختار RF -مدولی $M \otimes_R P$ به این صورت تعریف می‌شود که به ازای هر $g \in \Gamma$ ، هر $m \in M$ و هر $p \in P$

$$g(m \otimes p) = gm \otimes gp$$

اثبات. چون P یک $R\Gamma$ -مدول تصویری است، بنابراین $R\Gamma$ -مدول Q موجود است که $P \oplus Q = \coprod R\Gamma$. اکنون داریم:

$$\mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M \otimes_R P, R) \oplus \mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M \otimes_R Q, R) \cong \mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M \otimes_R \coprod R\Gamma, R) \cong \coprod \mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M \otimes_R R\Gamma, R).$$

اما بنابر [۲۹، قضیه ۶۳.۱۱] به ازای هر $n > 0$ ، داریم

$$\mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M \otimes_R R\Gamma, R) \cong \mathrm{Tor}_n^R(M, R) = 0.$$

$$\mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M \otimes_R P, R) = 0 \text{ بنابراین}$$

□

فرض می‌کنیم Γ یک گروه و R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد. اگر $I = \{\sum_{g \neq 1} r_g(g-1) \mid r_g \in R\}$ ، آن‌گاه I ایده‌آلی از حلقه $R\Gamma$ است که ایده‌آل افزوده نامیده می‌شود. در واقع، I هسته هم‌ریختی افزوده $\varepsilon: R\Gamma \rightarrow R$ است که به صورت $\sum_{g \in \Gamma} r_g g \mapsto \sum_{g \in \Gamma} r_g$ تعریف می‌شود. اگر M یک $R\Gamma$ -مدول باشد، آن‌گاه IM زیرمدولی از M است که توسط اعضای $gm - g$ ($m \in M$ و $g \in \Gamma$) تولید می‌شود. مدول خارج قسمتی M/IM را با M_Γ نشان داده و آن را گروه هم‌پایه‌های M نامند. اگر M و N دو $R\Gamma$ -مدول دلخواه باشند، آن‌گاه ثابت می‌شود که $M \otimes_{R\Gamma} N = (M \otimes_R N)_\Gamma$. خواننده می‌تواند فصل III از مرجع [۱۴] را جهت کسب اطلاعات بیشتر بررسی نماید.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد. اگر M و N دو $R\Gamma$ -مدول باشند به‌طوری‌که به ازای هر $i > 0$ ، $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ ، آن‌گاه به ازای هر $n > 0$ ،

$$\mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M \otimes_R N, R) \cong \mathrm{Tor}_n^{R\Gamma}(M, N)$$

اثبات. ابتدا توجه کنید که بنابر آنچه در بالا گفته شد، داریم

$$(M \otimes_R N) \otimes_{R\Gamma} R \cong (M \otimes_R N \otimes_R R)_\Gamma \cong (M \otimes_R N)_\Gamma \cong M \otimes_{R\Gamma} N.$$

اکنون دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad (*)$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها که در آن P یک $R\Gamma$ -مدول تصویری است را در نظر بگیرید. چون بنابر فرض به ازای هر $i > 0$ ، $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ ، بنابراین با اثر دادن تابعگون $M \otimes_R -$ روی دنباله دقیق $(*)$ ، دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow M \otimes_R K \longrightarrow M \otimes_R P \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0 \quad (**)$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها به دست می‌آید. اکنون با به‌کارگیری تابعگون‌های $M \otimes_{R\Gamma} -$ و $- \otimes_{R\Gamma} R$ به ترتیب روی دنباله‌های دقیق $(*)$ و $(**)$ و با توجه به اینکه بنابر لم ۷.۲ به ازای هر $i > 0$ داریم $\mathrm{Tor}_i^{R\Gamma}(M \otimes_R P, R) = 0$ ، نمودار جابه‌جایی زیر با سطرهای دقیق به دست می‌آید:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & \text{Tor}_{\Gamma}^{\text{RF}}(M \otimes_R N, R) & \longrightarrow & (M \otimes_R K) \otimes_{\text{RF}} R & \longrightarrow & (M \otimes_R P) \otimes_{\text{RF}} R \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ \circ & \longrightarrow & \text{Tor}_{\Gamma}^{\text{RF}}(M, N) & \longrightarrow & M \otimes_{\text{RF}} K & \longrightarrow & M \otimes_{\text{RF}} P \end{array}$$

چون بنابر آنچه در ابتدای اثبات گفته شد، α و β یکرختی‌اند، بنابراین γ نیز یکرختی بوده، و بنابراین

$$\text{Tor}_{\Gamma}^{\text{RF}}(M \otimes_R N, R) \cong \text{Tor}_{\Gamma}^{\text{RF}}(M, N).$$

برای کامل شدن اثبات، نمودار جابه‌جایی با سطرهای دقیق

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^{\text{RF}}(M \otimes_R N, R) & \longrightarrow & \text{Tor}_n^{\text{RF}}(M \otimes_R K, R) & \longrightarrow & \circ \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \circ & \longrightarrow & \text{Tor}_{n+1}^{\text{RF}}(M, N) & \longrightarrow & \text{Tor}_n^{\text{RF}}(M, K) & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

را که به روش بالا به دست می‌آید، در نظر بگیرید. چون P یک RF -مدول تصویری است، پس به عنوان R -مدول نیز تصویری بوده، بنابراین به ازای هر $i > 0$ ، $\text{Tor}_i^R(M, K) \cong \text{Tor}_{i+1}^{\text{RF}}(M, N) = 0$. اکنون با جایگزین کردن K به جای N در فرض قضیه و استفاده از استقراء، حکم ثابت می‌شود.

