ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۷، شماره ۳ (۱۴۰۱)، صص. ۲۵-۵۵
http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

# مفهوم و پیشینهٔ نسبت‌های طلایی در میراث مکتوب

فاطمه سادات سعادتمند

**چکیده.** دربارهٔ نسبت طلایی افسانه‌پردازی بسیار است. بعضی آن را به اعداد مقدس نزد فیثاغوریان مربوط می‌سازند و بعضی جایگاهی عالی در هندسه و معماری برای آن قائل‌اند و حتی گاهی اشاره شده که ساخت معابد و سازه‌های خاص کهن بر مبنای این اعداد و تناسبی از آن‌ها صورت گرفته است. بر آنیم تا با پژوهش در منابع مکتوب دورهٔ اسلامی، دست‌نویس‌ها و رسایل عربی و فارسی که به‌عنوان منابع اولیه در دسترس است و همچنین از طریق تألیفات و مآخذ دست چندمی که از آثار یونان باستان به یونانی، لاتینی و دیگر زبان‌ها دستیاب است، پیشینهٔ مکتوب نسبت‌های ویژه را مطالعه کنیم و آن دسته از نقوش هندسی که به‌دلیل ویژگی‌های خاص بصری از آن‌ها با عنوان «مقدّس» یا «طلایی» نام می‌برند را شرح دهیم. در این گفتار، پس از بیان مفهوم و تعاریف ریاضی، نخست به شواهد این موضوع در منابع مکتوب معاصر و سده‌های میانی اشاره شده و پس از بررسی پیشینهٔ موضوع در یونان باستان، برخی آثار دورهٔ اسلامی با موضوع حساب یا هندسه که به‌طور مستقیم یا غیر مستقیم به این مسأله پرداخته‌اند را بر می‌شماریم. از آنجا که اهداف اصلی این پژوهش بر بررسی رسایل دورهٔ اسلامی استوار است، تنها به معرفی مختصر آثار و کتب دوران میانی بسنده می‌شود و سعی بر آن است تا کوشش‌های صورت گرفته در دورهٔ اسلامی و قبل از رنسانس، بیش از پیش نمایان و برجسته گردد.

## ۱. مقدمه

یکی از محبوب‌ترین نظریات بین زیبایی‌شناسان، نظریهٔ «تقسیم طلایی» است. تقسیم طلایی، نسبت طلایی یا تناسب مقدس که در دوره‌های مختلف تاریخی نام‌های گوناگونی به خود گرفته، در ترکیب‌بندی هنری، معماری بناها، تندیس‌ها و پیکرتراشی‌های بسیاری شناسایی شده و برای موزون‌سازی صنایع هنری تا امروز استفاده گردیده است. اینکه تا چه میزان این نسبت از پیشینه‌ای منطقی برخوردار است و تا چه میزان بر اساس روابط ریاضیاتی یا قضایای هندسی در طول تاریخ تبیین و تحقیق شده است یا اینکه تا چه میزان بحث زیبایی‌شناختی آن مبتنی بر قواعد ریاضیاتی مدوّن گشته، همواره مورد بحث مورّخان علم بوده و هست. هدف اصلی ما در این گفتار، بررسی ردپای این تناسب در متون علمی دورهٔ اسلامی و اشاره به پیشینهٔ یونانی آن است.

عبارات و کلمات کلیدی: تقسیم طلایی، نسبت طلایی، ذات وسط و طرفین، مثلث مخمس، تناسب مقدس، شاخص طلایی، هندسه، معماری.
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۲/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۰۲
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506 .

مرکُوسکی در مقاله‌ای با موضوع غلط فهمی‌هایی که دربارهٔ نسبت طلایی وجود دارد، به برداشت‌های نادرست و بسیاری از موارد افسانه‌ای اشاره می‌کند که به دلیل تکرار بیش از اندازه و نبود مدارک و شواهد کافی تاریخی به صورت «غلط مشهور» در آمده‌اند طوری که پیشینهٔ واقعی نسبت طلایی و ارتباط مستقیم آن با یونان باستان را مورد تردید قرار می‌دهد.

در نظر وی، عدم رعایت دقیق این نسبت و وجود خطاهایی از مرتبه یک‌دهم اعشار در بسیاری از بناهای تاریخی، بطلان ادعای بسیاری از نویسندگان مقالات را نشان می‌دهد[۱]. افزون بر آن، گزارش‌ها و تألیفاتی که در سال‌های اخیر توسط پژوهشگران ایرانی در این زمینه و راجع به نسبت طلایی و ارتباط آن با مصنوعات دستی یا سازه‌های بنایی در دورهٔ اسلامی انجام گرفته نیز دربردارندهٔ مستندات ریاضیاتی قوی نمی‌باشد. بسیاری از این نوشته‌جات به نقوش تزیینی، آرایه‌ها و مقرنس‌های مساجد جامع اصفهان و تبریز و دیگر اماکن مقدسه می‌پردازد که شکل گره‌بندی‌ها و خاصیت خودمتشابه (ویژگی فرکتال[۲]) آن اذهان زیادی را به سوی نسبت طلایی با تعریف مدرن و امروزی آن رهنمون می‌گردد؛ حال آنکه بررسی‌ها نشان می‌دهد اصطلاح نسبت طلایی با مفهوم امروزی و مدرن آن، دقیقاً چیزی نبوده که معماران سنتی در نقشه‌کشی یا ساخت بنا مورد توجه قرار می‌دادند و همچنین تناسب مقدس نیز آن کاربرد هندسی محض امروزی را در معماری و نقشه‌کشی نداشته است. بنابراین گرچه کاربرد تجربی زیبایی‌شناختی نسبت طلایی هنوز جای بحث دارد، بررسی رابطه هندسهٔ نظری مبتنی بر قضیه‌ها با هندسهٔ عملی و معماری در گذر تاریخ، هیچ‌گاه مسأله ساده‌ای نبوده و نیست و تحقیقات و بررسی‌های بیشتری در این زمینه می‌طلبد که به پاره‌ای از آن در این گفتار اشاره خواهد شد.

## ۲. تعریف ریاضیاتی (جبری و هندسی)

افلاطون در یکی از مکالماتش از قول تیمائوس، که از پیروان فیثاغورس است، چنین می‌گوید:

> «ناممکن است دو چیز را به شکلی زیبا بدون وجود سومی به هم مربوط کرد زیرا یک واسطهٔ ارتباطی برای آنکه آن دو را متحد کند باید وجود داشته باشد و این پیوند وقتی به بهترین شکل به‌دست می‌آید که تناسبی برقرار باشد؛ زیرا هرگاه از سه مقدار نسبت، مقدار میانی به مقدار کوچکتر برابر نسبت بزرگتر به مقدار میانی باشد و بالعکس، نسبت مقدار کوچکتر به میانی برابر نسبت میانی به بزرگتر باشد، در این صورت مقدار آخر همان مقدار اول و میانی است و مقدار میانی نیز همان اولی و آخری است. پس به ناچار هر سه مقدار مساوی هستند و چون هر سهٔ آن‌ها یکسان‌اند پس جز یک چیز نیستند.» [۲، ص۵۵]

مسئله‌ای که در این مکالمهٔ عجیب و طولانی بدان اشاره گشته «تقسیم طلایی»[۳] یا «تقسیم به ذات وسط و طرفین»[۴] خوانده می‌شود. شکل جبری این مسأله به‌صورت زیر بیان می‌گردد:

شکل راست‌خطی[۵] به طول $s$ به دو قسمت با طول های $x$ و $s-x$ تقسیم می‌شود به‌طوری‌که نسبت زیر در آن برقرار باشد:

$$\frac{x}{s}=\frac{s-x}{x} \tag{۱.۲}$$

این رابطه به معادلهٔ زیر می‌انجامد:

$$x^{2}+sx-s^{2}=0 \tag{۲.۲}$$

[۱] برای مطالعهٔ بیشتر نگاه کنید به [۱]

[2] fractal [3] golden section [4] extreme and mean reason (The word “reason” being used here in the archaic sense of ratio)[2, p. 55] [5] rectilinear segment

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

و ریشهٔ حقیقی و مثبت آن برابر است با:

$$x = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۵} - ۱\right) s \tag{۳.۲}$$

مثلث قائم الزاویهٔ $ABC$ را طوری ترسیم می‌کنیم که در آن:

$$AB = s \tag{۴.۲}$$

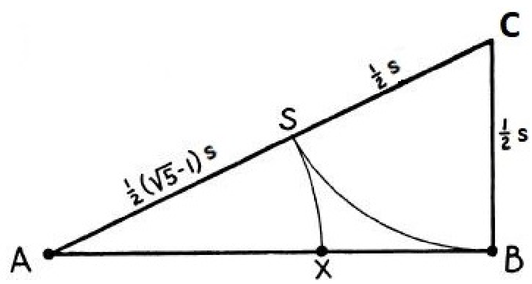
$$BC = CS = \frac{۱}{۲} s \tag{۵.۲}$$

پس:

$$AC = \frac{\sqrt{۵}}{۲} s \tag{۶.۲}$$

و همان‌طور که در شکل ۱ مشخص است خط راست $AC$ توسط نقطهٔ $S$ به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است و طبق شکل داریم:

$$AS = AX = x = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۵} - ۱\right) s \tag{۷.۲}$$




**شکل ۱.** تعریف نسبت طلایی

باید در نظر داشت که نسبت حاصل از تقسیم طلایی، گنگ است. در واقع اگر تمامی معادلات را با جایگذاری مقدار $\frac{x}{s}$ با $D$ بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

$$D = \frac{۱}{D} - ۱ \tag{۸.۲}$$

$$D^{۲} + D - ۱ = ۰ \tag{۹.۲}$$

که ریشهٔ مثبت آن برابر است با:

$$D = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵} - ۱) \tag{۱۰.۲}$$

کسر مسلسل[۶]، بازنمایی یک عدد به‌صورت مجموع جزء صحیح آن عدد و وارون عددی دیگر است، طوری‌که عدد دیگر نیز برابر با مجموع جزء صحیح آن عدد و وارون عدد سومی باشد و به‌همین ترتیب این سلسله پی‌در پی تکرار می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. کسر مسلسل متناهی، بعد از تعدادی مراحل بازگشتی متوقف می‌شود اما کسر مسلسل نامتناهی،

[6] continued fraction


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

عبارتی نامتناهی خواهد بود. یکی از خواص ذات وسط و طرفین، بسط عدد گنگ $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ به کسر مسلسل نامتناهی است. طبق تعریف داریم:

$$\frac{D}{1}=\frac{1-D}{D} \tag{11.2}$$

پس:

$$D=\frac{1}{1+D}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+D}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+D}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}} \tag{12.2}$$

در واقع تقسیم طلایی یک حد کسری مسلسل و نامتناهی است که در نوع خود نیز ساده‌ترین آنهاست؛ زیرا نه‌تنها عبارت کسری مخرج‌های آن برابر است بلکه مقدار مشترک جزء صحیح این مخرج‌ها نیز «واحد» است.

توبیاس دانتزیگ در کتاب میراث یونان باستان می‌نویسد:

> «برای فلاسفهٔ الهی‌دان، این پیشامد که بتوان جوهری را با علامتی منحصر به‌فرد بیان داشت، به‌میزان کافی عجیب و قابل توجه است. اما وقتی آن علامت یک باشد در این‌صورت ریشهٔ الهی آن جوهر بر همهٔ شک‌ها غلبه خواهد کرد. واحد نشانه خداست؛ به‌قول لایبنیتس الهی‌دان، واحد برای آنکه همه چیز را از هیچ بسازد کفایت می‌کند. از آنجا که بی‌نهایت مرحله لازم است تا به هدف مورد نظر برسیم آن تفسیر قدرت می‌یابد، زیرا بی‌نهایت نیز نشانی از خداوند است. بالاخره برای کسری مسلسل که نمایش دیگری برای آن وجود ندارد کیفیتی مطلق وجود دارد: این کسر مستقل از رده‌بندی عدد شماری است.» [۲، ص۶۰]

اگر روی پاره‌خطی با نسبت طلایی $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ قطعاتی جدا کرده باشیم می‌توانیم آن دو قطعه را ۱ و $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ بدانیم و بار دیگر نسبت را طوری بنویسیم که بین قسمت بزرگتر و کل خط بر قرار باشد که این بار به شکل زیر به عدد $\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ خواهیم رسید:

$$\frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}}=\frac{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}+1}{1}=\frac{(\sqrt{5}+1)}{2} \tag{13.2}$$

در واقع زوج عدد $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ و $\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ هر دو اعدادی طلایی هستند.

## ۳. نسبت طلایی در قرون اخیر و میانی

امروزه، نسبت طلایی به‌عنوان یک رابطهٔ ریاضی شناخته می‌شود که اغلب در هندسه‌های مقیاس‌پذیر و خصوصاً در اشکال خودمتشابه[۷] به کار می‌رود و بیشتر به‌دلیل سهمی که در زیبایی‌بخشی ظاهری و بصری دارد با عنوان طلایی شناخته می‌شود [۳، ص۱۷۹]. نسبت طلایی با نام‌های دیگری نیز خوانده می‌شود: مقطع طلایی، عدد طلایی، میانهٔ طلایی، تناسب مقدس و تقسیم به ذات وسط و طرفین. پروکلوس تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین را مقطع نامید و لوکا پاچولی[۸] (۱۵۰۹) آن را نسبت آسمانی خواند [۴، Query no.130]. در متون تخصصی ریاضیات یونانی، نسبت طلایی با حرف $\tau$ (tau) نشان داده می‌شود. نماد $\tau$ به معنای قسمت یا بخش و همچنین به معنی برش در زبان یونانی است. در آغاز قرن بیستم (۱۹۰۹ میلادی) مارک بار[۹]، ریاضیدان آمریکایی این نسبت را با $\phi$ نشان داد. $\phi$ ابتدای نام فیدیاس[۱۰]، مجسمه‌ساز یونانی بود و چون در بسیاری از آثار فیدیاس، نسبت مقدس رعایت شده است این نام‌گذاری به افتخار او بود.

[7] fractal [8] Luca Pacioli [9] Mark Barr [10] $\Phi$ , Phidias or Pheidias (490-430 B.C.)

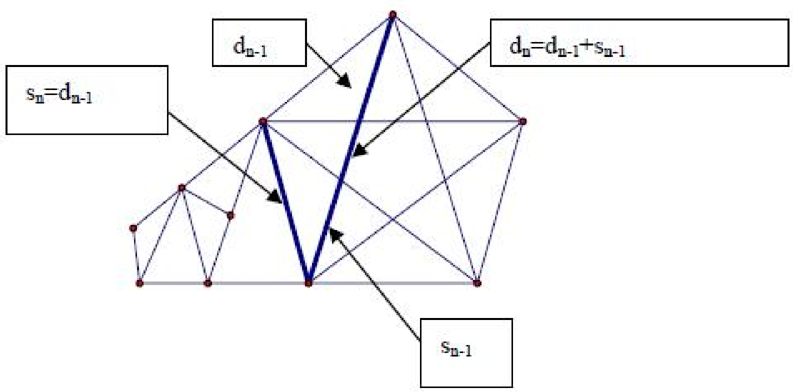
عنوان «مقطع طلایی» یا [11] یا به‌طور دقیق‌تر Goldener Schnitt برای نخستین بار در سال ۱۸۳۵ در کتاب *Die reine Elementar-Mathematik* به‌قلم مارتین اُهم[12] (برادر جوان‌تر فیزیکدان آلمانی گئورگ زیمون اُهم[13]) آمده است:

«نقطهٔ $c$ روی خط $AB$ دو قطعه به‌وجود می‌آورد به‌طوری‌که $AB \times CB = AC^۲$ در این‌حالت بین این دو قطعه رابطه‌ای برقرار است و خط $AB$ به یک برش یا مقطع طلایی تقسیم شده است.»

در ۱۸۴۹ میلادی کتابی آلمانی[14] توسط آگوست ویگاند[15] به چاپ رسید که برای اولین‌بار نام «نسبت طلایی» در عنوان آن به چشم می‌خورد. و اما اولین مورد استفاده از این اصطلاح در زبان انگلیسی به ویرایش نهم دایرة المعارف بریتانیکا در ۱۸۷۵ میلادی برمی‌گردد که جیمز سولی[16] در یک مدخل زیبایی‌شناسی بدان پرداخته است و همچنین نخستین استفاده از «تقسیم طلایی» در یک متن ریاضیات تخصصی با عنوان مقدمه‌ای بر جبر نوشتهٔ جورج کریستال[17] در ۱۸۹۸ میلادی بود.

همان‌طور که ذکر شد، عدد طلایی یک عدد گنگ است. بسیاری از مورخان بر این باورند که اعداد گنگ در سدهٔ ۵ پیش از میلاد کشف شد و فیثاغوریان با این دسته اعداد آشنایی کامل داشتند. آنها بر این باورند که علت کشف اعداد گنگ، خطای کیهانی[18] بوده است. کامپانو[19] گنگ بودن تقسیم طلایی را از طریق استقرای ریاضی و برهان خلف ثابت کرد.[20]

هلر[21] معتقد است که فیثاغوریان از یک پنج‌ضلعی منتظم استفاده کردند و توانستند نسبت ذات وسط و طرفین و گنگی آن را اثبات کنند و در واقع آنها از طریق ایجاد سری‌های متکثر از پنج‌ضلعی به گنگی این عدد پی بردند [5].




**شکل ۲.** خاصیت خود متشابه پنج‌ضلعی منتظم و همگرایی آن به نسبت طلایی

همان‌طور که در شکل ۲ پیداست قطر پنج‌ضلعی با $d_n$ و ضلع آن با $s_n$ نمایش داده می‌شود. قطر به دو قسمت $d_{n-۱}$ و $s_{n-۱}$ تقسیم می‌شود که روابط زیر در آن برقرار است:

$$s_n = d_{n-۱} \quad (۱.۳)$$

$$d_n = d_{n-۱} + s_{n-۱} \quad (۲.۳)$$

$$s_۱ = ۲, d_۱ = ۳ \quad (۳.۳)$$

[20] شهرت کامپانو بیشتر به خاطر تحریر لاتینی اصول اقلیدس (مقالهٔ اول تا پانزدهم) در ۱۲۵۴ میلادی است. از قرار معلوم این تحریر بر اساس ترجمه‌ای از آدلارد باثی (نیمه اول سدهٔ دوازدهم) تهیه شده است.

[11] golden section [12] Martin Ohm [13] Georg Simon Ohm [14] Der allgemeine goldene Schnitt und sein Zusammenhang mit der harminischen Theilung [15] August Wiegand [16] James Sully [17] Goerge Chrystal [18] Cosmic Error [19] Giovanni Camparo de Novara (Campanus) [21] Heller


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

نسبت $\frac{d_n}{s_n}$ نسبت‌های زیر را پدید می‌آورد:

$$\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳}, \frac{۸}{۵}, \frac{۱۳}{۸}, \dots \tag{۴.۳}$$

صورت‌ها و مخارج در سری ۴.۳ نشان‌دهندهٔ دنبالهٔ فیبوناچی از جملات چهارم و سوم به بعد است. این سری به نسبت طلایی میل می‌کند و همگرا می‌شود.[۲۲]

در نظر طرفداران زیبایی‌شناختی، تقسیم طلایی الگویی مجسم از زیبایی و شکوه است؛ آن‌ها به ما اطمینان می‌دهند که زیبایی این الگو به همین شکل برای اغلب مردم نیز صادق است. گوستاو تئودور فخنه[۲۳] روان‌شناس آلمانی در سال ۱۸۷۶ آزمایش‌های متعددی درباره تقسیم طلایی در میان تعداد زیادی اشخاص گوناگون و نامتجانس انجام داد. ده الگوی مستطیل با ابعاد مختلف از ۲ × ۵ یا ۱ × ۱ که شامل نسبت طلایی نیز بود به‌طور پراکنده به‌نمایش درآورد و از افراد مختلف خواست که زیباترین را تعیین کنند. گرچه تقسیم طلایی رأی بیشتری از دیگران به‌دست آورد ولی بیش از نیمی از نظرسنجی بینندگان را تشکیل نمی‌داد. در نتیجه به‌طور کلی نتایج بررسی غیرقطعی بود. یکی از نظراتی که درباب توجیه زیبایی و رجحان تقسیم طلایی وجود دارد این است که وقتی چشم انسان یک الگوی مستطیل‌گون را می‌بیند به‌طور غریزی یک مربع از آن جدا می‌کند و ظاهراً هر چه باقی‌ماندهٔ چنین شکلی به کل آن، شباهت بیشتری داشته باشد این الگو توجه بیشتری را به خود جلب می‌کند. البته کمال مطلوب زمانی حاصل می‌شود که مستطیل باقی‌مانده نسبت طلایی داشته باشد، زیرا این باقی‌مانده در آن صورت کاملاً مطابق با شکل اصلی خواهد بود. نظریه‌هایی از این دست، به ویژگی‌های زیبایی‌شناسانه برمی‌گردند و در استدلال‌های مربوط به آن به‌کار می‌روند [۲، ص۵۸].

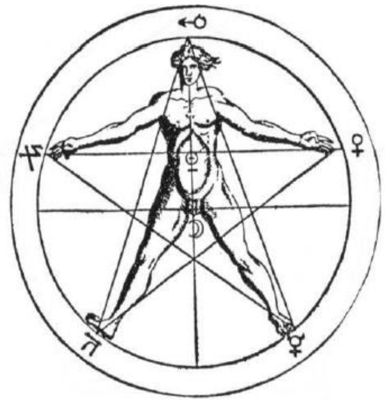
از دیرباز هنرمندان از این نسبت، به صورت‌های متنوعی چون مستطیل طلایی، مثلث طلایی، لوزی طلایی و مانند آن برای ترکیب اشیاء بصری و زیبایی بخشیدن به آن‌ها استفاده می‌کردند. بنا به منابع مکتوب موجود، ساخت و به کارگیری آغازین این نسبت به یونانیان باستان منسوب گشته است هرچند منابع اندک شماری نیز وجود دارد که بر طبق آن بابلی‌ها و مصری‌های باستان نیز این نسبت خاص را می‌شناختند و در آثار معماری خود استفاده می‌کردند[۲۴][۷].

در قرون وسطی این نسبت در تفکرات الهیات‌مآبانه مورد توجه بود و بسیاری از اساتید فلسفهٔ آن عصر که تحت تأثیر بحث و جدل‌های فیثاغوریان و افلاطونیان بودند، راز خلقت را در این نسبت دیدند و اعلام داشتند که ذات وسط و طرفین همان اصل و پایه‌ای است که صانع اعظم در طرح کیهانی و زمینی به‌کار برده است و از آنجا بود که عنوان «تناسب الهی» به این نسبت اطلاق گردید. لوکا پاچولی، راهب و ریاضیدان و همکار لئوناردو داوینچی[۲۵] در کتابی با عنوان نسبت خداوندی که شامل طرح‌های جالبی از داوینچی است، شیوه‌ای موردپسند از نقشی که تقسیم طلایی در بدن انسان ایفا می‌کند به نمایش گذاشت (شکل ۳). این رساله در ۱۵۰۹ میلادی به چاپ رسید و بسیاری از اندیشه‌های مطرح شده توسط هواداران جدید آیین‌های مذهبی به همان دوران برمی‌گردد [۲، ص۵۶–۶۱]. نقطهٔ شروع این گونه تفکرات مذهبی، مثلثی متساوی الساقین با زوایای ۳۶، ۷۲، ۷۲ درجه است چنان‌که در شکل ۴ می‌بینیم.

---

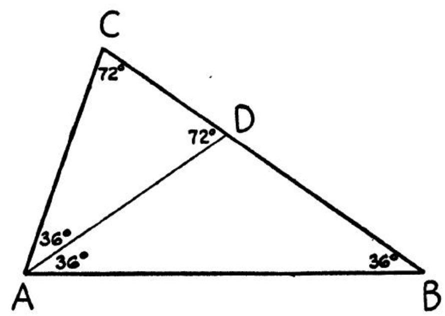
[۲۲] برای مطالعهٔ بیشتر به [۶] رجوع شود.
[۲۴] برای اطلاعات بیشتر به [۸]، [۹] و [۱۰] رجوع شود.

[23] Gustave Theodor Fechner [25] Leonardo da Vinci



**شکل ۳.** از جمله طرح‌های مشهور داوینچی از آناتومی بدن انسان

در چنین مثلثی با تقسیمات طلایی منصف الزاویه $AD$ دو مثلث متساوی الساقین یکی $DAB$ و دیگری $DAC$ که متشابه با مثلث اصلی است می‌سازد. نتیجه اینکه نخست، نقطهٔ $D$ ضلع $BC$ را به ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کند، و دوم آن‌که اضلاع یک مثلث با تقسیمات طلایی نسبت الهی دارند. در برخی مقالات به جلوهٔ رمزگونهٔ اعداد ۷۲ و ۱۰۸ اشاره




**شکل ۴.** مثلث طلایی

می‌شود.

راجر هرتز فیشلر[۲۶]، ریاضی‌دان معاصر، پیشنهاد استیپلتون[۲۷] مبنی بر اینکه اعداد ۷۲ و ۱۰۸ از دو عامل دو و سه تشکیل شده‌اند ($۳^۲ \times ۲^۳ = ۷۲$ و $۳^۳ \times ۲^۲ = ۱۰۸$) که اعدادی مقدس نزد فیثاغوریان بوده را می‌پذیرد؛ مخصوصاً که این فرضیه با مقدس بودن عدد ۷۲ نزد زرتشتیان و حتی چینیان باستان اعتبار بیشتری به خود می‌گیرد. تنها مشکل این فرضیه آن است که مدرک مشخصی مبنی بر ورود درجه یا سیستم شصتگانی به متون یونانی تا سه قرن پس از فیثاغوریان وجود ندارد و تنها پس از دو سدهٔ قبل از میلاد است که منجمان یونانی (نجوم ریاضیاتی) به روش محاسباتی بابلیان علاقه نشان دادند [۱۱، ص۲۴۲]. اشکال متشابهٔ ساخته‌شده بر نسبت طلایی عبارتند از:

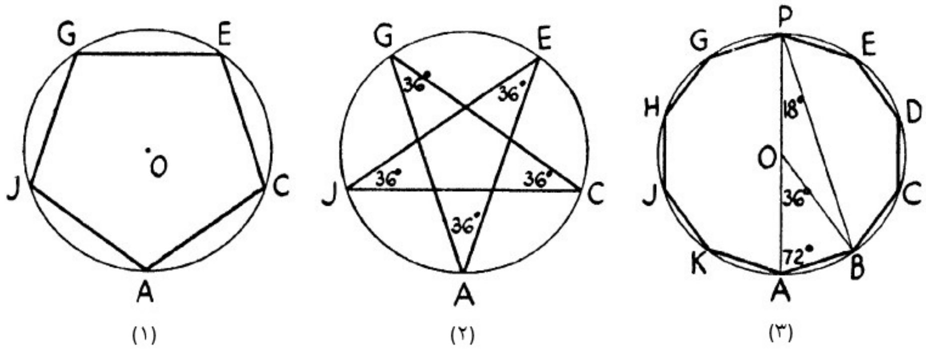
الف) پنج‌ضلعی منتظم (شکل ۵–الف) در اینجا $AEG$ یک مثلث طلایی است؛ از این‌رو ضلع و قطر یک پنج‌ضلعی منتظم به نسبت الهی‌اند.

ب) ستارهٔ پنج‌پر منتظم (شکل ۵–ب) در اینجا $AEG$ یک مثلث طلایی است؛ نتیجه آن‌که اضلاع یک ستارهٔ پنج‌پر منتظم یکدیگر را به نسبت تقسیم طلایی تقسیم می‌کنند.

[26] Roger Herz-Fischler [27] Stapleton


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

ج) ده‌ضلعی منتظم (شکل ۵–ج) در اینجا $AOB$ مثلث طلایی است؛ در نتیجه ضلع یک ده‌ضلعی منتظم و شعاع دایرهٔ محاطی آن دارای نسبتی الهی‌اند [۲، ص۶۲].




**شکل ۵.** سطوح هندسی ترسیم‌شده بر اساس نسبت طلایی

درحالی‌که اندیشهٔ نخستین تقسیم طلایی نامعلوم است ولی احتمال دارد که فیثاغوریان به‌سبب خاصیت ستارهٔ پنج‌پر که پیش‌تر بدان اشاره شد (اضلاع آن، یکدیگر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کنند) اهمیتی سرّی و پیچیده به این نسبت داده باشند. ستارهٔ پنج‌پر نقش مهمی در مراسم مذهبی بسیاری از مردمان قدیم ایفا می‌کرد به‌طوری‌که در مذهب فیثاغوریان نشانه‌ای مقدس بود و تا به امروز بعضی اجتماعات مخفی این شکل مرموز را به‌عنوان طلسم به‌کار می‌برند. آیین مسیحیت نیز بر این جریانِ پر از وهم و خرافه تأثیر نهاد به‌نحوی که سبب شد در بیان آن، واژهٔ «مقدس» به‌عبارت «مخفی و رازآلود» بدل شود. بنابراین، پس از چندی ستارهٔ پنج‌پر یونانی به طلسم پنج‌پر[28] تبدیل شد و جزء جدایی‌ناپذیر لوازم جادوگری گردید و بدین طریق ریشهٔ هندسی واژه کم‌کم به فراموشی سپرده شد و طلسم پنج‌پر نشانه‌ای از جادوی سیاه تلقی گردید. فرضیهٔ دیگر حاکی از آن است که نیروی مرموز و سحرآسایی که به ستارهٔ پنج‌پر مربوط می‌شود ناشی از خواص هندسی آن نیست بلکه مربوط به عدد پنج است. افلاطونیان برای پنج‌ضلعی نسبت به ستارهٔ پنج‌پر، اهمیت بیشتری قائل بودند و عدد پنج جزء مهم و تکمیلی برای تفکرات آنان پیرامون کائنات و آفرینش بود.

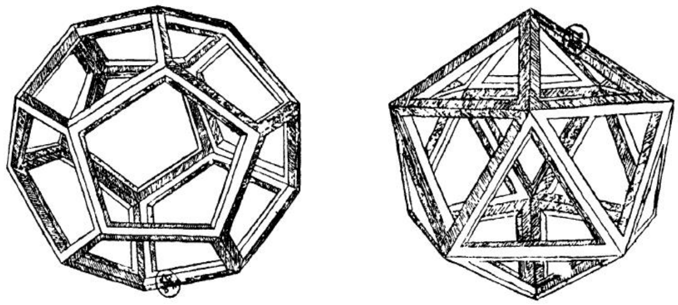
کشف چندوجهی‌های منتظم به افلاطون منسوب است و به همین سبب با نام «اجسام افلاطونی»[29] شهرت یافته‌اند. هرچند در این‌که افلاطون کاشف آنها باشد به‌طور جدی باید تردید داشت اما اینکه از این اجسام تنها و تنها پنج نوع وجود دارد، می‌توان فهمید رضایت افلاطون و پیروانش در کامل انگاشتن عدد پنج تأمین گشته است. نظم کیهانی ایجاب می‌کند که تطابقی یک‌به‌یک میان عناصر اولیه و اجرام کامل برقرار باشد در حالی‌که کیهان‌شناسی افلاطون فقط قادر بود عناصر چهارگانهٔ خاک، آب، هوا و آتش را با یکی از اجرام معادل‌سازی کند و یکی از اجسام باقی می‌ماند.[۳۰] این مشکل با اصلی که از دیرباز بر تفکرات رازآلود حاکم بود برطرف شد: «هنگام شک، آخرین را به خدا واگذارید!» اما کدام‌یک را؟! مطمئناً کامل‌ترین آن‌ها. و بدین ترتیب، دوازده‌وجهی[31] که وجوه پنج‌ضلعی آن مُهر «تناسب کامل» را بر پیشانی داشت، وقف آسمان‌ها شد [۲، ص۶۶].