□

فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد. یادآوری می‌کنیم که بُعد همولوژیک گروه Γ بر R ، که با $\text{hd}_R \Gamma$ نشان داده می‌شود، عبارت است از بُعد یکدست RF -مدول بدیهی R ، یعنی $\text{fd}_R R$. به همین ترتیب، بُعد تصویری RF -مدول بدیهی $\text{pd}_R R$ ، را با نماد $\text{cd}_R \Gamma$ نشان داده و آن را بُعد کوهولوژیک گروه Γ بر R نامند. اکنون آماده‌ایم که نتیجه اصلی این بخش را ثابت کنیم.

قضیه ۹.۲. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد. اگر M یک RF -مدول با بُعد گرشتان یکدست متناهی باشد، آنگاه $\text{Gfd}_R M \leq \text{Gfd}_R M + \text{hd}_R \Gamma$.

اثبات. اگر $\text{Gfd}_R M$ یا $\text{hd}_R \Gamma$ نامتناهی باشند، به‌وضوح حکم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم هر دو متناهی و مثلاً $\text{hd}_R \Gamma = n$ و $\text{Gfd}_R M = m$ اکنون دنباله دقیق

$$\circ \longrightarrow F_m \xrightarrow{d_m} F_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow \circ \quad (*)$$

از RF -مدول‌ها را که در آن، $F_0, F_1, \dots, F_{m-1}$ به عنوان RF -مدول یکدست هستند، در نظر می‌گیریم. چون $F_0, F_1, \dots, F_{m-1}$ به عنوان R -مدول نیز یکدست و لذا گرشتان یکدست می‌باشند، بنابراین با توجه به [۶، قضیه ۸.۲]، F_m به عنوان R -مدول باید گرشتان یکدست باشد. بنابراین به ازای هر R -مدول تزریقی E و به ازای هر $n > 0$ ، $\text{Tor}_n^R(F_m, E) = 0$. حال فرض کنیم I یک RF -مدول تزریقی باشد. چون I به عنوان R -مدول نیز تزریقی است، بنابراین به ازای هر $n > 0$ ، $\text{Tor}_n^R(F_m, I) = 0$. لذا بنابر قضیه ۸.۲ به ازای هر $i > 0$ ،

$$\text{Tor}_i^{\text{RF}}(F_m \otimes_R I, R) \cong \text{Tor}_i^{\text{RF}}(F_m, I).$$

اکنون از آنجا که بنابر فرض $\text{hd}_R \Gamma = n$ ، پس به ازای هر $i > n$ ، $\text{Tor}_i^{\text{RF}}(F_m \otimes_R I, R) = 0$ و بنابراین برای چنین i ، $\text{Tor}_i^{\text{RF}}(F_m, I) = 0$. بنابراین به کارگیری دوباره [۶، قضیه ۸.۲] نتیجه می‌دهد که $\text{Gfd}_R F_m \leq n$. اینک، دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow F_m \longrightarrow F_{m-1} \longrightarrow \text{Im} d_{m-1} \longrightarrow 0$$

را در نظر بگیرید. تبصره ۲.۲ و [۶، قضیه ۱۱.۲] ایجاب می‌کند که $\text{Gfd}_R(\text{Im} d_{m-1}) \leq n+1$. حال با تجزیه دنباله دقیق (*) و به روش بالا به راحتی می‌توان نشان داد که $\text{Gfd}_R M \leq m+n$ ، که حکم ثابت می‌شود. □

تعریف ۱۰.۲. فرض کنیم Γ یک گروه و R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد. Γ را R -فارغ از تاب نامیم، هرگاه مرتبه هر عضو Γ نامتناهی بوده یا یکه‌ای در R باشد. بنابراین Γ گروه $\mathbb{Z}$ -فارغ از تاب است اگر و فقط اگر R فارغ از تاب باشد.

گزاره ۱۱.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد.

(الف) اگر $\text{cd}_R \Gamma = 0$ و فقط اگر Γ یک گروه متناهی R -فارغ از تاب باشد (یعنی، $|\Gamma|$ در R یکه باشد).

(ب) اگر $\text{hd}_R \Gamma = 0$ و فقط اگر Γ یک گروه به‌طور موضعی متناهی و R -فارغ از تاب باشد.

□

اثبات. [۱۱، گزاره ۱۲.۴].

یادآوری می‌کنیم که یک گروه Γ را به‌طور موضعی متناهی نامند، هرگاه هر مجموعه متناهی از اعضای Γ مشمول در یک زیرگروه متناهی از Γ باشد. نتیجه زیر به‌طور مستقیم از قضیه ۹.۲ و گزاره ۱۱.۲ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۲.۲. اگر Γ یک گروه به‌طور موضعی متناهی و R -فارغ از تاب باشد، آنگاه $\text{Gfd}_R M \leq \text{Gfd}_R M$.

تعریف ۱۳.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. بُعد سراسری گرنشتاین ضعیف R که با $\text{Gwgl dim}(R)$ نشان داده می‌شود، به‌صورت

$$\text{Gwgl dim}(R) = \sup\{\text{Gfd}_R M \mid M \text{ یک } R\text{-مدول است}\}$$

تعریف می‌شود.

این پایا اولین بار توسط بنیس^{۱۴} در [۷] تعریف شد و برای R -مدول‌های چپ آن را با نماد $\text{l.wgl dim}(R)$ و برای R -مدول‌های راست آن را با نماد $\text{r.wgl dim}(R)$ نشان داد. حدس زده شد که برای هر حلقه R این دو با یکدیگر برابرند. امانوئل^{۱۵} در [۱۹]، بُعد سراسری گرنشتاین ضعیف چپ R را با $\text{Gwgl dim}(R)$ و بُعد سراسری گرنشتاین ضعیف راست R را با $\text{Gwgl dim}(R^{\text{op}})$ نشان داد و ثابت کرد که اگر هر دو متناهی باشند، با یکدیگر برابرند و مقدار مشترک آن‌ها را با $\text{Gwgl dim}(R)$ نشان داد. به‌تازگی در [۱۶] ثابت شده است که برای هر حلقه R ، بُعد سراسری گرنشتاین ضعیف متقارن چپ-راست بوده و برای نشان دادن آن نیز از نماد $\text{Gwgl dim}(R)$ استفاده شده است. لازم به ذکر است که این پایا ارتباط تنگاتنگی با $\text{sfi}(R)$ دارد که بنابر تعریف برابر با بیشینه بُدهای یکدست R -مدول‌های (چپ) تزریقی بوده و توسط امانوئل در [۱۸] تعریف شد، سپس در [۲] و [۱۹] به‌طور جامع‌تر مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین، در [۱۶] ثابت شد که شرایط زیر هم‌ارزند:

(الف) $\text{Gwgl dim}(R)$ متناهی است.