---

[۳۰] در تیمائوس [۱۲] چهار جرم از اجسام پنج‌گانهٔ افلاطونی به عناصر اربعه مربوط می‌شوند. عنصر پنجم تمام آفرینش و کیهان را در برگرفته و به «اثیر» تفسیر می‌گردد [۱۳، ص۴۳].

[28] Pentacle [29] Platonic Solids [31] dodecahedron

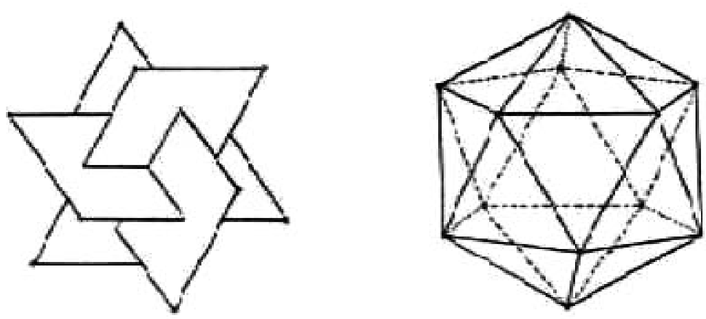
DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506



**شکل ۶.** ده‌وجهی و بیست‌وجهی که نماد آب و جهان (کائنات) و دربرگیرندهٔ دیگر اجزای آفرینش‌اند.

دونوع از چندوجهی‌های افلاطونی را در شکل ۶ می‌بینیم. این اجسام از نسبت الهی پاچولی گرفته شده که او ترسیم آن‌ها را به لئوناردو داوینچی نسبت داده است. بدیهی است انگیزهٔ چنین انتخابی آن بوده که هر دوی این اجسام شامل پنج‌ضلعی های منتظم‌اند. دوازده‌وجهی با وجود پنج‌ضلعی‌های منتظمِ خود مشخص می‌شود، و پنج مثلثی که از یک رأس بیست‌وجهی[32] خارج شده هرمی به‌وجود آورده که قاعدهٔ آن کثیرالاضلاعِ پنج‌ضلعی است. مسائل هندسی مربوط به این اجسام در کتاب اصول اقلیدس مورد بحث قرار می‌گیرد. اقلیدس در رسالهٔ دوازدهم نشان می‌دهد که چگونه بیست‌وجهی و دوازده‌وجهی با تقارن پنج‌بری از طریق نسبت طلایی به بقیه احجام مربوط می‌شوند.

در شکل ۷ دوازده رأس بیست‌وجهی با دو سر مقابل مستطیل‌های طلایی متعامد مشخص شده است؛ شکلی که یک مکعب را می‌پوشاند. ورهاین نشان داده است که ساختار هرم بزرگ، با یک بیست‌وجهی و به‌عبارت بهتر با سازه‌ای متشکل از سه مستطیل طلایی در هم قفل شده در ارتباط است.[۳۳][۱۳، ص۴۳]



**شکل ۷.** دوازده رأس بیست‌وجهی تشکیل‌شده از مستطیل‌های طلایی متعامد

مسألهٔ ترسیم مثلث به زوایایی که یکی دو برابر دیگری باشد، در قضیهٔ دهم از مقالهٔ چهارم اصول اقلیدس آمده است. این مسأله در واقع تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین است که به اشاره پروکلوس[۳۴]، ائودوکسوس[۳۵] در ۳۷۰ قبل از میلاد در ذیل مسائل «قسمت» افلاطون مطرح ساخته بود [۱۵]. در طول تاریخ بارها شاهد تکرار نظریه‌ی نسبت طلایی به طرق مختلف بوده‌ایم. مثلث کپلر نمونه‌ای از اکتشاف دوبارهٔ این نسبت خاص است. که با عنوان «نظریه‌ی لذت بخش» در این بخش می‌آوریم:

---

۳۳ و نیز نگاه کنید به [۱۴]

[32]Icosahedron [34]Proclus [35]Eudoxus


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

اگر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاعی در یک تصاعد هندسی ۱، $\sqrt{G}$ و $G$ باشد، طبق رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ وتر آن $G = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$ خواهد بود. این مثلث که بین اضلاع آن تناسب طلایی برقرار است به «مثلث کپلر» شهرت دارد.

در سال ۱۵۹۷، کپلر نامه‌ای به استاد سابق خود پروفسور میشائل مستلین[36] می‌نگارد و در آن به شرح اکتشاف خود می‌پردازد. کپلر ذکر می‌کند که بخشی از نتیجه را مدیون پروفسور ماگیروس[37] است، او می‌نویسد:

> «من مراتب سپاسگزاری خود را به ماگیروس نشان می‌دهم زیرا که او با نظریه‌ی لذت‌بخش خود مرا خشنود ساخت و اشتیاقی نو برای هندسه در من به وجود آورد … پس من این نظریه‌ی را به‌شکل دیگری تبدیل خواهم نمود که فکر می‌کنم می‌توانم حتی ماگیروس را به سادگی متقاعد سازم که این نظریه‌ی تماماً از آنِ من است.»[۶]

به‌منظور آن‌که ببینیم کپلر چه‌طور نتیجهٔ مقدماتی را بسط داد از مثلث کپلر یا $EFD$ آغاز می‌کنیم (شکل ۸) و عمود $DA$ را طوری بر آن می‌کشیم که امتداد $EF$ را در نقطه $A$ قطع نماید. طبق قضیهٔ هشتم از مقالهٔ ششم اصول اقلیدس، «در هر مثلث قائم الزاویه عمود وارد از رأس قائمه بر قاعده، آن را به دو مثلث متشابه مجاور به این عمود که با تمامی مثلث نیز متشابه‌اند تقسیم می‌کند.» پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$AF = ED \tag{۵.۳}$$

از آنجایی‌که اضلاع مثلث کپلر $EFD$ بنا به تعریف، متناسب هستند، داریم

$$\frac{ED}{DF} = \frac{DF}{FE} \tag{۶.۳}$$

و از تشابه مثلث‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{DF}{FE} = \frac{AF}{DF} \tag{۷.۳}$$

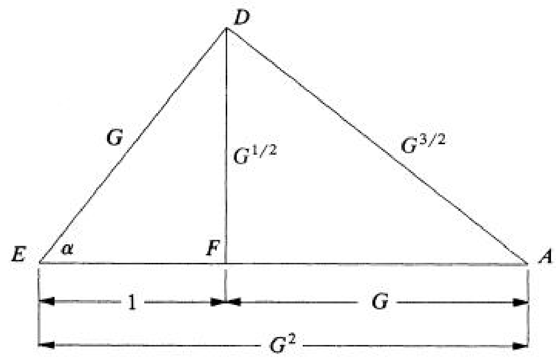
که درستی تناسب، ملزم به برابری $AF$ و $ED$ است.

$\frac{AE}{AF} = \frac{AF}{FE}$: نسبت پاره‌خط $AE$ به بزرگترین قطعه یعنی $AF$ برابر است با نسبت بزرگترین بخش $AF$ به قسمت کوچکتر $FE$ که در تعریف سوم از مقالهٔ ششم اصول گفته می‌شود که نقطه $F$ خط $AE$ را به نسبت ذات وسط و طرفین قسمت می‌کند و این نسبت مشترک با $G$ بیان می‌شود که همان عدد طلایی است. این نسبت با جایگذاری $AF$ به‌جای $ED$ در نسبت $\frac{AE}{ED} = \frac{ED}{FE}$ از تشابه میان مثلث‌ها منتج می‌گردد.

این گفته‌ها و مخصوصاً اثبات‌هایی که ارائه شد در نامهٔ ۱۵۹۷ میلادی یافت می‌شود، با این تفاوت که کپلر با فرض اینکه خط $AE$ به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌شود آغاز می‌کند و نشان می‌دهد که اضلاع مثلث بزرگتر در یک تصاعد هندسی با یکدیگر متناسب‌اند. رابطهٔ میان اضلاع و قطعات مختلف را می‌توان با در نظر گرفتن $FE = 1$ و تعریف مثلث کپلر و همچنین نتایج بالا، بازنویسی کرد که روابطی بر مبنای $G$ (عدد طلایی) همانند آنچه در شکل ۸ می‌بینیم به‌دست می‌آید.

---

[36] Michael Mastlin [37] Magirus




**شکل ۸.** تناسب هندسی میان اضلاع مثلث کپلر

## ۴. پیشینۀ یونانی

یکی از مسائل بنیادین یونانیان باستان ایجاد یک تناسب میانگین توسط قطعۀ $x$ بین دو قطعه خط داده شدۀ $a$ و $b$ بود، به‌طوری‌که:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \tag{۱.۴}$$

طبق نظر ارسطو، مسألۀ بالا زمانی حل می‌شد که بتوان مربّعی ساخت که هم‌مساحت با یک مستطیل باشد. یعنی رابطه را به‌صورت زیر در نظر گرفت: [۱۶، ص۱۱]

$$x^۲ = ab \tag{۲.۴}$$

راه حل پیشنهادی این مسأله، مشابه قضیۀ چهاردهم از مقاله دوم کتاب اصول اقلیدس بود:

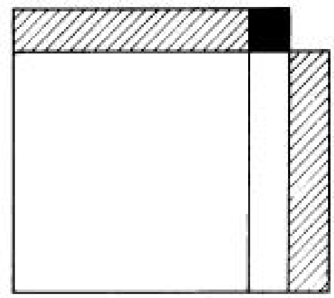
> «مقالۀ دوم ـ قضیۀ ۱۴: مطلوب است ساختن مربعی که مساحتی برابر با یک شکل راست‌خط[۳۸] مفروض داشته باشد.»

این مسأله هم‌چون مسألۀ «تضعیف مکعب» در دیگر تمدن‌های باستان از جمله بابل و هند دارای پیشینۀ تاریخی طولانی و مذهبی است. اما آن‌طور که در یونان باستان مسأله دوبرابر ساختن مکعب دارای ریشه های فلسفی و عرفانی بود، در هند مسألۀ حجم مهم نبود و برای ساخت بناهای مذهبی نیازمند ساختن مربعی با مساحت برابر با دو مربع (یعنی یک ناحیه مستطیل شکل) بودند و برای حل این مسأله از ایده‌ای مشابه آنچه در اصول اقلیدس آمده است، استفاده می‌شد. در کتاب هندسه و جبر در تمدن‌های باستان به نقش مهم قضیۀ فیثاغورس در ایجاد این نسبت و سهمی که بابلی‌ها داشتند نیز اشاره می‌شود و درواقع می‌توان گفت آنان به دنبال ساخت یک مربّع بودند با طول ضلع مشخص، تا بتوان مساحت حاصل از یک مستطیل را که از لحاظ جبری می‌توان به‌صورت یک حاصلضرب بین دو مقدار نشان داد، به‌سطح یک مربع تبدیل نمود. یکی از این روش‌ها تبدیل مستطیل به تفاضل دو مربع بود (شکل ۹). سایدنبرگ نیز با بررسی سازه‌ای مقدس، درصدد بررسی این موضوع است که هندی‌ها نیز در همین زمینه برای تبدیل مستطیل به مربع می‌کوشیدند [۱۸، ص۱۱].

---

[۳۸] مقالۀ اول– تعریف ۱۹: شکل‌های راست‌خط شکل‌هایی هستند که از خط‌های راست به وجود آمده‌اند. [۱۷، ص۶]


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506



**شکل ۹.** چگونگی تبدیل یک مستطیل به تفاضل دو مربع

راجر هرتز فیشلر که پیش‌تر نیز از او یاد کردیم، در مقالهٔ «قضیهٔ اصلی چهاردهم در ضمیمهٔ اول اصول»[۳۹] پیشینهٔ حکمی در مورد نسبت طلایی (نسبت ذات وسط و طرفین) را در دورهٔ اسلامی بررسی کرده است که در اثبات قضایای دوم و هفتم ضمیمهٔ اصول معروف به «مقاله چهاردهم» تلویحاً ذکر شده است. این مقاله به‌بررسی این نکته پرداخته که آیا این قضیه از ابتدا در متن یونانی بوده است یا خیر. او براساس مستنداتی از پاپوس، نسخه های عربی کتاب اصول و سنت عربی ـ لاتینی نتیجه گرفته که در متن یونانی از ابتدا چنین قضیه‌ای مطرح بوده است.[۴۰]

در مقالهٔ ششم از اصول اقلیدس، نسبت ذات وسط و طرفین به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

«وقتی می‌گوییم خط راستی به‌نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است که نسبت تمام خط به قطعهٔ بزرگتر مثل نسبت قطعهٔ بزرگتر باشد به قطعهٔ کوچکتر.»

و در مقالهٔ ششم ـ قضیهٔ ۳۰ به چگونگی ایجاد این نسبت روی یک پاره‌خط اشاره می‌شود:

«مطلوب است تقسیم کردن خط راست متناهی به نسبت ذات وسط و طرفین.»

در مقالهٔ دیگری از کتاب اصول رابطه این نسبت به‌صورت روابط بین سطوح و تبدیل سطح‌ها به‌یکدیگر همانند آنچه در قضیهٔ چهاردهم از مقالهٔ دوم سخن رفت، اشاره می‌شود:

«مقالهٔ دوم ـ قضیهٔ ۱۱: مطلوب است تقسیم خطی به دو قطعهٔ مفروض به‌طوری‌که مستطیل حاصل از یکی از قطعه‌ها و کل خط، برابر باشد با مربع قسمت باقی‌مانده.»

همان‌طورکه انتظار می‌رود این دو قضیه درکتاب اصول به شکل هندسی و تنها با استفاده از روابط بین پاره‌خط‌ها و سطح‌ها بررسی و اثبات شده‌اند. با توجه به اینکه واژه‌های «مستطیل» و «مربع» در قضیهٔ یازدهم از مقالهٔ دوم، به «حاصل‌ضرب» و «مجذور» پاره‌خط‌ها اشاره دارد، می‌توان با گذر از تعریف آن بر مبنای سطح، شکلی اختصاصی به این قضیه داد و در واقع آن را تعریفی امروزی برای مستطیل طلایی قلمداد نمود.

مقالهٔ سیزدهم از کتاب اصول اقلیدس[۴۱] نیز شامل هجده قضیه است که در بیشتر آنها به مسائل نسبت ذات وسط و طرفین پرداخته است. قضایای اول تا چهارم، به روابط مختلف میان نسبت مربعات ساخته‌شده روی هر کدام از قطعات خط راست می‌پردازد. قضیهٔ ششم، اثبات گنگ بودن قطعاتی است که به نسبت ذات وسط و طرفین روی یک خط راست گویا ساخته شده است. و بر طبق قضیهٔ هشتم، در یک پنج ضلعی متساوی الاضلاع و متساوی‌الزاویه، قطرهای روبرو به دو زاویهٔ متوالی یکدیگر را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کنند و قطعهٔ بزرگتر آنها با ضلع پنج‌ضلعی مساوی است. قضیهٔ نهم

[۳۹] نگاه کنید به [۱۹].
[۴۰] برای مطالعه بیشتر مراجعه شود به [۲۴]
[۴۱] گویا بخش الحاقی به کتاب اصول است و از لحاظ تاریخی به اقلیدس منسوب نمی‌باشد. (نگاه کنید به [۲۵])

نیز به نسبت ذات وسط و طرفین اشاره دارد. طبق این قضیه، وقتی اضلاع یک شش‌ضلعی و ده‌ضلعی محاط در یک دایره با هم جمع شوند، خط راستی را به‌وجود می‌آورند که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده و ضلع شش‌ضلعی، قطعهٔ بزرگتر آن است. قضایای شانزدهم و هفدهم به ترتیب به ساخت یک بیست‌وجهی و دوازده‌وجهی محاطی در یک کره اختصاص دارد. در این دو قضیه از قضایای قبلی که مربوط به نسبت ذات وسط و طرفین بودند استفاده می‌شود.

اقلیدس در قضیهٔ دهم از رساله چهارم، مثلث متساوی الساقینی را معرفی می‌کند که هر یک از زوایای مجاور قاعده‌اش دو برابر زاویهٔ سوم است و در ادامه نحوهٔ ترسیم این مثلث را شرح می‌دهد. وی در قضیهٔ یازدهم از همین مقاله، با کمک قضیهٔ دهم و همان مثلث متساوی الساقینی که هر یک از زوایای مجاور آن دو برابر زاویهٔ رأس باشد، به رسم پنج‌ضلعی منتظم می‌پردازد.

## ۵. پیشینه در دورهٔ اسلامی و بازتاب آن در آثار متأخر

در این بخش به تعاریف ارائه شده از نسبت طلایی در سده‌های چهارم تا نهم هجری قمری (معادل با قرن دهم تا حدود پانزدهم میلادی) پرداخته و سپس به آثاری که تا آستانهٔ قرن بیستم میلادی در امتداد این منابع تألیف شده است، اشاره می‌گردد و قضایا و مسائل هندسی مرتبط با نسبت طلایی و همچنین نمود عملی آن در معماری بناها بررسی خواهد شد.

«تقسیم به نسبت ذات وسط و طرفین» نام متدوالی است که در تعریف تقسیم طلایی در آثار دوره اسلامی به چشم می‌خورد. از آنجا که «ذات وسط و طرفین» ترجمه‌ای برای واژهٔ Extreme and Mean Ratio به حساب می‌آمد می‌توان اکثر رسایل این دوره را بر مبنای ترجمه‌هایی از اصول اقلیدس دانست. علت نام‌گذاری این تناسب از آنجاست که در تناسب $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ وسطین تناسب یکی هستند ولی طرفین آن متفاوتند. پس در این تناسب یک وسط و دو طرف داریم یعنی وسط و طرفین. واژهٔ «ذات» در این‌جا مؤنث «ذو» و به معنای «دارنده» است.

ابوریحان محمدبن‌احمد بیرونی (۳۶۲–۴۴۲ ق) در کتاب التفهیم لأوایل صناعة التنجیم در جواب سؤال «نسبت ذات وسط و طرفین چیست؟» این نسبت را چنین تعریف می‌کند:

> «هرگاه که خطی باشد به دو پاره کرده چنان‌که نسبت خردترین قسمتی به بزرگترین همچنان باشد چون نسبت بزرگترین به جملهٔ هر دوان یعنی همهٔ خط، این نسبت را نسبت ذات وسط و طرفین خوانند.» [۲۶]

ابن‌سینا (۳۷۰–۴۲۸ ق) نیز در مقالهٔ ششم[۴۲] از بخش ریاضیات و هندسه کتاب الشفاء به تعریف مشابهی از نسبت ذات وسط و طرفین می‌پردازد:

> «ویقال إن الخط علی نسبة ذات وطرفین اذا کانت نسبة الخط کله الی أطول قسمین کنسبة القسم الأطول الی القسم الأصغر.» [۲۷]

بخش‌هایی از ریاضیات کتاب الشفاء ترجمه‌ای از اصول اقلیدس است هرچند ابن سینا در مواضعی به تحریر برخی مسائل آن پرداخته و به راه حل‌های متفاوتی از کتاب اصول اشاره کرده است. در دو مقالهٔ سیزدهم و چهاردهم[۴۳] با عنوان‌های «القسمة ذات الوسط والطرفین والمضلعات المنتظمة» و «القسمة ذات الوسط والطرفین والمجسمات المنتظمة» نیز به تقلید از کتاب اصول، مسائلی مربوط به نسبت ذات وسط و طرفین را با شیوه‌هایی یکسان یا مشابه با اقلیدس اثبات و حل می‌کند. مثلاً در اثبات قضیهٔ اول از مقالهٔ سیزدهم، روشی متفاوت از آنچه در کتاب اصول آمده است، اختیار می‌کند.

---

[۴۲] عنوان این مقاله «سطوح متشابهه» است. ابن سینا سطوح متشابهه را به زوایای متساویه و اضلاع تناسبیهٔ آنها معنا می‌کند و می‌گوید: سطوح متکافئه، سطوحی هستند که اضلاعشان بنا بر تقدم و تأخر با هم متناسب می‌باشند.

[۴۳] در ابتدای این بخش اشاره شده که این مقاله از اقلیدس و منسوب به هوپسیکلس است : «المقالة الرابعة عشرة من أوقلیدس و هی لأبسقلاوس»


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

«مقالهٔ سیزدهم– قضیهٔ ۱: هرگاه قطعه خطی به نسبت ذات وسط وطرفین تقسیم شود، چنانچه اندازهٔ قطعه بزرگتر رابا نصف اندازه قطعهٔ خط جمع کنیم و حاصل‌جمع را مربع نماییم، نتیجهٔ به‌دست‌آمده پنج برابر مربع نصف اندازه قطعه خط است.»[۴۴]

در دانشنامهٔ علایی، ذیل فصلی با نام «یاد کردن فصل‌ها اندر وتر دایره‌ها» به تقسیم به ذات وسط و طرفین اشاره شده است.[۴۵] طبق این قضیه، اگر یک وتر عشر (ضلع ده‌ضلعی محاطی در دایره) را به یک وتر سدس (ضلع شش‌ضلعی محاطی در دایره) در یک راستا بیفزاییم، در واقع خط ایجاد شده را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم نموده‌ایم و در واقع نسبت میان ضلع ده‌ضلعی محاطی به شش‌ضلعی محاطی عدد طلایی است. این مسأله همان قضیهٔ نهم از مقالهٔ سیزدهم اصول اقلیدس است که در دانشنامهٔ علایی به مانند روش اصول، شرح و اثبات می‌شود [۲۹].

خواجه نصیرالدین طوسی (۵۹۷–۶۷۲ ق) در ابتدای مقالهٔ ششم از تحریر اصول اقلیدس، نسبت ذات وسط و طرفین را عیناً همانند آنچه در کتاب اصول آمده است تعریف می‌کند (پیوست آ، شکل ۱۶) و در قضیهٔ سی‌ام از همین مقاله نیز عیناً به روش اقلیدس، نحوهٔ ایجاد نسبت ذات وسط و طرفین روی یک پاره‌خط را شرح می‌دهد (پیوست ب، شکل ۱۹). در قضیهٔ دهم از مقالهٔ چهارم نیز خواجهٔ طوسی ترسیم مثلث مخمس را با همین نام توضیح می‌دهد ولی به ویژگی‌های آن اشاره نمی‌کند و مانند اقلیدس فقط از خاصیت آن برای رسم پنج‌ضلعی بهره می‌برد (پیوست ب، شکل ۲۰).

قطب‌الدین شیرازی (۶۳۳–۷۱۰ ق) در اثر دانشنامه‌ای خود درة التّاج لغرة الدباج در تعریف نسبت ذات وسط و طرفین، نیز به تقلید از طوسی (گویا برگردانی از تحریر اصول) این تناسب را تعریف نموده است. باقی قضایای مربوط به نسبت ذات وسط و طرفین در این رساله نیز عیناً همانند کتاب تحریر اصول است حتی توضیحات رسم مثلث مخمس و معرفی آن نیز به طریق مشابه و با همین لفظ (مثلث مخمّس) آورده شده است (پیوست پ).

در انتهای رساله‌ای هندسی منسوب به ثابت‌بن‌قره (۲۲۸–۲۲۱ ق)، مسأله‌ای با عنوان تقسیم یک خط مفروض به نسبت ذات وسط و طرفین مطرح می‌شود (پیوست آ، شکل ۱۷). انتساب این قضیه به رسالهٔ مساحت ثابت محرز نیست و گویا بعدها به متن اصلی افزوده شده است ولی از این جهت که ردپایی از نسبت طلایی در متون دورهٔ اسلامی به‌دست می‌دهد شایان توجه است:

«می‌خواهیم (پاره‌خط) مفروض **ا د** را در دو نقطه **ب**، **ج** به سه قسمت کنیم، به‌طوری‌که نسبت **ب ج** به **ج د** برابر با نسبت **ج د** به **ب د** شود و نیز مجموع مربعّات **ب ا**، **ب ج** برابر با مربّع **ب د** شود.»

در برهان مسأله، پاره‌خط مشخصی در نظر گرفته می‌شود و با تقسیم آن به نسبت ذات وسط و طرفین و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، یک مثلث با ابعاد مشخص طلایی ایجاد می‌شود و سپس این ابعاد قابل انتقال به خط مفروضی است که می‌خواهیم آن را به نسبت ذات وسط و طرفین قسمت کنیم.[۴۶]

در دانش‌نامهٔ جامع بهادرخانی نوشته قاضی غلامحسین جونپوری هندی و چاپ سنگی ۱۲۵۰ هجری قمری در کلکته هند، که رسالهٔ متأخری در امتداد آثار دورهٔ اسلامی محسوب می‌شود، نسبت ذات وسط و طرفین به‌صورت زیر تعریف شده است:

«خط مقسوم بر نسبت ذات وسط و طرفین آن است که نسبت آن سوی قسم اعظم مثل نسبت قسم اعظم سوی قسم اصغر باشد.» [۳۵]

قضایای **لج** (۳۳) و **لد** (۳۴) از حرز سوم کتاب جامع بهادرخانی دربردارندهٔ مسئله‌ای از رسم پنج‌ضلعی به کمک مثلث مخمس است. در مسأله بیست و سوم این مثلث مشابه با قضیهٔ شماره ۱۰ از مقالهٔ چهارم اصول اقلیدس ترسیم و معرفی

---

[۴۴] برهان کامل مسأله و توضیحات تکمیلی را در [۲۸] ببینید.

[۴۵] بخش ریاضی دانشنامهٔ علایی، رسایل جمع‌آوری‌شده توسط جوزجانی (سدهٔ ۴ و ۵ق) شاگرد ابن‌سینا است که به سبک دیگر مطالب کتاب برآن افزوده است.

[۴۶] برای توضیحات تکمیلی در خصوص این دست‌نویس و رساله، مراجعه شود به [۳۴].

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

می‌گردد و در مسأله بعدی به‌منظور رسم پنج‌ضلعی، از آن استفاده می‌شود (پیوست ث، شکل ۲۴). قضایا و راه‌حل‌های پیشنهادی تماماً تکرار مطالبی است که در دگر کتب هندسی مانند تحریر اصول آورده شده است و پیش‌تر یاد نمودیم. با اینکه در تاریخ مذکور علوم جدید تقریباً به سراتاسر جهان راه یافته بود و استفاده از راه‌حل‌های جبری تلفیق‌شده با هندسه بدیهی به نظر می‌آمد ولی هیچ اثری از روابط جبری و ترکیب حساب و هندسه در بیان نسبت‌ها در این اثر به چشم نمی‌خورد.

میرزا عبدالغفار نجم‌الدوله[۴۷] در رسالهٔ آموزشی فارسی خود با نام اصول هندسه از کتب درسی دارالفنون به طبع سال ۱۳۱۸ هجری قمری در تهران، ذیل مقالهٔ سوم، «در توضیح خواص اشکال کثیرةالاضلاع و مساحت و تشابه آن‌ها» مسألهٔ تقسیم یک خط به نسبت ذات وسط و طرفین را مطرح می‌سازد:

> «مسئله ۱۸: می‌خواهیم خط **ا ب** را بر نسبت ذات وسط و طرفین قسمت کنیم یعنی بر دو جزء چنانچه جزء اعظم واسطه هندسی باشد مابین تمام خط و جزء اصغر آن.» [۳۶]

در صورت این مسأله، نسبت ذات وسط و طرفین در قالب یک سؤال تعریف می‌شود و روش پیشنهادی حل مسأله با راه‌حل‌های پیشین تفاوت دارد روابط جبری وارد شده است و مسأله برای ارائهٔ راه حل از آن یاری می‌جوید و همین‌طور راه حل جامعی با در نظر گرفتن دیگر امکان‌های هندسی ارائه می‌کند ولی از آن جهت که تاریخ فوق معادل با ۱۹۰۰ میلادی و ورود به قرن بیستم میلادی است و با توجه به تحقیقات گسترده‌تری که تا آن زمان در زمینه نسبت طلایی و خواص آن صورت گرفته بود، هنوز بازتابی در رسمی‌ترین و شاخص‌ترین کتاب هندسهٔ مدرسهٔ دارالفنون که به‌عنوان کتاب درسی هندسی تدریس می‌شد دیده نمی‌شود. نه صحبتی از ویژگی‌های منحصر به فرد نسبت ذات وسط و طرفین یا مثلث مخمّس است و نه حتی نام خاص آن با لفظ «زرین» یا «طلایی» متداول گشته است.

تا بدین‌جا مشخص شد نه اقلیدس و نه دانشمندان دورهٔ اسلامی در هیچ‌یک از آثارشان به تناسبی که میان اضلاع مثلث طلایی برقرار است، اشاره نکرده‌اند اما مثلث متساوی الساقینی که زوایای مجاوری دوبرابر زاویه رأس داشته باشد، یادآور مثلث مخمس در کتاب اعمال هندسی[۴۸] بوزجانی است؛ اگرچه در این کتاب، به ترسیم مثلث مخمس به‌صورت قضیه‌ای مستقل پرداخته نمی‌شود، در ضمن مسأله چهارم از باب دوم، رسم اشکال متساوی الاضلاع و الزوایا، به عنوان یکی از ابزارهای رسم پنج‌ضلعی متساوی الاضلاع و الزوایا، معرفی شده و از آن استفاده می‌شود.

ابوالوفاء محمد بن محمد بن یحیی بوزجانی (۳۲۸–۳۸۸ ق) در مسألهٔ سوم و چهارم از باب دوم[۴۹] رسالهٔ خویش (شیوهٔ کشیدن اشکال متساوی الاضلاع و الزوایا[۵۰])، به رسم پنج‌ضلعی می‌پردازد [۳۷، ص۲۵–۲۶]. این پنج‌ضلعی بر پایهٔ مثلثی رسم می‌شود که اصطلاحاً آن را «مثلث مخمّس» می‌نامند زیرا در بسیاری از ترسیمات هندسی این مثلث به‌کار آمده و بدان نیاز می‌افتد.[۳۸، ص۴۲] این مثلث متساوی الساقین با دو زاویهٔ ۷۲ درجه، در واقع مثلثی است که در آن نسبت قاعده به اضلاع کناری برابر با نسبت طلایی است. در این دو مسأله به دو شیوه متمایز در به دست آوردن مثلث اشاره می‌شود. مسأله چهارم از این باب، رسم مثلث را به‌طور کامل شرح می‌دهد.

---

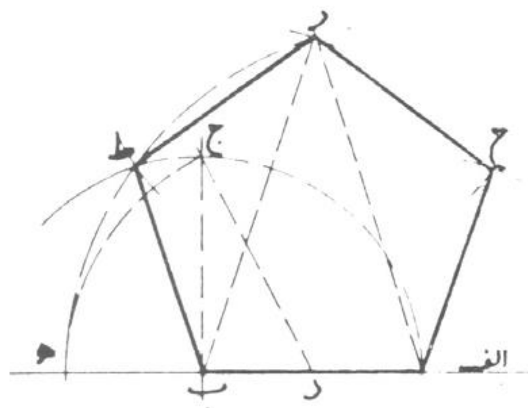
[۴۷] عبدالغفار بن علی محمد اصفهانی که ازپدر خود در مقدمهٔ کتاب با نام فاضل کامل و با لقب غیاث‌الدین جمشید ثانی نام می‌برد، به مدت سی و چند سال معلم مدرسه دارالفنون بود.