(ب) برای هر R -مدول M ، $\text{Gfd}_R M$ متناهی است.

(ج) پایاهای $\text{sfi}(R)$ و $\text{sfi}(R^{\text{op}})$ هر دو متناهی هستند.

¹⁴Bennis ¹⁵Emmanouil

اگر این شرایط برقرار باشد، آنگاه $\text{Gwldim}(R) = \text{sfi}(R) = \text{sfi}(R^{\text{op}})$.
 اکنون با به‌کارگیری قضیه ۹.۲ و با توجه به مطالب بالا می‌توان نتیجه زیر را ارائه کرد.

نتیجه ۱۴.۲. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد. آنگاه گزاره‌های زیر برقرار هستند:
 الف) اگر $\text{Gwldim}(R\Gamma)$ متناهی باشد، آنگاه

$$\text{Gwldim}(R\Gamma) \leq \text{Gwldim}(R) + \text{hd}_R \Gamma.$$

ب) اگر $\text{sfi}(R\Gamma)$ متناهی باشد، آنگاه

$$\text{sfi}(R\Gamma) \leq \text{sfi}(R) + \text{hd}_R \Gamma.$$

این بخش را با نتیجه زیر به پایان می‌بریم.

نتیجه ۱۵.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، Γ یک گروه و Γ' زیرگروهی از آن با اندیس متناهی باشد. آنگاه

$$\text{Gwldim}(R\Gamma') = \text{Gwldim}(R\Gamma) \quad \text{الف)}$$

$$\text{sfi}(R\Gamma') = \text{sfi}(R\Gamma) \quad \text{ب)}$$

اثبات. الف) ابتدا فرض می‌کنیم $\text{Gwldim}(R\Gamma) = n$ و متناهی باشد. $R\Gamma'$ -مدول M را در نظر می‌گیریم. آنگاه

$$\text{Gfd}_{R\Gamma'}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M) \leq n \quad \text{به فرض}$$

نتیجه ۶.۲ همراه با این واقعیت که $R\Gamma'$ -مدول M جمع‌وند مستقیمی از $R\Gamma'$ -مدول $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M$ است و [۶،

گزاره ۲۰.۲] نتیجه می‌دهد

$$\text{Gfd}_{R\Gamma'} M \leq \text{Gfd}_{R\Gamma'}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M) = \text{Gfd}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M) \leq n$$

$$\text{Gwldim}(R\Gamma') \leq \text{Gwldim}(R\Gamma)$$

بنابراین عکس نامساوی، بنابر نتیجه ۶.۲ واضح است.

ب) با توجه به قسمت قبل واضح است.

□

۳. مدول‌های گرنشتاین همتابی بر حلقه‌های گروهی

در این بخش، به مطالعه مدول‌های گرنشتاین همتابی و بُعدهای تعریف شده بر مبنای این نوع مدول‌ها روی حلقه‌های گروهی می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که R -مدولی مانند M را گرنشتاین همتابی نامند، هرگاه به ازای هر R -مدول گرنشتاین یکدست F ، $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0$ ، واضح است که مدول‌های تزریقی، گرنشتاین همتابی هستند. همچنین از آنجا که مدول‌های یکدست، گرنشتاین یکدست هستند، به راحتی می‌توان دید که مدول‌های گرنشتاین همتابی نیز همتابی هستند. بُعد گرنشتاین همتابی یک R -مدول مانند M ، که در این مقاله آن را با نماد $\text{Gctd}_R M$ نشان می‌دهیم، عبارت است از کوچکترین عدد صحیح نامنفی n که به ازای هر R -مدول گرنشتاین یکدست F ، $\text{Ext}_R^{n+1}(F, M) = 0$ ، اگر چنین n ی موجود نباشد، قرار می‌دهیم $\text{Gctd}_R M = \infty$. توجه کنید که با توجه به [۲۵، گزاره ۱.۳] اگر و فقط اگر دنباله دقیقی از R -مدول‌ها مانند

$$F^\bullet : 0 \longrightarrow M \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^m \longrightarrow 0$$

موجود باشد، به‌طوری‌که C^i ها R -مدول‌های گرنشتاین همتابی هستند.

در ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، Γ یک گروه و Γ' زیرگروهی از آن باشد. اگر M یک $R\Gamma$ -مدول گرنشتاین همتابی باشد، آن‌گاه M به‌عنوان $R\Gamma'$ -مدول نیز گرنشتاین همتابی است.

اثبات. فرض کنیم F یک $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین یکدست باشد. پس بنابر گزاره ۴.۲، $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F$ به‌عنوان $R\Gamma$ -مدول گرنشتاین یکدست است. بنابراین طبق فرض $\text{Ext}_{R\Gamma}^1(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F, M) = 0$. اکنون، به‌کارگیری یکرختی $\text{Ext}_{R\Gamma}^1(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F, M) \cong \text{Ext}_{R\Gamma'}^1(F, M)$ از [۸، نتیجه ۴.۸.۲] نتیجه می‌دهد که $\text{Ext}_{R\Gamma'}^1(F, M) = 0$. پس M یک $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین همتابی است. $\square$

لم ۲.۳. فرض کنیم Γ' زیرگروهی از Γ با اندیس متناهی باشد. اگر N یک $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین همتابی باشد، آن‌گاه $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N$ یک $R\Gamma$ -مدول گرنشتاین همتابی است.