[۴۸] عنوان دقیق رساله چنین است: «في ما يحتاج اليه الصانع من الأعمال الهندسيه» (دربارهٔ آنچه که صنعتگران بدان از اعمال هندسی نیاز دارند)

[۴۹] ممکن است ترتیب قرارگیری باب‌ها و نحوهٔ شماره‌گذاری مسائل در کتب مختلف متفاوت باشد. شماره‌گذاری باب‌ها در اینجا طبق نسخهٔ خطی فارسی موجود در پاریس به شماره p.169 (فهرست بلوشه: ۷۲۲) است.

[۵۰] چندضلعی منتظم را در نسخ عربی و فارسی گاه «متساوی الاضلاع» و گاهی «یک اندازه پهلو» یا «یک اندازه پهلو و زاویه» نیز نامیده‌اند و گاهی به‌جای پنج‌ضلعی منتظم، «پنج‌سو» گفته‌اند.[۳۸، ص۴۲]


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506




**شکل ۱۰.** ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با استفاده از مثلث مخمّس (مثلث طلایی) درکتاب بوزجانی

مسألهٔ یازدهم و دوازدهم از همین باب به رسم ده‌ضلعی منتظم اختصاص دارد. در مسأله دوازدهم، بار دیگر از مثلث مخمّس استفاده می‌شود. همچنین در مسألهٔ دهم از باب سوم (شیوه کشیدن اشکال در دایره و بر دایره)، طرز رسم پنج‌ضلعی منتظم در دایره نیز با رسم مثلث مخمّس آغاز می‌شود و برای این کار ابتدا مثلث مخمّس را رسم می‌نماید. [۳۷، ص۲۸] با توجه به کاربرد خاص این مثلث در ترسیم پنج‌ضلعی و ده‌ضلعی، می‌توان نتیجه گرفت بیشتر از اینکه مثلثی این چنین با ویژگی‌های مشخص و مستقل شناخته شده باشد کاربردش در ترسیم پنج‌ضلعی و دیگر اشکال مشابه آن مدنظر بوده است؛ چنان‌که بوزجانی تنها به ذکر فایدهٔ آن در رسم یک پنج‌ضلعی بسنده کرده است:

«...و آن را مثلث المخس نام نهند و در عملها بسیار احتیاج افتد.»[۵۱]

کمال‌الدین یونس منعه (۵۵۱–۶۳۹ ق) نیز در شرحی که بر کتاب اعمال هندسی ابوالوفاء بوزجانی نگاشته است به استفاده از مثلث مخمس در ساخت پنج‌ضلعی اشاره کرده است (شکل ۱۰). خواجه نصیرالدین طوسی در مقالهٔ چهارم از رساله تحریر اصول اقلیدس، با عنوان «چگونگی ساخت پنج‌ضلعی منتظم درون یک دایره»، به‌صورت کاملاً واضح و مشخص از مثلث طلایی استفاده می‌کند. در این مقاله خواجهٔ طوسی ابتدا به‌تعریف و نحوهٔ ساخت مثلث مخمس اشاره می‌کند (مطابق کتاب اصول با این تفاوت که نام مشخصی به این مثلث می‌دهد) و بعد طریقهٔ ترسیم پنج‌ضلعی بر مبنای این مثلث را شرح می‌دهد.[۵۲] (پیوست ب)

بوزجانی در مقدمهٔ کتاب اعمال هندسی، در معرفت و شناخت خطکش و پرگار و گونیا، به تعریف گونیا[۵۳] و روش‌های سنجش درستی آن می‌پردازد که می‌توان احتمال استفاده آن برای ساخت پنج‌ضلعی و ده‌ضلعی منتظم را نیز متصور شد (پیوست آ، شکل ۱۸) [۲۰، ص۲۹۰]. اگر دو گونیا را درکنار هم قرار دهیم و یک مثلث متساوی الساقین با زاویهٔ رأس ۱۰۸(۵۴ × ۲) درجه داشته باشیم یک شاخص طلایی ساخته‌ایم.

بدین ترتیب، مثلث طلایی قابل قسمت به شاخص طلایی[۵۴] و یک مثلث طلایی دیگر است.(شکل ۱۱) در واقع تعریف شاخص طلایی، قطعه‌ای است که با افزوده شدن به قطعه‌ای دیگر یک قطعه بزرگتر متشابه با آن قطعه ایجاد بکند.[۲۰] در

[۵۱] در دست‌نویس کتابخانهٔ ملی فرانسه اینگونه آمده است و در نسخهٔ خطی آستان قدس به این شکل است: «...که انرا مثلث مخمس خوانند و در بسیار اعمال باین مثلث احتیاج افتد.» و در نسخهٔ دانشگاه تهران: «...که آن را مثلث مخمس خوانند و در بسیاری اعمال به این مثلث احتیاج افتد.»

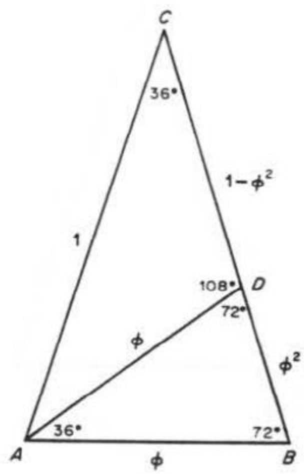
[۵۲] از ترجمهٔ متن انگلیسی تصحیح رساله در [۲۲] استفاده شده است.

[۵۳] اصطلاح گونیا در زبان قدما، طبق اصل یونانی آن، به معنی زاویهٔ قائمه است نه وسیله‌ای که امروزه به نام گونیا برای رسم زاویهٔ قائمه به‌کار می‌رود.

[54] golden gnomon

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

مثلث متساوی الساقینی که دو زاویه برابر با ۷۲ درجه داشته باشد نسبت قاعده به اضلاع کناری برابر با نسبت طلایی است. اگر نیمساز یکی از زوایای مثلث طلایی را رسم کنیم یک شاخص و یک مثلث طلایی دیگر به‌دست می‌آید.




**شکل ۱۱.** تبدیل یک مثلث طلایی به یک شاخص و مثلث طلایی دیگر با رسم نیمساز زوایای قاعده

رساله‌ای هندسی با عنوان «وفي تداخل الاشكال المتشابهة او المتوافقة»[۵۵] به‌منظور استفاده در تزیینات گره‌سازی نگاشته شده است که به‌صورت سؤال و جواب و با ذکر مثال‌های متعدد، طرق عملی رسم اشکال هندسی گره‌ها که عقد نامیده می‌شود را بررسی می‌کند. با توجه به شرح و توصیفات کامل آن نشان می‌دهد مسلمانان از اشکال ستاره در تزیینات و آرایه‌های بناها استفاده می‌کردند و در بخشی از هندسهٔ عملی که امروزه با عنوان معماری بناها شناخته می‌شود، کاربرد داشته است. مثلاً در کاخ عباسی‌ها در بغداد (حدود ۱۱۸۰–۱۲۳۰ میلادی) اثری از این ستارهٔ پنج‌پر به چشم می‌خورد. در این بنا در مرکز هر ستاره، یک ستارهٔ پنج‌پر کوچکتر نیز وجود دارد.

در این رساله که به ترسیمات هندسی متداول در معماری و هندسه عملی پرداخته است، با یک نمونه از کاربرد رسم پنج‌ضلعی و استفاده از خواص مثلث طلایی آشنا می‌شویم. رساله در قالب یک قضیه، رسم «خاتم مخمّس»[۵۶] را شرح می‌دهد (شکل ۱۲):

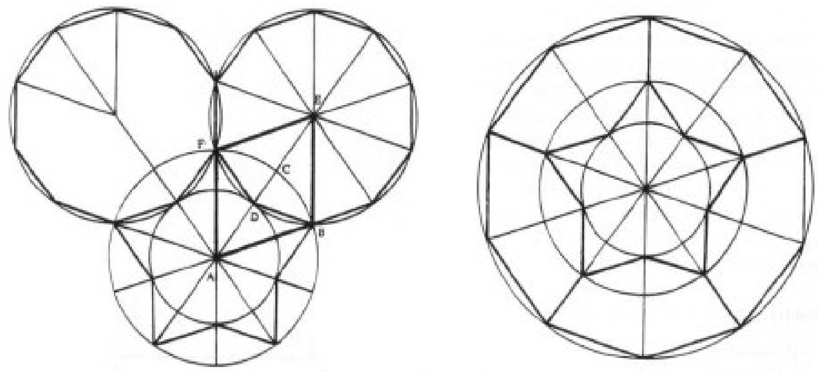
> «هرگاه که دو معشّر متساوی الاضلاع و الزوایا متساوی السطوح رسم کند و خاتم مخمسی که اضلاع او مثل اضلاع معشّر باشد و قطر خارج او مثل قطر خارج معشّر بود و نصف قطر داخل او مثل ضلع معشّر باشد این هر سه شکل در یک معشّر توان نهاد که در آن معشّری باشد که اضلاع او مثل نصف قطر خارج معشّر مفروض باشد و نصف قطر خارج او مثل نصف قطر خارج معشّر مفروض باشد با ضلع او به‌هم منضم باشد چنانک مرسوم است.» [۲۳]

---

[۵۵] مؤلف این رساله، ناشناس است و چون پس از کتاب نجارت یا رساله اعمال هندسی بوزجانی به چاپ رسیده است، بعضی به اشتباه آن را منسوب به مترجم اعمال هندسی‌ابواسحاق کوبنانی (سدهٔ نهم ق) دانسته‌اند و عنوان یکی از فصول کتاب را بدان داده‌اند. دست‌نویسی از رسالهٔ حاضر در کتابخانهٔ ملی فرانسه محفوظ است (نگاه کنید به [۲۱]).

[۵۶] ستارهٔ کوکبی‌شکل


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

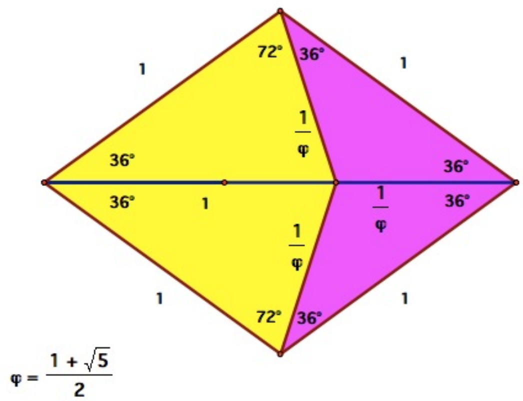



**شکل ۱۲.** رسم خاتم با استفاده از ده‌ضلعی

جنبهٔ عملی استفاده از خواص ده‌ضلعی و ستارهٔ کوکبی‌شکل در قضیهٔ اخیر نمایان است. در این قضیه از ساخت ده‌ضلعی منتظم بزرگتری با کنارهم قرار نهادن قطعات جداشده از ده‌ضلعی‌ها، البته با شروطی که در ابتدای قضیه ذکر شده، سخن رفته است (پیوست ت). همان‌طور که می‌بینیم در این‌جا از خاصیت خودمتشابهی پنج‌ضلعی و ده‌ضلعی منتظم استفاده شده اما کوچکترین اشاره‌ای به آن نشده است. در واقع قطر ستارهٔ کوکبی‌شکل، همان قطر پنج‌ضلعی منتظم محیطی آن و همان ضلع مثلث طلایی است. نصف قطر خارجی معشر و ستارهٔ کوکبی نیز، شعاع دایرهٔ محیطی به ستارهٔ کوکبی و برابر با ضلع پنج‌ضلعی منتظم محیطی آن، یا همان قاعدهٔ مثلث طلایی است. پس برابری نصف قطر خارجی ستارهٔ کوکبی با نصف قطر خارجی معشر یا ده‌ضلعی، به بیان دیگر، برابری قاعدهٔ مثلث طلایی بزرگتر (ضلع پنج‌ضلعی محیطی به ستاره و پنج‌ضلعی محاطی در ده‌ضلعی‌های کوچک) با یک ضلع مثلث طلایی کوچکتر (ضلع ده‌ضلعی جدید) است و در واقع نشان می‌دهد که میان اضلاع ده‌ضلعی بزرگتر و کوچکتر نسبت طلایی برقرار است و در اصل به سبب وجود همین تناسب و استفاده از خاصیت خودمتشابهی است که چنین رسمی پدید آمده و نقش خاتم یا ستارهٔ کوکبی به عنوان یک مقیاس برای رعایت درستی نسبت‌ها و به نوعی انتقال‌دهندهٔ الگو در این مسأله مطرح است. در این مسأله از وجود نسبت‌های خاص هیچ صحبتی به میان نیامده گرچه به صورت کاربردی، آن‌ها را با وسیله‌ای ستاره‌شکل ترسیم می‌کنند که در آن واحد هم خواص پنج‌ضلعی را دارد و هم اضلاعش برابر با ده‌ضلعی است و به‌دلیل شکل مقعرش ابزار خوبی برای رسم این نوع گره‌هاست. نسبت نصف قطر خارج آن به نصف قطر داخل او نسبت طلایی است، درست مانند نسبتی که میان اضلاع یک ده‌ضلعی با شعاع دایرهٔ محیطی آن (نصف قطر خارجی) برقرار است و به بیان ساده، نسبت طلایی در دل این ستارهٔ کوکبی‌شکل نهفته است.

لوزی طلایی، که از کنار هم قرار گرفتن دو شاخص و دو مثلث طلایی به وجود می‌آید در شکل ۱۳ قابل مشاهده است. این الگوی اصلی به‌کار رفته در تئوری کاشی‌کاری پنروز[57] است. این لوزی از دو شکل اصلی به نام‌های «سرنیزه و بادبادک»[58] تشکیل شده است. این نام‌گذاری توسط جان هورتون کانوی[59] صورت گرفت [۱۰، ص۳۱۱]. با اینکه مباحث کاشی‌کاری پنروز و لوزی طلایی نسبتاً جدید است ولی در ساختار اصلی سازه‌های زیبایی که از معماری و گره‌سازی و حتی مقرنس‌های دوران اسلامی به یادگار مانده به‌کار رفته است و می‌توان نشان داد که در معماری سنتی اسلامی، گره‌ها و شمسه‌ها با ترکیبی از همین دو شکل سرنیزه و بادبادک تشکیل می‌شدند.

[57]penrose tilling [58]dart and kite [59]John Horton Conway




**شکل ۱۳.** لوزی طلایی در مدل پنروز

در آثار ساخته شده به‌دست استاد غلامرضا آقا ابراهیمیان[۶۰] شمسه‌هایی در چوب به‌کار رفته که از ترکیب همین دو لوز شکل پایه به‌وجود آمده ولی نام‌های متفاوتی دارد. در پژوهشی با عنوان گره‌سازی به روایت استاد غلامرضا، از شمسهٔ دایره‌ای نام می‌رود که به ده قسمت مساوی تقسیم شده است و قسمت‌ها دو در میان به هم وصل شده‌اند و می‌توان آلت‌های گره «تندده» را از آن استخراج کرد.[۶۱] آلات تندده عبارت است از پاباریک، لوزهٔ یا ترنج، شش‌بند و دانه بلوط، پابُزی و برگ چنار و شمسهٔ ته‌بریده. از این‌میان، لوزهٔ یا ترنج، همان شکل بادبادک مانند کاشی‌های پنروز را دارند که نامی متفاوت در معماری سنتی گره و مقرنس به خود گرفته است. چهارضلعی $EGKD$ در شکل مشخص است. اگر $ED = DK$ و برابر با یک واحد باشد طول $EG$ و $GK$ برابر با $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ عدد طلایی خواهد شد. در ضمن اگر طول $EG$ و $GK$ برابر با یک در نظر بگیریم طول $ED = DK$ باز برابر با عدد طلایی دیگر، $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ خواهد شد. همان‌طور که در شکل ۱۵ مشخص است $B_1RP$ همان مثلث مخمس است که در رسم ده‌ضلعی مورد استفاده قرار می‌گیرد و $L_1GPN_1$ نیز یک خودمتشابه بزرگتر ترنج $EGKD$ است که در آن نسبت طلایی رعایت شده است.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی در رسالهٔ مفتاح الحساب، در فصل سوم از باب نهم در مقالهٔ چهارم، ضمن تعریف انواع مقرنس و توضیحاتی راجع به ساخت و محاسبهٔ مساحت آن، اشکالی مانند سرنیزه و بادبادک را با عنوان «لوزهٔ» و «ذات الرجلین» تعریف می‌کند با این تفاوت که این دو شکل از زوایایی نزدیک به زوایای ۷۲ و ۳۶ با اندازهٔ ۶۷/۵ و ۲۲/۵ تشکیل شده است و در حقیقت نسبتی نزدیک به نسبت طلایی در این شکل دیده می‌شود بدون آنکه این لوزهٔ به‌کار رفته در مقرنس همان ترنج موجود در شمسه‌ها باشد؛ بنابراین گرچه نسبت‌های زیبایی از اعداد اصم به وسیلهٔ این اعداد پدید می‌آید، این تناسب‌ها دقیقاً نسبت مورد نظر در مثلث مخمس نیست و ممکن است تنها به‌دلیل زیبایی بصری منجر به استفاده از مثلث متساوی الساقین با زاویهٔ رأس ۴۵ زوایای قاعدهٔ ۶۷/۵ به‌عنوان مقیاس مقرنس باشد. در فصل اول از باب دوم همین مقاله، به تعریفات اشکال می‌پردازد که لوزهٔ را ذوالیمینینی[۶۲] با دو زاویهٔ روبروی قائمه، الجودانیه (پاباریک) را با زوایای روبروی منفرجه و الباطیة را با زوایای روبروی حاده نام‌گذاری می‌کند و ذات الرجلین (دوپایه) را نیز متمم یک ذو الیمینین از معین (یا متوازی الاضلاع) می‌نامد. با این حساب، لوزهٔ با زوایای قائمه از لوزهٔ با زاویهٔ مشخص ۷۲ (چنان‌که در توضیحات شمسه آمد) تمییز داده می‌شود و در کتاب کاشانی در گروه ذو الیمینین الباطیة شناخته می‌گردد ولی عنوان خاصی به خود نمی‌گیرد.

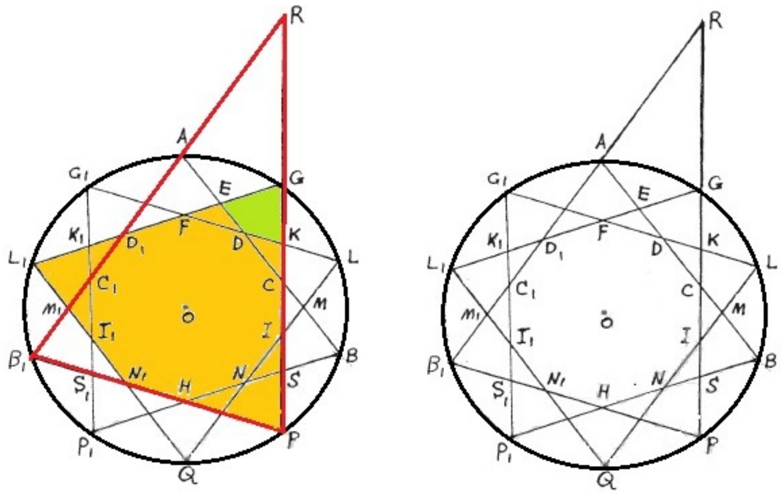
---

[۶۰] از مرحوم استاد غلامرضا آقا ابراهیمیان آثار ارزنده‌ای در مقرنس‌کاری، قطاربندی، رسمی‌بندی، مشبک و گره‌چینی در عتبات عالیات و بناهای تاریخی اصفهان موجود است.

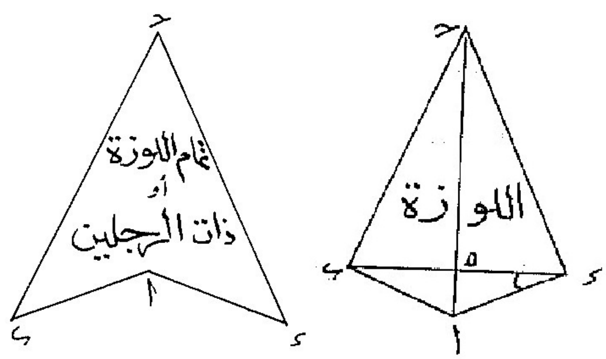
[۶۱] نگاه کنید به [۴۰]

[۶۲] چهارضلعی محدبی است که دو ضلع مجاور آن با یکدیگر مساوی و دو ضلع دیگر آن با یکدیگر مساوی هستند ولی با دو ضلع اول برابر نیستند. البته در چنین چهارضلعی فقط دو زاویه روبرو با یکدیگر برابرند و زوایای مجاور با یکدیگر مساوی نیستند. قطرها یکدیگر را در داخل شکل قطع میکنند و بر هم عمودند.


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506




**شکل ۱۴.** قطعات مختلف شمسه




**شکل ۱۵.** لوزة (پاباریک) و ذات الرجلین (دوپایه)

اصطلاح مثلث طلایی، شاخص طلایی و لوزی طلایی توسط ریاضیدانان دوره اسلامی به‌کار نمی‌رفت ولی طرح پایهٔ پنج‌ضلعی در کتاب اعمال هندسی بوزجانی بر اساس این مثلث به‌دست آمده است. همان‌طور که در این گفتار شرح داده شد، این مثلث در دیگر طرح‌هایی که هندسه‌دانان ارائه می‌دادند به‌کار رفته و در بسیاری از گره‌سازی‌ها، مقرنس‌ها و معماری بناها استفاده شده است هرچند صراحتاً و با ویژگی‌های منحصر به فردش در هیچ یک از متون دوره اسلامی معرفی نشده است.

## ۶. نتیجه‌گیری

جدای از افسانه‌پردازی‌ها پیرامون نسبت طلایی و فرضیه‌هایی مبنی بر اینکه این تناسب در اهرام ثلاثهٔ مصر یا در ساختمان معبد پانتئون یونان باستان و آرامگاه پت‌اوزیریس[63] یا اوزیرین[64] با هدف زیبایی‌شناختی و تقدس وجود داشته است، پژوهش حاضر ردپای این تناسب و مفاهیم عملی و نظری آن را در منابع مکتوب پیش گرفته است. موارد معدودی از تعاریف و یادکرد مستقیم کاربرد این نسبت در میراث مکتوب حسابی و هندسی به‌دست می‌آید. هندسهٔ عملی و کاربری خاص این نسبت در میان دانشمندان مسلمان دورهٔ صفویه و قاجار (مقارن با دوران میانه و جدید در اروپا) به وفور یافت می‌شود خصوصاً کاربرد آن در ساختمان مساجد، گره‌سازی‌ها، کاشی‌کاری‌ها، نقوش تزیینی چوبی، فلزی و گچی و نظایر آن که امروزه با کمک نقشه‌برداری

[63]Petosiris [64]Osirion

از پلان ساختمان‌ها و محاسبات کامپیوتری اجزای آن قابل بررسی و توجیه است. نمونه‌های مکتوب از این هندسهٔ عملی و کاربرد آن در کتاب اعمال هندسی بوزجانی و اثری بی‌نام و نشان و البته (گویا به‌اشتباه) منتسب به کوبنانی با عنوان اشکال المتشابهه دستیاب است.

نسبت طلایی تعاریف نظری کمتری دارد و در منابع متفاوت تنها به‌معرفی کوتاه آن بسنده شده است. در متون دورهٔ اسلامی از آن با اصطلاح تقسیم به ذات وسط و طرفین یاد می‌کنند ولی هیچ‌گاه دربارهٔ فنون خاص معماری و همچنین ویژگی‌ها و کاربردهای این نسبت به‌وضوح و به‌طور مستقل صحبت نشده است پس این امکان وجود دارد که معماران و ریاضیدانان به‌صورت تجربی و عملی با این نسبت و نظایر آن آشنایی داشته و آن‌ها را به‌کار بسته‌اند چنان‌که در بسیاری از بناها مشهود است اما نمی‌توان آن‌را به‌عنوان یک اصل مستقل زیبایی‌شناختی در آثار مکتوب دورهٔ اسلامی یافت؛ چنان‌که مبحث منسجمی که جدای از مثلث طلایی و نسبت ذات وسط و طرفین بر مبنای اصول اقلیدس، به‌بررسی این تناسب بپردازد نیز دیده نشده است. افزون بر آن، شاید بتوان گفت ریاضیدانان دورهٔ اسلامی تناسب طلایی را فارغ از ویژگی‌های مستقلی که دارد به‌صورت نتیجه‌ای از ترسیم یک مخمس یا پنج‌ضلعی منتظم یا حتی به‌عنوان ابزاری در دسترس به منظور ترسیم پنج‌ضلعی، و البته مبتنی بر کتاب اصول اقلیدس به‌کار برده‌اند.

ارتباط حسابی و هندسی این تناسب در کتاب حساب فیبوناچی صورت می‌گیرد و تا پیش از آن در هیچ‌یک از متون با موضوع غیر هندسه (جبر یا حساب) از به‌کارگیری اعداد و ورود این تناسب به بخش حساب خبری نیست تا اینکه نسبت‌های خرگوشی و سری فیبوناچی معرفی می‌شود. اگر بپذیریم که کاشانی حدود قرن پانزدهم میلادی در مفتاح الحساب به‌معرفی عدد طلایی پرداخته می‌توان او را پس از فیبوناچی ریاضیدان بعدی در به‌کارگیری اصول هندسی و معماری بر مبنای این عدد دانست. یعنی شاهد پیوندی خواهیم بود که برخلاف بسیاری از مسائل تاریخ ریاضیات، این‌بار از سوی حساب به هندسه شکل می‌گیرد. کپلر در اواخر قرن شانزدهم به محاسبهٔ فواصل کیهانی پرداخت و هنگامی که محاسبات خود را بسیار نزدیک به نسبتی با نام طلایی یافت، که آن هنگام در موسیقی کاربرد عملی داشت، پلی بر محاسبات به جهانی طلایی زد و نسبت آسمانی پدیدار گشت. داوینچی، سنت‌شکن این بازی بزرگ اعداد و تناسب‌ها بود. او با نگاه ماشینی خود به پدیده‌های طبیعی، بیانی جدید و جامع از تناسب‌های طلایی به‌کاررفته در طبیعت ارائه داد؛ از جمله نمایش آن در اجزای بدن انسان؛ و این‌بار جریان نوین و فراگیری از نسبت طلایی با ملاحظات زیبایی‌شناختی ظاهری آن به‌راه افتاد. این بار دومی بود که پس از زیبایی الحان و موسیقی نواخته شده بر پایهٔ تناسب مقدس، این تناسب به شیوه‌ای نو تبیین می‌شد و زیبایی چشمگیر آن در آثار مجسم به همگان عرضه می‌گشت. از دورهٔ میانی به این‌سو، این نسبت با افسانه‌های زیادی درآمیخت. از آنجا که معماران دورهٔ اسلامی فنون کار خویش را در پردهٔ مکتومات نهان می‌داشتند و از ایشان رسایل قابل توجهی به‌دست ما نرسیده است، هر آنچه راجع به این نسب می‌دانیم قضایای هندسی و مسائل ریاضیاتی پایه‌ای است که بخشی از آن در اصول اقلیدس نیز بیان شده و به اثبات رسیده است. با این حال آثار بسیار زیبای معماری اسلامی از جمله گره‌چینی‌ها، کاشی‌کاری‌ها و مقرنس‌هایی که از دورهٔ اسلامی به یادگار مانده، شکوه پایندهٔ دانش هندسه و ریاضیات و نمود عملی آن را به نمایش می‌گذارند.

## مراجع


[1] G. Markowsky, Misconceptions about the Golden Ratio, *The College Mathematics Journal (Mathematical Association of America)*, **23** (1992) 2–19.

[2] T. Dantzig, *The Bequest of The Greeks*, Charles Scribner's Sons, New York, 1955 191 pp.

[3] M. Livio, *The Golden Ratio, The Story of PHI*, 2002.

[4] G. Sarton, When did the term "golden section" or its equivalent in other languages originate? [Queries and Answers], *Isis*, **42** (1951) p. 47.



DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

[5] B. Fett, An In-depth Investigation of the Divine Ratio, *The Montana Mathematics Enthusiast (TMME)*, **3** (2006) 157-175.

[6] R. Herz-Fischler, A Very Pleasant Theorem, *The College Mathematics Journal (Mathematical Association of America)*, **24** (1993) 318–324.

[7] L. M. Dabbour, Geometric proportions:The underlying structure of design process for Islamic geometric patterns, *Frontiers of Architectural Research*, Elsevier, **1** (2012) 380–391.

[8] A. Bennett, *Follow the golden ratio from Africa to the Bauhaus for a cross-cultural aesthetic for images*, 2012. http://www.researchgate.net/publication/269709899.

[9] W. K. Chorbachi, In the Tower of Babel: Beyond Symmetry in Islamic Design, *Computers Math.*, Harvard University **17** (1989) 751–789.

[10] L. Freitas, Notes on Some Pentagonal "Mysteries" in Egyptian and Christian Iconography, *Fivefold Symmetry*, by Istavan Hargittai, Scientific World, Singapore (1992) 307–332.

[11] J. Pottage, The Mathematical Gazette: Review, *The Mathematical Association*, (1989) 265–267.

[12] Plato, *Timaeus*, Desmond Lee, Penguin Books, 1977.

[13] J. Kappraff, The Relationship Between Mathematics and Mysticism of the Golden Mean Through History, *Fivefold Symmetry*, by Istvan Hargittai, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd Singapore, (1992) 33–66.

[14] H. F. Verheyen, The Icosahedral Design of the Great Pyramid, *Fivefold Symmetry*, by Istvan Hargittai, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, Singapore, (1992) 333–359.

[15] D. E. Smith, *History Of Mathematics*, **2**, Book contributor Osmania University, Dover Publications Inc., 1951.

[16] B. L. Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilization*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1983.

[17] J. L. Heiberg, *Euclid's Elements of Geometry*, Translated by Richard Fitzpatrick, 1883–1885.

[18] A. Seidenberg, The Origin of Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences*, Springer, **18** (1974) 301–342.

[19] R. Herz-Fischler, Theorem xiv of the First "Supplement" to The Elements, *Archives internationales d'histoire des sciences* **38** (1988) 3–66.

[20] W. K. Chorbachi and A. L. Loeb, An Islamic Pentagonal Seal (From Scientific Manuscripts of the Geometry of Design), *Fivefold Symmetry*, by Istavan Hargittai, Scientific World, Singapore, (1992) 283–305.

[21] E. Kheirandish, *An Early Tradition in Practical Geometry: The Telling Lines of Unique Arabic and Persian Sources*, The Arts of Ornamental Geometry; A Persian Compendium on Similar and Complementary Interlocking Figures, Ed. by Gulru Necipuglu, Brill, Leiden, Boston, 2017 79–144.

[22] N. al-Din Tusi, al-Magala al-Rabi's, *Sitat Magalat min Kitab Tahrir 'Uqlidis*, Al-Matb'a al-Hindya, Calcutta (1924) 116–117.

[23] Paris Bibl. Nat. ancient fond person MS169, starting folio141.