اثبات. فرض کنیم F یک $R\Gamma$ -مدول گرنشتاین یکدست باشد. دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad (\dagger)$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها را که در آن P یک $R\Gamma$ -مدول تصویری است، در نظر بگیرید. چون تابعگون تحدید $\downarrow_{\Gamma'}$ $(-)$ دقیق است، بنابراین با اثر دادن آن بر $(\dagger)$ دنباله دقیق زیر از $R\Gamma'$ -مدول‌ها به‌دست می‌آید:

$$0 \longrightarrow K \downarrow_{\Gamma'} \longrightarrow P \downarrow_{\Gamma'} \longrightarrow F \downarrow_{\Gamma'} \longrightarrow 0 \quad (\dagger\dagger)$$

توجه کنید که $P \downarrow_{\Gamma'}$ یک $R\Gamma'$ -مدول تصویری بوده و از آنجا که $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ ، بنابراین با توجه به قضیه ۵.۲، $F \downarrow_{\Gamma'}$ یک $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین یکدست است. اکنون، با اثر دادن تابعگون‌های $\text{Hom}_{R\Gamma}(-, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N)$ و $\text{Hom}_{R\Gamma'}(-, N)$ به‌ترتیب روی دنباله‌های دقیق $(\dagger)$ و $(\dagger\dagger)$ و سپس با به‌کارگیری یکرختی‌های طبیعی

$$\text{Hom}_{R\Gamma'}(-, N) \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(-, \text{Hom}_{R\Gamma'}(R\Gamma, N)) \cong \text{Hom}_{R\Gamma}(-, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N)$$

و همچنین با توجه به‌اینکه طبق فرض $\text{Ext}_{R\Gamma'}^1(F \downarrow_{\Gamma'}, N) = 0$ ، نمودار جابه‌جایی زیر با سطرهای دقیق به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma}(F, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma}(P, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma}(K, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma'}(F \downarrow_{\Gamma'}, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma'}(P \downarrow_{\Gamma'}, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma'}(K \downarrow_{\Gamma'}, N) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که همریختی $\text{Hom}_{R\Gamma}(P, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) \rightarrow \text{Hom}_{R\Gamma}(K, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N)$ پوشاست. از طرفی با اثر دادن تابعگون $\text{Hom}_{R\Gamma}(-, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N)$ روی دنباله دقیق $(\dagger)$ ، دنباله دقیق طولانی

$$\text{Hom}_{R\Gamma}(P, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) \longrightarrow \text{Hom}_{R\Gamma}(K, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N)$$

$$\longrightarrow \text{Ext}_{R\Gamma}^1(F, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) \longrightarrow \text{Ext}_{R\Gamma}^1(P, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) = 0$$

به دست می‌آید. این نیز نتیجه می‌دهد $\circ \text{Ext}_{R\Gamma}^1(F, R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) = \circ$. بنابراین، $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N$ گرنشتاین همتایی است. □

نتیجه ۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و Γ' زیرگروهی از گروه Γ با اندیس متناهی باشد.

(الف) برای هر $R\Gamma$ -مدول M ، $\text{Gctd}_{R\Gamma'} M \leq \text{Gctd}_{R\Gamma} M$.

(ب) برای هر $R\Gamma'$ -مدول N ، $\text{Gctd}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) \leq \text{Gctd}_{R\Gamma'} N$.

اثبات. (الف) فرض کنیم $\text{Gctd}_{R\Gamma} M$ متناهی و برابر با n باشد. $R\Gamma'$ -مدول گرنشتاین یکدست F را در نظر

بگیرید. از آنجا که بنابر گزاره ۴.۲، $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F$ یک $R\Gamma$ -مدول گرنشتاین یکدست است، بنابراین با

توجه به تعریف داریم $\circ \text{Ext}_{R\Gamma}^{n+1}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F, M) = \circ$. از طرفی، چون بنابر [۸]، نتیجه ۴.۸.۲ یکرختی

$\text{Ext}_{R\Gamma'}^{n+1}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} F, M) \cong \text{Ext}_{R\Gamma'}^{n+1}(F, M)$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم $\text{Gctd}_{R\Gamma'} M \leq n$ و حکم ثابت

می‌شود.

(ب) با به‌کارگیری لم ۲.۳ و با دوگان کردن اثبات قسمت (ب) گزاره ۴.۲ به راحتی ثابت می‌شود.

□

تعریف ۴.۳. (الف) فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ' زیرگروهی از گروه Γ باشد. دنباله دقیق

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \circ$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها را $R\Gamma'$ -شکافتنی گویند، هرگاه $\beta' \in \text{Hom}_{R\Gamma'}(C, B)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\beta \circ \beta' = \text{id}_C$ ، که

این هم‌ارز است با این‌که $\alpha' \in \text{Hom}_{R\Gamma'}(B, A)$ موجود است به‌طوری‌که $\alpha' \circ \alpha = \text{id}_A$.

(ب) $R\Gamma$ -مدول E را Γ' -تزریقی نسبی نامند، هرگاه تابعگون $\text{Hom}_{R\Gamma}(-, E)$ دقیق بودن هر دنباله $R\Gamma'$ -شکافتنی

$$\circ \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow \circ$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها را حفظ کند.

در حالتی‌که $\Gamma' = \{\Gamma\}$ ، مدول‌های Γ' -تزریقی نسبی را به‌طور ضعیف تزریقی نامند. اگر Γ' زیرگروهی از Γ با اندیس

متناهی باشد، ثابت می‌شود که $R\Gamma$ -مدول E تزریقی است اگر و فقط اگر Γ' -تزریقی نسبی بوده و به‌عنوان $R\Gamma'$ -مدول نیز

تزریقی باشد [۱۵].

گزاره زیر که از [۲۶]، قضیه ۱ نتیجه می‌شود، مدول‌های Γ' -تزریقی نسبی را رده‌بندی می‌کند.

گزاره ۵.۳. فرض کنیم Γ یک گروه و Γ' زیرگروهی از آن باشد. آن‌گاه $R\Gamma$ -مدول M ، Γ' -تزریقی نسبی است اگر و فقط اگر

M جمع‌وند مستقیمی از $\text{Hom}_{R\Gamma'}(R\Gamma, M)$ باشد.

گزاره ۶.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه متناهی باشد. در این صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

(الف) هر $R\Gamma$ -مدول M به‌طور ضعیف تزریقی است.

(ب) $R\Gamma$ -مدول بدیهی R به‌طور ضعیف تزریقی است.

(ج) مرتبه Γ در R یکه است.

□

اثبات. [۱۰]، نتیجه ۷.۲ را ببینید.

قضیه ۷.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ' زیرگروهی از گروه Γ با اندیس متناهی باشد. اگر M یک RG -مدول Γ' -تزریقی نسبی بوده و به‌عنوان RG -مدول گرنشتاین همتابی باشد، آنگاه به‌عنوان RG -مدول نیز گرنشتاین همتابی است.

اثبات. چون M به‌عنوان RG -مدول گرنشتاین همتابی است، لم ۲.۳ نتیجه می‌دهد که $\text{RG} \otimes_{\text{RG}'} M$ و بنابراین $\text{Hom}_{\text{RG}'}(\text{RG}, M)$ ، RG -مدول گرنشتاین همتابی است. از طرفی، چون بنابر قضیه ۵.۳ مدول M جمع‌وند مستقیمی از $\text{Hom}_{\text{RG}'}(\text{RG}, M)$ به‌عنوان RG -مدول می‌باشد، پس M نیز یک RG -مدول گرنشتاین همتابی است، زیرا به‌وضوح مدول‌های گرنشتاین همتابی نسبت به جمع‌وند مستقیم بسته‌اند.

□

نتیجه زیر با توجه به قضیه قبل و نتیجه ۲.۳ واضح است.

نتیجه ۸.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، Γ یک گروه و Γ' زیرگروهی از آن با اندیس متناهی باشد. اگر M یک RG -مدول Γ' -تزریقی نسبی باشد، آنگاه $\text{Gctd}_{\text{RG}'} M = \text{Gctd}_{\text{RG}} M$.

همچنین با توجه به گزاره ۶.۳، نتیجه زیر از قضیه ۷.۳ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ گروهی متناهی که $|\Gamma|$ در حلقه R یک‌به‌یک باشد.
 الف) هر RG -مدول M گرنشتاین همتابی است اگر و فقط اگر M به‌عنوان RG -مدول گرنشتاین همتابی باشد.
 ب) اگر N یک RG -مدول باشد، آنگاه $\text{Gctd}_{\text{RG}} N = \text{Gctd}_{\text{RG}'} N$.

فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه باشد. یادآوری می‌کنیم که اگر M و N دو RG -مدول باشند، آنگاه $\text{Hom}_R(M, N)$ دارای ساختار RG -مدولی است و به این‌صورت تعریف می‌شود که به ازای هر $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ ، هر $x \in M$ و هر $g \in \Gamma$ ، $(gf)(x) = g[f(g^{-1}x)]$.

در ادامه این بخش با به‌کارگیری $\text{cd}_R \Gamma$ و در حالتی که Γ یک گروه متناهی است، به بررسی رابطه بُعد گرنشتاین همتابی مدول‌ها بر حلقه گروهی RG و حلقه R می‌پردازیم. برای این منظور، به گزاره زیر نیاز داریم.

گزاره ۱۰.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، Γ یک گروه، و M و N دو RG -مدول باشند که به ازای هر $i > 0$ در شرط $\text{Ext}_R^i(M, N) = 0$ صدق کنند. آنگاه، به ازای هر $n > 0$

$$\text{Ext}_{\text{RG}}^n(M, N) \cong \text{Ext}_{\text{RG}}^n(R, \text{Hom}_R(M, N)).$$

اثبات. ابتدا توجه کنید که بنابر [۸، گزاره ۷.۱۰.۳] داریم:

$$\text{Hom}_{\text{RG}}(M, N) \cong \text{Hom}_{\text{RG}}(R, \text{Hom}_R(M, N)). \quad (\dagger)$$

اکنون دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (*)$$

از RG -مدول‌ها را که در آن P یک RG -مدول تصویری است، در نظر بگیرید. با اثر دادن تابعگون $\text{Hom}_R(-, N)$ روی آن و با توجه به فرض، دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(P, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(K, N) \longrightarrow 0 \quad (**)$$

به‌دست می‌آید. از طرفی، چون P به‌عنوان R -مدول نیز تصویری است، با به‌کارگیری [۸، گزاره ۱۰.۳]، به ازای هر $n > 0$ دنباله زیر از یکرختی‌ها حاصل می‌شود:

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^n(R, \text{Hom}_R(P, N)) \cong \text{Ext}_{R\Gamma}^n(P \otimes_R R, N) \cong \text{Ext}_{R\Gamma}^n(P, N) = 0.$$

بنابراین، با اثر دادن تابع‌گون‌های $\text{Hom}_{R\Gamma}(R, -)$ و $\text{Hom}_{R\Gamma}(-, N)$ به‌ترتیب، روی دنباله‌های دقیق $(*)$ و $(**)$ ، نمودار جابه‌جایی زیر با سطرهای دقیق به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{R\Gamma}(R, \text{Hom}_R(P, N)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma}(R, \text{Hom}_R(K, N)) & \longrightarrow & \text{Ext}_{R\Gamma}^1(R, \text{Hom}_R(M, N)) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ \text{Hom}_{R\Gamma}(P, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_{R\Gamma}(K, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_{R\Gamma}^1(M, N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