[۲۴] ج. ل. برگرن، بررسی گزیده ای از پژوهش‌های منتشر شده در تاریخ ریاضیات دوره اسلامی، میراث علمی اسلام و ایران، ترجمهٔ حمید بهلول، سال سوم ۱ (۱۳۹۳).

[۲۵] ی. کرامتی، اصول اقلیدس، دایرة المعارف بزرگ اسلامی، مرکز دایرة المعارف بزرگ اسلامی، تهران.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

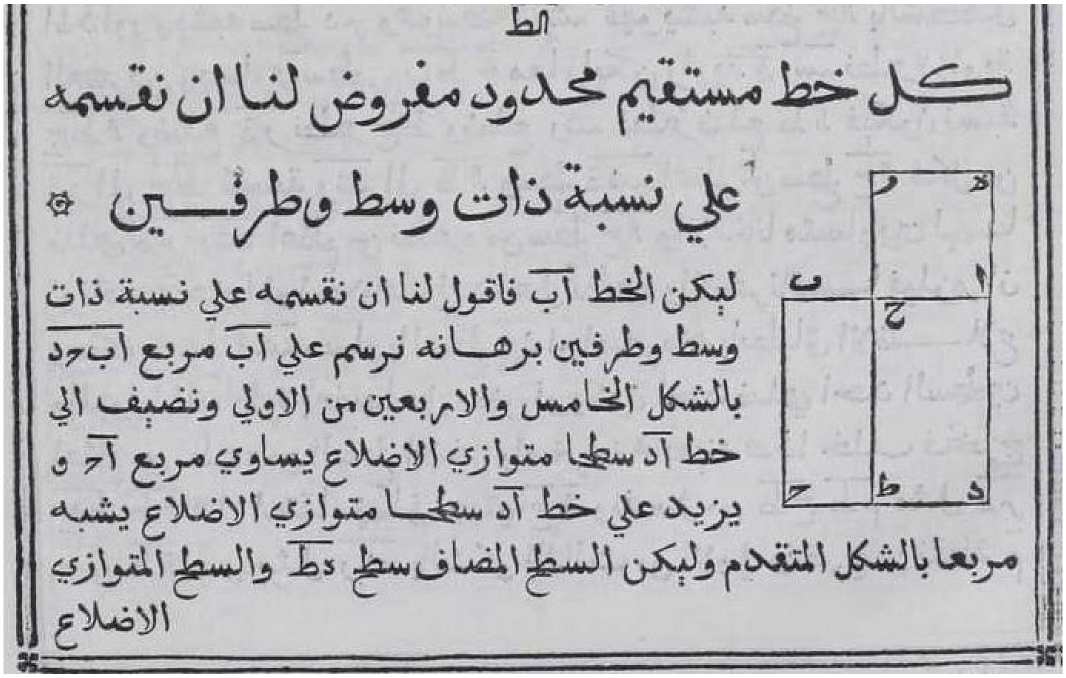
[۲۶] ابوریحان بیرونی، التفهیم لأوائل صناعة التنجیم، شرح و تصحیح جلال‌الدین همایی، چاپخانهٔ بهمن، تهران، ۱۳۵۱.
[۲۷] ابن سینا، الشفاء، به کوشش ابراهیم مدکور، قم، ۱۴۰۵.
[۲۸] ع. انوار، سیر هندسه اقلیدسی از اقلیدس تا شیخ الرئیس ابوعلی سینا، تاریخ علم، ۲ (۱۳۸۳) ۱۱۹– ۱۳۵.
[۲۹] م. مختاری، دانش‌نامهٔ علایی، پایان نامه، دانشکدهٔ علوم ریاضی شریف، تهران، ۱۳۷۴.
[۳۰] نصیرالدین طوسی، تحریر اصول اقلیدس، دست‌نویس ش. ۴۰۷۸ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.
[۳۱] نصیرالدین طوسی، تحریر اصول اقلیدس، دست‌نویس کتابخانهٔ ملی قطر. https://www.wdl.org/en/item/10666/
[۳۲] قطب‌الدین شیرازی، درة التاج لغرة الدباج، به کوشش حسن مشکان طبسی، تهران، ۱۳۲۴.
[۳۳] قطب‌الدین شیرازی، درة التاج لغرة الدباج، دست‌نویس ۶۹۸ کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.
[۳۴] م. کاوه‌یزدی، رساله‌ای از ثابت بن قرّه در هندسه، میراث علمی اسلام و ایران، سال اول ۱ (۱۳۹۱).
[۳۵] غ. جونپوری، جامع بهادرخانی، چاپ سنگی کلکته، ۱۸۳۵.
[۳۶] عبدالغفار نجم‌الدوله، اصول هندسه، تهران، ۱۳۱۸.
[۳۷] ع. جذبی، هندسهٔ ایرانی–کاربرد هندسه در عمل، سروش، تهران، ۱۳۷۶.
[۳۸] ا. قربانی و م. شیخان، بوزجانی‌نامه، انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی، تهران، ۱۳۷۱.
[۳۹] ابواسحاق کوبنانی، ترجمهٔ في ما یحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه، میکروفیلم ش. ۷۷۵، کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران.
[۴۰] م. اسلام‌پناه، گره‌سازی به روایت استاد غلامرضا، فرهنگ ایران زمین، ۲۹ (۱۳۷۵).
[۴۱] غیاث‌الدین جمشید کاشانی، مفتاح الحساب، به کوشش نادر نابلسی، دمشق، ۱۹۷۷.
[۴۲] غیاث‌الدین جمشید کاشانی، دست‌نویس ش. ۶۱۴۸، کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی.

**فاطمه سادات سعادتمند**
پژوهشکدهٔ تاریخ علم، دانشگاه تهران، تهران
saadatmand88@ut.ac.ir

فاطمه‌السادات سعادتمند پژوهشگر تاریخ ریاضیات و دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم از پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران است. پایان‌نامهٔ وی در گرایش تاریخ ریاضیات دورهٔ اسلامی با موضوع «واژگان علم حساب در آثار فارسی (تا پیش از ریاضیات جدید)» پژوهشی میان‌رشته‌ای و پیکره‌بنیان در تاریخ علم حساب قلمداد می‌گردد. گردآوری، مطالعه، طبقه‌بندی و بررسی نسخ خطی عربی و فارسی علوم ریاضی، استخراج و تحلیل پیوندهای متنی و محتوایی میان آثار (به‌ویژه علم الحساب) بخشی از فعالیت‌های پژوهشی وی است. از این روابط و اشتراکات میان‌متنی به منظور متن‌پژوهی، واژگان‌پژوهی، اصطلاح‌شناسی و همچنین مأخذشناسی آثار ریاضیات دورهٔ اسلامی استفاده می‌شود.


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

**پیوست آ. تعاریف نسبت ذات وسط و طرفین**

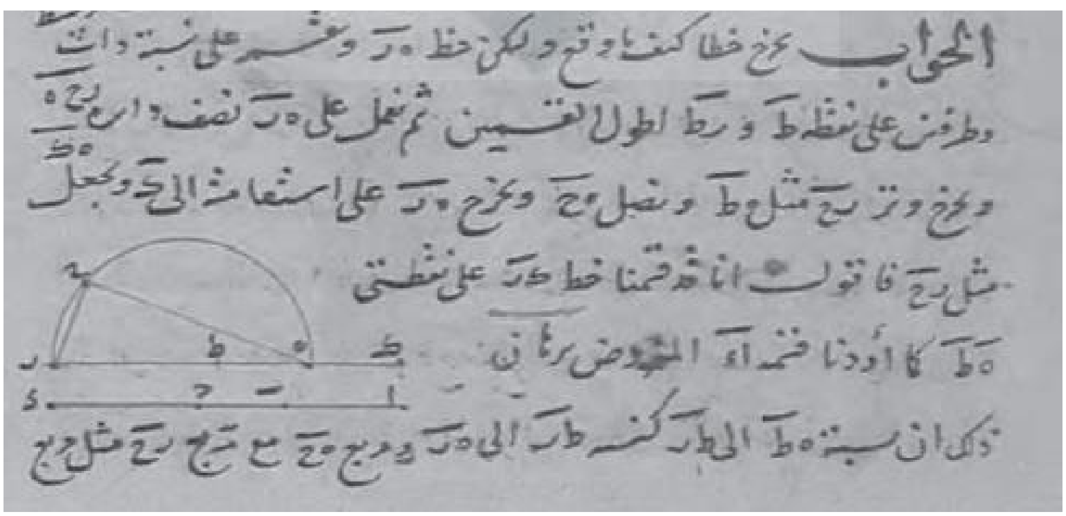


كط

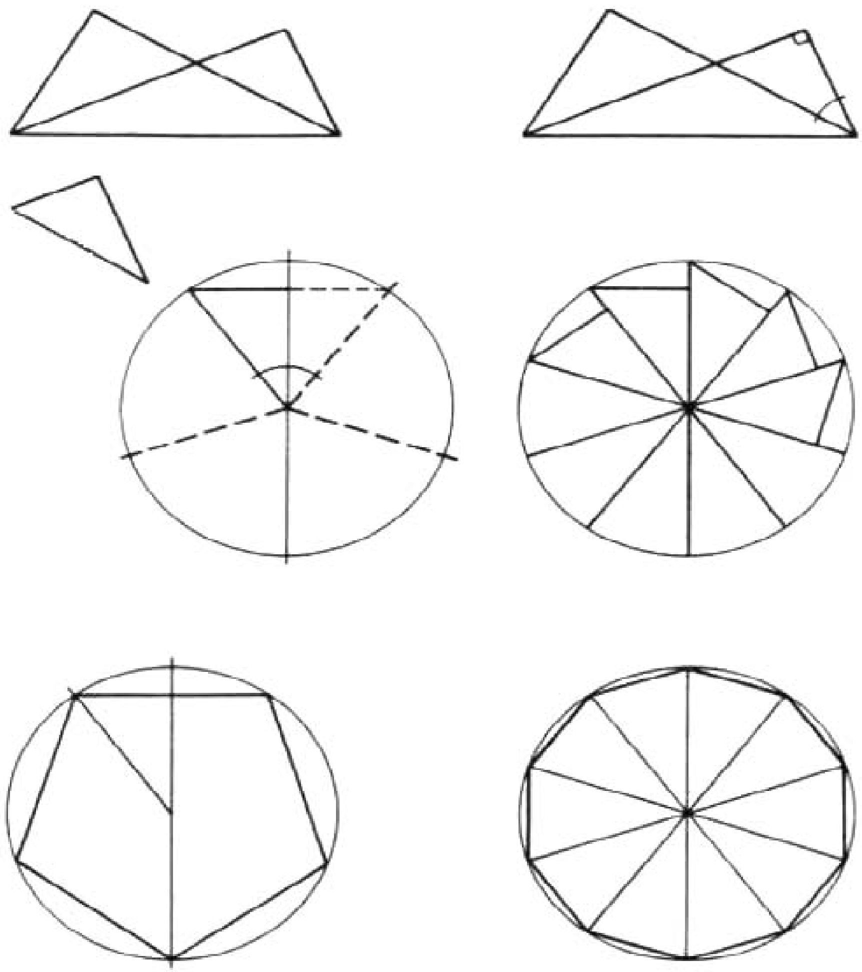
كل خط مستقيم محدود مفروض لنا ان نقسمه
علي نسبة ذات وسط وطرفين

لبكن الخط اب فاقول لنا ان نقسمه علي نسبة ذات
وسط وطرفين برهانه نرسم علي اب مربع ابجد
بالشكل الخامس والاربعين من الاولي ونضيف الي
خط اد سطحا متوازي الاضلاع يساوي مربع اج و
يزيد علي خط اد سطحا متوازي الاضلاع يشبه
مربعا بالشكل المتقدم وليكن السطح المضاف سطح دط والسطح المتوازي
الاضلاع

**شکل ۱۶.** تحریر اصول اقلیدس: قضیهٔ ۲۹ از مقالهٔ ششم، تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین. قضیهٔ مزبور در نسخه‌های دیگر و بر طبق کتاب اصول، شماره ۳۰ است.



**شکل ۱۷.** تصویر دست‌نویسی از رساله ثابت‌بن قره به شماره ثبت ۷۵۵۸۹ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران



**شکل ۱۸.** بازسازی مراحل ساخت پنج ضلعی و ده ضلعی با کمک گونیا


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

## پیوست ب. تحریر اصول اقلیدس

الخامس فلان ب‌ا و ب‌د قد خرجا من نقطة ب الخارجة عن دايرة
احد وبا قاطع اياها بد ومنته اليها وسطح اب في بح كمربع بد فخط
بد يماس دايرة احد باستبانة الشكل الخامس
والثلثين من الثالثة فخط حد خارج من نقطة
التماس قاطعا للدايرة الي قطعتي حاد حد فزاوية
حاد كزاوية حدب بالشكل الواحد والثلثين
من الثالثة وزاوية بحد كزاويتي حاد حدا بالشكل
الثاني والثلثين من الاولي فزاوية بحد كزاوية
ادب لكون زاوية حدب كزاوية حاد تكن زاوية ادب كزاوية ابد
بالشكل الخامس من الاولي لكون ضلعي اب اد متساويين وزاويتا دحب
دبح متساويتان فضلع دح كضلع دب بالشكل السادس من الاولي
فضلعا حا حد متساويان فزاويتا حاد حدا متساويتان بالشكل الخامس
من الاولي فزاوية حاد اعني زاوية حدب مع زاوية حدا ضعف زاوية
حاد وهما اعني زاويتي حدا حاد كزاوية ادب المساوية لزاوية ابد فكل
من زاويتي ابد ادب ضعف زاوية باد فالحكم ثابت وذلك ما اردنا
ان نبين ✡
واستبان منه ان كل واحدة من زاويتي ابد ادب المتساويتين من مثلث
ابد خمسا قايمتين لان كل واحدة منهما ضعف زاوية باد وزاوايا كل
مثلث كقايمتين لما تبين في الشكل الثاني والثلثين من الاولي ويقال لهذا
المثلث مثلث المخمس ✡

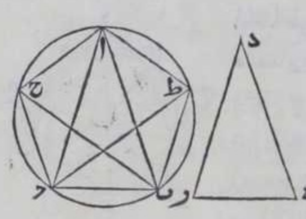
يا

كل دائرة مفروضة لنا ان نرسم فيها مخمسا متساوي الاضلاع والزوايا ✡

لبكن الدايرة ابح فنعمل مثلث
المخمس بالشكل المتقدم وهو مثلث
دهر وكل واحدة من زاويتي دهر دره
ضعف زاوية هدر ونرسم في دايرة
ابح مثلث ابح زواياه تساوي زوايا مثلث دهر بالشكل الثاني وتكون
زاوية ا منه تساوي زاوية د من مثلث دهر وننصف كلا من زاويتي
ابح احب بخطي بح حط المستقيمين بالشكل التاسع من الاولي
ونخرجهما الي ان يلقيا المحيط علي نقطتي ح ط ونصل اح حح اط طب
بخطوط مستقيمة فاقول ان شكل احجبط مخمس متساوي الاضلاع
والزوايا برهانه فلان كلا من زاويتي ابح احب من مثلث ابح منصفة
وكل

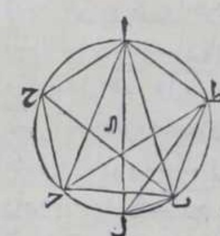
**شکل ۱۹.** معرفی مثلث مخمس و شرح ترسیم آن

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506




وكل منها ضعف زاوية ب ا ح فزاوايا
ب ا ح ا ب ح ح ب ح ا ح ط ب ح ط المخمس
متساوية فقسي ا ح ح ح ح ب ب ط ط ا
المخمس متساوية بالشكل الخامس
والعشرين من الثالثة فالمخمس متساوي
الاضلاع وكل واحد من تلك الاوتار
واقع داخل دايرة ا ب ح بالشكل الثاني من الثالثة وكل من زواياه انما يقع
علي ثلث قسي من قسي المخمس المتساوية فزوايا المخمس متساوية بالشكل
السادس والعشرين من الثالثة وهي ط ا ح ا ح ح ح ح ب ح ب ط ب ط ا
بالحكم ثابت وذلك ما اردنا ان نبين ☼