از آنجا که هم‌ریختی‌های α و β بنابر $(\dagger)$ یکرختی هستند، بنابراین γ نیز یکرختی بوده، لذا

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^1(M, N) \cong \text{Ext}_{R\Gamma}^1(R, \text{Hom}_R(M, N)).$$

به همین ترتیب، می‌توان نمودار جابه‌جایی زیر با سطرهای دقیق را به‌دست آورد:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{R\Gamma}^n(R, \text{Hom}_R(K, N)) & \longrightarrow & \text{Ext}_{R\Gamma}^{n+1}(R, \text{Hom}_R(M, N)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{R\Gamma}^n(K, N) & \longrightarrow & \text{Ext}_{R\Gamma}^{n+1}(M, N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

چون به‌وضوح به ازای هر $i > 0$ یکرختی $\text{Ext}_R^i(K, N) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(M, N)$ برقرار است، فرض قضیه ایجاب می‌کند که به ازای هر $i > 0$ ، $\text{Ext}_R^i(K, N) = 0$. بنابراین، با جایگزین کردن K به‌جای M و با استفاده از استقراء نتیجه به‌دست می‌آید. $\square$

اکنون آماده‌ایم که قضیه زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۱۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه متناهی باشد. آنگاه، به ازای هر $R\Gamma$ -مدول M

$$\text{Gctd}_{R\Gamma} M \leq \text{Gctd}_R M + \text{cd}_R \Gamma.$$

اثبات. اگر یکی از مقادیر $\text{Gctd}_R M$ یا $\text{cd}_R \Gamma$ نامتناهی باشد، حکم به‌وضوح برقرار است. بنابراین فرض کنیم $\text{Gctd}_R M = m$ و $\text{cd}_R \Gamma = n$ و هر دو مقدار متناهی باشند. دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{m-1} \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad (\dagger)$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها را که در آن $C^0, C^1, \dots, C^{m-1}$ گرنشتاین هم‌تابی هستند، در نظر بگیرید. چون بنابر لم ۱۰.۳ مدول‌های $C^0, C^1, \dots, C^{m-1}$ به‌عنوان R -مدول نیز گرنشتاین هم‌تابی هستند، پس بنابر [۲۵، گزاره ۱۰.۳] C نیز به‌عنوان R -مدول گرنشتاین هم‌تابی است. $R\Gamma$ -مدول گرنشتاین یک‌دست F را در نظر بگیرید. با توجه به قضیه ۵.۲، F به‌عنوان R -مدول

گرنشتاین یکدست است، در نتیجه به ازای هر $n > 0$ داریم، $\text{Ext}_R^n(F, C) = 0$. بنابراین گزاره ۱۰.۳ ایجاب می‌کند که به ازای هر $i > 0$

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^i(F, C) \cong \text{Ext}_{R\Gamma}^i(R, \text{Hom}_R(F, C)).$$

اکنون این یکرختی و فرض $\text{cd}_R \Gamma = n$ ، نتیجه می‌دهد که $\text{Ext}_{R\Gamma}^{n+1}(F, C) = 0$. بنابراین، با به‌کارگیری دوباره [۲۵]، گزاره ۱.۳ [نتیجه می‌گیریم که $\text{Gctd}_{R\Gamma} C \leq n$ و این نیز وجود دنباله‌ای دقیق مانند

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C^m \longrightarrow C^{m+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{m+n} \longrightarrow 0. \quad (\dagger\dagger)$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها را که در آن $C^m, C^{m+1}, \dots, C^{m+n}$ مدول‌های گرنشتاین همتابی هستند، تضمین می‌کند. در پایان، از به هم چسباندن دنباله‌های دقیق $(\dagger)$ و $(\dagger\dagger)$ دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{m+n-1} \longrightarrow C^{m+n} \longrightarrow 0.$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها به دست می‌آید که در آن C^i ها گرنشتاین همتابی بوده، بنابراین $\text{Gctd}_{R\Gamma} M \leq m+n$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$
اکنون با استفاده از نتیجه ۳.۳، قضیه قبل و گزاره ۱۱.۲، می‌توان اثباتی دیگر برای قسمت (ب) نتیجه ۹.۳، یعنی نتیجه زیر ارائه کرد.

نتیجه ۱۲.۳. اگر Γ یک گروه متناهی و $|\Gamma|$ در حلقه جابه‌جایی R یک‌گانه باشد، آن‌گاه برای هر $R\Gamma$ -مدول M ، داریم $\text{Gctd}_{R\Gamma} M = \text{Gctd}_R M$.

تعریف ۱۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. بُعد سراسری گرنشتاین همتابی چپ R ، که آن را با $l.\text{Gctdim}(R)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l.\text{Gctdim}(R) = \sup\{\text{Gctd}_R M \mid M \text{ } R\text{-مدول چپ است}\}.$$

به طور مشابه و با تبدیل صفت چپ به راست، بُعد سراسری گرنشتاین همتابی راست R تعریف می‌شود و آن را با $r.\text{Gctdim}(R)$ نشان می‌دهیم. در حالتی که حلقه R با حلقه متضادش، R^{op} ، یکرخت است، چون تمایزی بین R -مدول‌های چپ و راست وجود ندارد، از نوشتن l و r اجتناب نموده و در این حالت از نماد $\text{Gctdim}(R)$ ، تنها برای نشان دادن بُعد سراسری گرنشتاین همتابی R استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی، Γ یک گروه و Γ' زیرگروهی از آن با اندیس متناهی باشد. آن‌گاه،

$$\text{Gctdim}(R\Gamma') \leq \text{Gctdim}(R\Gamma).$$

به علاوه اگر هر $R\Gamma$ -مدول، Γ' -تزریقی نسبی باشد، آن‌گاه

$$\text{Gctdim}(R\Gamma') = \text{Gctdim}(R\Gamma).$$

اثبات. فرض کنیم N یک $R\Gamma'$ -مدول باشد. چون $R\Gamma'$ -بروریختی $N \longrightarrow N \longrightarrow R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N$ شکافتنی است، بنابراین N جمع‌وند مستقیمی از $R\Gamma'$ -مدول $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N$ است. پس با توجه به [۲۵]، گزاره ۳.۲ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\text{Gctd}_{R\Gamma'} N \leq \text{Gctd}_{R\Gamma'}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N).$$

از طرفی، چون بنابر قسمت (الف) گزاره ۳.۳

$$\text{Gctd}_{R\Gamma'}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) \leq \text{Gctd}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} N) \leq \text{Gctdim}(R\Gamma)$$

بنابراین $\text{Gctdim}(R\Gamma') \leq \text{Gctdim}(R\Gamma)$.

برای اثبات قسمت دوم، $R\Gamma$ -مدول دلخواه M را در نظر بگیرید. چون بنابر گزاره ۵.۳ M یک جمع‌وند مستقیم از $\text{Hom}_{R\Gamma'}(R\Gamma, M)$ و لذا جمع‌وند مستقیمی از $R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M$ است، بنابراین به‌کارگیری دوباره [۲۵، گزاره ۳.۲]، نامساوی

$$\text{Gctd}_{R\Gamma} M \leq \text{Gctd}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M)$$

را نتیجه می‌دهد. از طرفی، چون بنابر قسمت (ب) گزاره ۳.۳

$$\text{Gctd}_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_{R\Gamma'} M) \leq \text{Gctd}_{R\Gamma'} M \leq \text{Gctdim}(R\Gamma')$$

پس $\text{Gctdim}(R\Gamma) \leq \text{Gctdim}(R\Gamma')$ و تساوی برقرار است.

□

نتیجه زیر از گزاره ۶.۳ و قضیه قبل به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۵.۳. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه متناهی باشد که مرتبه آن در R یک‌گانه است، آنگاه

$$\text{Gctdim}(R\Gamma) = \text{Gctdim}(R).$$

گزاره ۱۶.۳. اگر R یک حلقه جابه‌جایی و Γ گروهی متناهی باشد، آنگاه

$$\text{Gctdim}(R\Gamma) \leq \text{Gctdim}(R) + \text{cd}_R \Gamma.$$

اثبات. فرض کنیم $\text{Gctdim}(R) = m$ و $\text{cd}_R \Gamma = n$ و M یک $R\Gamma$ -مدول دلخواه باشد، کافی است ثابت کنیم

$$\text{Gctd}_{R\Gamma} M \leq m + n.$$

برای این منظور، دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow C^{m-1} \longrightarrow C^m \longrightarrow 0$$

از $R\Gamma$ -مدول‌ها را که در آن به ازای هر $0 \leq i \leq m-1$ یک $R\Gamma$ -مدول گرشت‌تین هم‌تابی است، در نظر بگیرید. از آنجا که بنابر لم ۱.۳، مدول‌های $C^0, C^1, \dots, C^{m-1}$ به‌عنوان R -مدول نیز گرشت‌تین هم‌تابی هستند، بنابراین [۲۵، گزاره ۱.۳] گرشت‌تین هم‌تابی بودن C^m به‌عنوان R -مدول را نتیجه می‌دهد، زیرا بنابر فرض $\text{Gctdim}(R) = m$. اکنون، اگر F یک $R\Gamma$ -مدول گرشت‌تین یک‌دست باشد، آنگاه از گزاره ۱۰.۳ و فرض $\text{cd}_R \Gamma = n$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $i > n$

$$\text{Ext}_{R\Gamma}^i(F, C^m) \cong \text{Ext}_R^i(R, \text{Hom}_R(F, C^m)) = 0.$$

پس $\text{Gctd}_{R\Gamma} C^m \leq n$ ، که از اینجا به‌راحتی و همانند اثبات قضیه ۱۱.۳ می‌توان نتیجه گرفت $\text{Gctd}_{R\Gamma} M \leq m + n$.

□

نتیجه زیر، با توجه به قضیه ۱۴.۳ و [۹، ۲۰.۳]، به‌سادگی از گزاره قبل به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۷.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و Γ یک گروه متناهی باشد. اگر $\text{cd}_R \Gamma$ متناهی باشد، آنگاه

$$\text{Gctdim}(R\Gamma) = \text{Gctdim}(R).$$

مراجع

- [1] J. Asadollahi, A. Bahlekeh and S. Salarian, On the hierarchy of cohomological dimensions of groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **213** (2009) 1795–1803.
- [2] J. Asadollahi, A. Bahlekeh, A. Hajizamani and Sh. Salarian, On certain homological invariants of groups, *J. Algebra*, **335** (2011) 18–35.
- [3] M. Auslander, Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative, Secrétariat mathématique, Paris, 1967, Séminaire d'algèbre commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/67. Texte rédigé, d'après des exposés de Maurice Auslander, par Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro, École Normale Supérieure de Jeunes Filles.
- [4] A. Bahlekeh, (Strongly) Gorenstein flat modules over group rings, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **90** (2014) 57–64.
- [5] A. Bahlekeh, F. Dembegioti and O. Talelli, Gorenstein dimension and proper actions, *Bull. London. Math. Soc.*, **41** (2009) 859–871.
- [6] D. Bennis, Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions, *Commun. Algebra*, **37** (2009) 855–868.
- [7] D. Bennis, Weak Gorenstein global dimension, *Int. Electron. J. Algebra*, **8** (2010) 140–152.
- [8] D. J. Benson, *Representations and Cohomology I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 30, Cambridge University Press, 1991, reprinted in paperback, 1998.
- [9] D. J. Benson and K. R. Goodearl, Periodic flat modules, and flat modules for finite groups, *Pacific J. Math.*, **196** (2000) 45–66.
- [10] D. Benson, S. B. Iyengar and H. Krause, Module categories for group algebras over commutative rings, *J. K-Theory*, **11** (2013) 297–329.
- [11] R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups*, Queen Mary College Mathematics Notes, Mathematics Department, Queen Mary College, 1977.
- [12] R. Biswas, Benson's cofibrants, Gorenstein projectives and a related conjecture, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **64**(4) (2021) 779–799.
- [13] R. Biswas, On some cohomological invariants for large families of infinite groups, *New York J. Math.*, **27** (2021) 818–839.
- [14] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics 87, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [15] L. G. Chouinard, Projectivity and relative projectivity over group rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **7** (1976) 287–302.
- [16] L. W. Christensen, S. Estrada and P. Thompson, Gorenstein weak global dimension is symmetric, *Math. Nachr.*, **294** (2021) 2121–2128.

- [17] I. G. Connell, On the group ring, *Can. J. Math.*, **15** (1963) 650–685.
- [18] I. Emmanouil, On certain cohomological invariants of groups, *Adv. Math.*, **225** (2010) 3446–3462.
- [19] I. Emmanouil, On the finiteness of Gorenstein homological dimensions, *J. Algebra*, **372** (2012) 376–396.
- [20] I. Emmanouil and O. Talelli, Finiteness criteria in Gorenstein homological algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366** (2014) 6429–6351.
- [21] I. Emmanouil and O. Talelli, Gorenstein dimension and group cohomology with group ring coefficients, *J. London Math. Soc.*, **97** (2018) 306–324.
- [22] I. Emmanouil and O. Talelli, On the Gorenstein cohomological dimension of group extensions, *J. Algebra*, **605** (2022) 403–428.
- [23] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, Gorenstein injective and projective modules, *Math. Z.*, **220** (1995) 611–633.
- [24] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda and B. Torrecillas, Gorenstein flat modules, *Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan*, **10** (1993) 1–9.
- [25] Z. Gao, On Gorenstein cotorsion dimension over GF -closed rings, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **51** (2014) 173–187.
- [26] D. G. Higman, Modules with a group of operators, *Duke Math. J.*, **21** (1954) 369–376.
- [27] H. Holm, Gorenstein homological dimensions, *J. Pure Appl. Algebra*, **189** (2004) 167–193.
- [28] R. Lei and F. Meng, Notes on Gorenstein cotorsion modules, *Mathematical Notes*, **96** (2014) 716–731.
- [29] J. J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, *Pure and Applied Mathematics*, **85**, Academic Press, New York-London, 1979.
- [30] J. Saroch and J. Šťovíček, Singular compactness and definability for Σ -cotorsion and Gorenstein modules, *Sel. Math.*, New Ser. **26** (2020).
- [31] J. Stallings, On torsion-free groups with infinitely many ends, *Ann. Math.*, **88** (1968) 312–334.
- [32] R. G. Swan, Groups of cohomological dimension one, *J. Algebra*, **12** (1969) 585–601.
- [33] O. Talelli, On the Gorenstein and cohomological dimension of groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **142** (2014) 1175–1180.

علی حاجی‌زمانی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، هرمزگان، بندرعباس، ایران.

hajizamani@hormozgan.ac.ir

علی حاجی‌زمانی متولد آذرماه ۱۳۵۷ در شهر شیراز است. وی در سال ۱۳۸۹ از رساله دکتری خود تحت عنوان “مطالعه روش‌های (کو)همولوژیکی در نظریه گروه‌ها” به راهنمایی دکتر جواد اسدالهی و دکتر شکراله سالاریان دفاع کرد. نامبرده از سال ۱۳۹۰ تاکنون عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه هرمزگان است.



Some results on Gorenstein flat (Gorenstein cotorsion) dimensions of modules over group rings

Ali Hajizamani

Abstract: Let R be a commutative ring, Γ be a group, and $\Gamma' \leq \Gamma$ be a subgroup of finite index. In this paper, we study the class of Gorenstein flat (resp. Gorenstein cotorsion) modules over the group ring $R\Gamma$. In particular, we discuss the relationship between Gorenstein flat (resp. Gorenstein cotorsion) dimension of $R\Gamma$ -modules and that of $R\Gamma'$ -modules. We will prove that, for any $R\Gamma$ -module M of finite Gorenstein flat dimension ($\text{Gfd}_{R\Gamma} M < \infty$), there is an inequality $\text{Gfd}_{R\Gamma} M \leq \text{Gfd}_R M + \text{hd}_R \Gamma$, where $\text{hd}_R \Gamma$ denotes the homological dimension of Γ over R . Analogously, we prove that if Γ is finite, there is an inequality $\text{Gctd}_{R\Gamma} M \leq \text{Gctd}_R M + \text{cd}_R \Gamma$, where $\text{Gctd}_{R\Gamma} M$ ($\text{Gctd}_R M$) is the Gorenstein cotorsion dimension of module M over $R\Gamma$ (resp. over R) and $\text{cd}_R \Gamma$ is the cohomological dimension of Γ over R .

Keywords: Group ring, Gorenstein flat module, Gorenstein cotorsion module, Gorenstein flat dimension, Gorenstein cotorsion dimension.

Ali Hajizamani

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran.

Email: hajizamani@hormozgan.ac.ir

Communicated by Javad Asadollahi.

Article Type: Research Paper.

Received: 19/10/2022, Accepted: 24/01/2023.