واستبان منه ان مربع وتر زاوية المخمس مع مربع وتر المعشر يساويان
اربعة امثال مربع نصف قطر دايرة المخمس وذلك




لانا نجد مركز دايرة المخمس بالشكل الاول من
الثالثة وليكن نقطة ه ونصل بينها وبين نقطة
ا بخط مستقيم ونخرجه علي استقامته الي ان
ينتهي الي المحيط علي نقطة ل ونصل بينها وبين
نقطة ب بخط مستقيم فتحصل زاوية ا ب ل قايمة
بالشكل الثالثين من الثالثة فمربع ا ل المساوي
لاربعة امثال مربع ا ه بالشكل الرابع من الثانية يكون مساويا لمربعي
ا ب وتر زاوية المخمس ومربع ب ل وتر المعشر بالشكل السابع والاربعين
من الاولي ☼

واستبان منه ايضا ان زاوية المخمس المتساوي الاضلاع الواقع في الدايرة
تساوي قايمة وخمس قايمة لان اذا وصلنا بين نقطتي ط ل بخط مستقيم
كانت زاوية ا ط ل قايمة بالشكل الثلثين من الثالثة وزاوية ل ط ب خمس
قايمة لان المحيط بازاء قايمتين باستبانة الشكل الثلثين من الثالثة فقوس
ب ل خمس نصف المحيط ☼

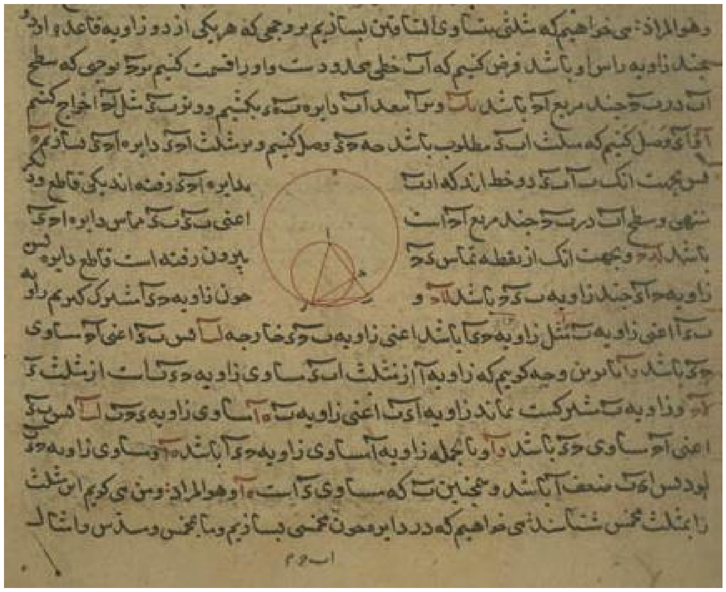
يب

## كل دايرة مفروضة لنا ان نرسم عليها مخمسا متساوي الاضلاع والزوايا ☼

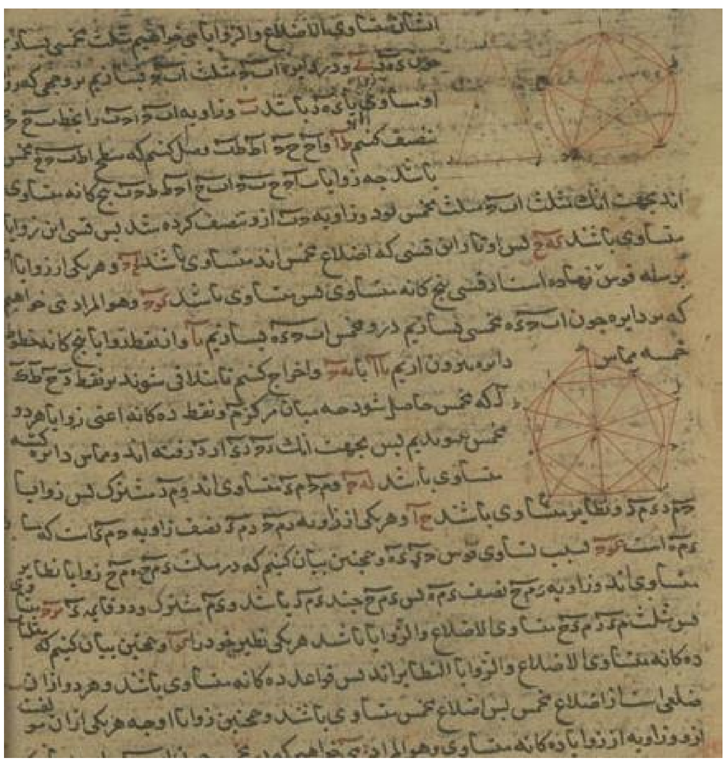
لبكن الدايرة ا ب ح فنرسم فيها مخمس ا ب ح د ه بالشكل المتقدم ونجد
مركزها بالشكل الاول من الثالثة وهو نقطة م ونصل بينها وبين كل
واحدة من نقط ا ب ح د ه بخط مستقيم فيحدث مثلثات ا م ه ه م د د م ح
ح م ب ب م ا فهي متساوية بالشكل الثامن من الاولي لتساوي اضلاعها

**شکل ۲۰.** ترسیم پنج‌ضلعی منتظم


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506



**شکل ۲۱.** ترسیم مثلث مخمس

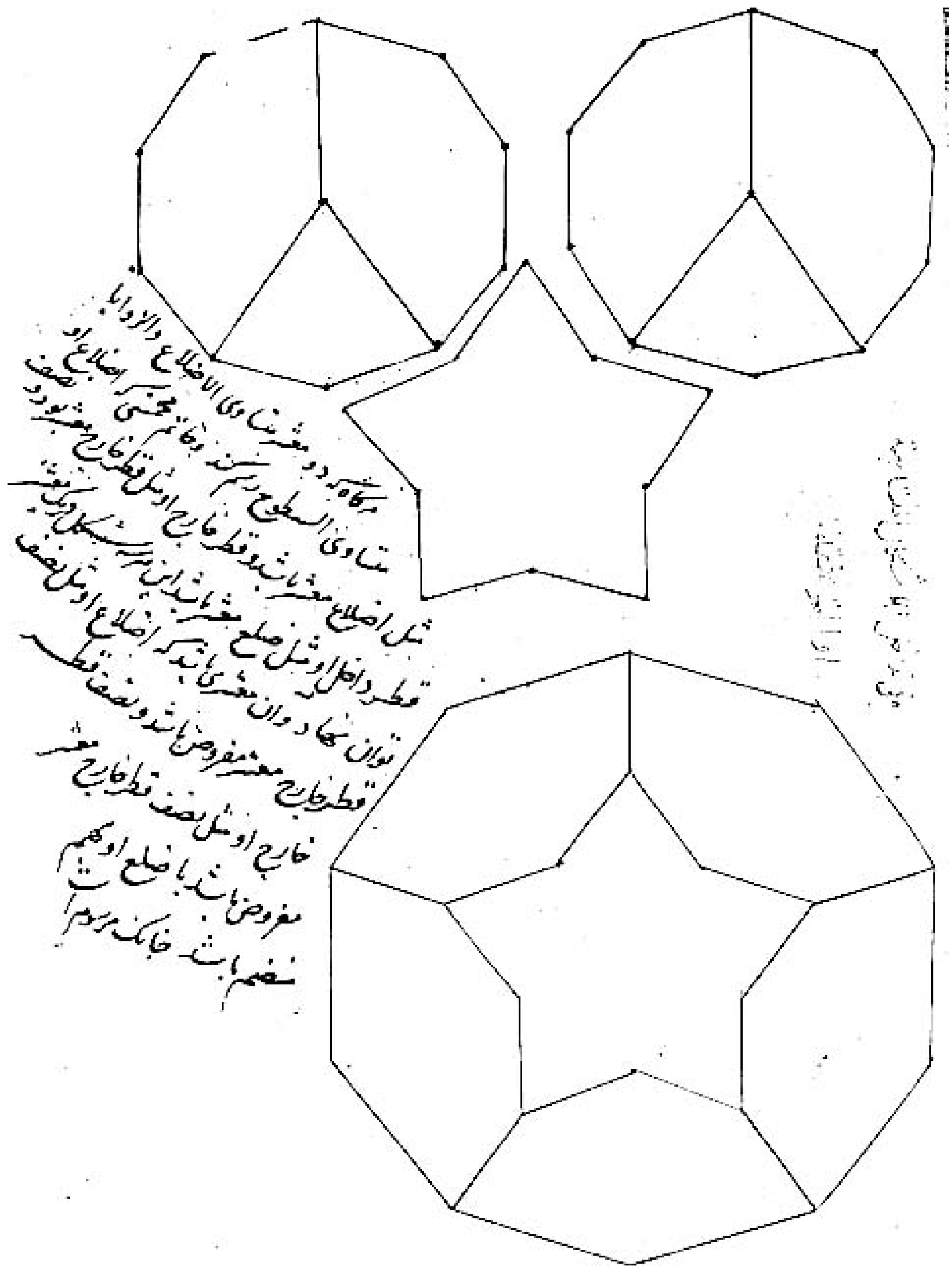


**شکل ۲۲.** استفاده از مثلث مخمس در رسم پنج ضلعی

**پیوست پ. دست‌نویسی از درة التاج لغرة الدباج**

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

**پیوست ت. رسالهٔ ناشناس محفوظ در کتابخانهٔ ملی فرانسه با شمارهٔ ۱۶۹**

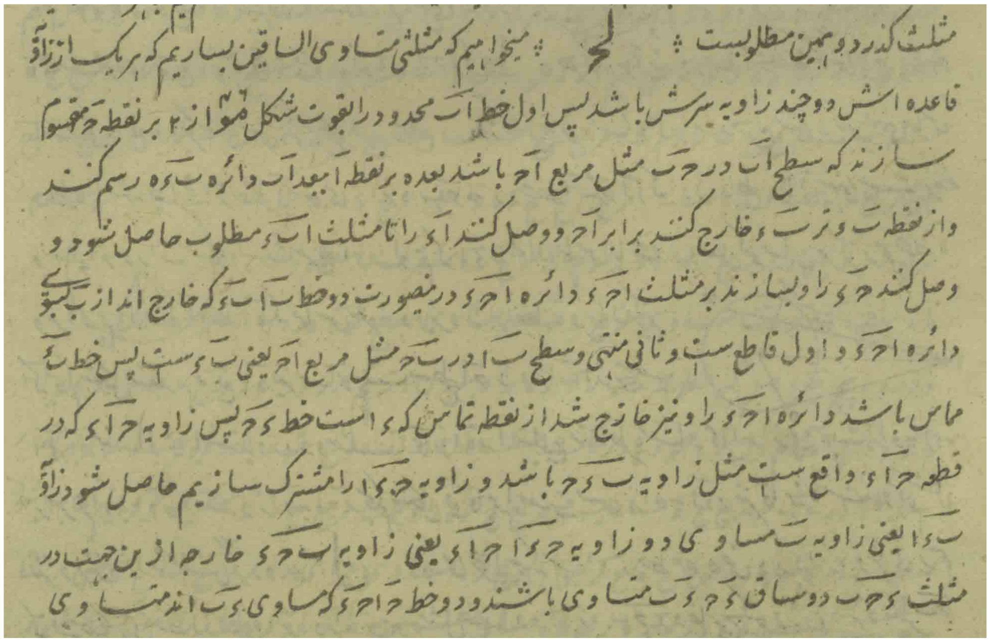


**شکل ۲۳.** شرح ترسیم خاتم یا ستارهٔ کوکبی در رسالهٔ ناشناس با عنوان «و في تداخل الاشكال المتشابهة او المتوافقة»

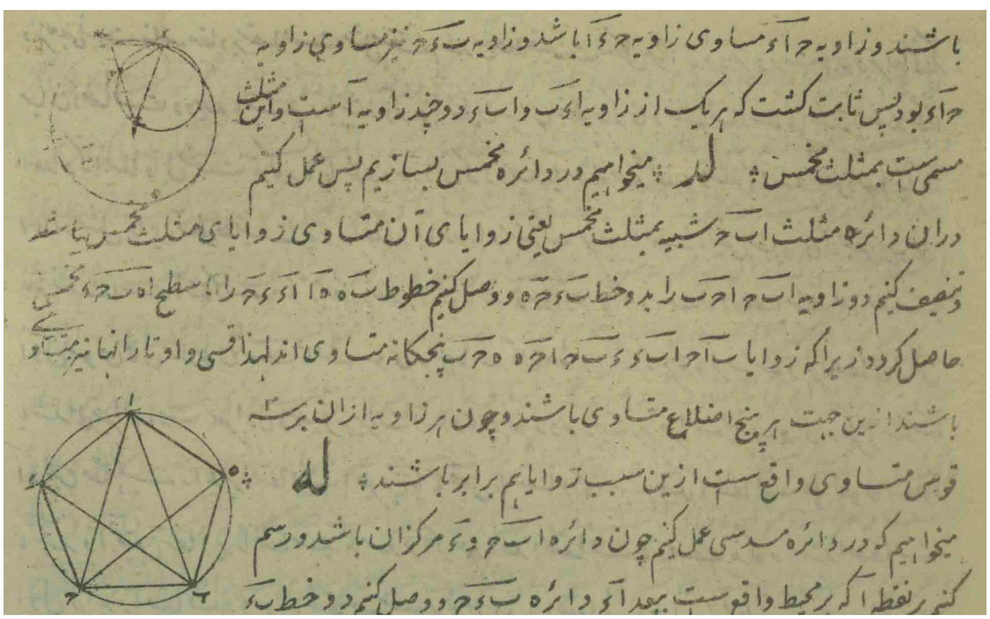


DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

**پیوست ث.  دست‌نویسی از چاپ سنگی جامع بهادرخانی**


مثلث کند و همین مطلوبست ❊ لج ❊ میخواهیم که مثلثی متساوی الساقین بسازیم که هریک از زاویه
قاعده اش دو چند زاویه سرش باشد پس اول خط اب محدود در القوت شکل مو از ب بر نقطه ج مقسوم
سازند که سطح اب در جب مثل مربع اج باشد بعده بر نقطه ا ببعد اب دائره ب ده رسم کنند
و از نقطه ب وتر ب د خارج کنند برابر اج و وصل کنند اد را تا مثلث اب د مطلوب حاصل شود و
وصل کنند ج د را و بسازند بر مثلث اج د دائره اج د در این صورت دو خط اب ب د که خارج اند از ب بسوی
دائره اج د و اول قاطع ست و ثانی منتهی و سطح ب ا در ب ج مثل مربع اج یعنی ب د ست پس خط ب د
مماس باشد دائره اج د را و نیز خارج شد از نقطه تماس که د است خط د ج پس زاویه ج ا د که در
قطعه ج ا د واقع ست مثل زاویه ب د ج باشد و زاویه ج د ا را مشترک سازیم حاصل شود زاویه
ب د ا یعنی زاویه ب مساوی دو زاویه ج د ا ج ا د یعنی زاویه ب ج د خارج از این جهت در
مثلث د ج ب دو ساق د ج د ب متساوی باشند و دو خط ج ا ج د که مساوی د ب اند متساوی

**شکل ۲۴.**  قضایای ۳۳ و ۳۴


باشند و زاویه ج ا د مساوی زاویه ج د ا باشد و زاویه ب د ج نیز مساوی زاویه
ج ا د بود پس ثابت گشت که هریک از زاویه ا د ب و ا ب د دو چند زاویه ا است و این مثلث
مسمی ست بمثلث مخمس ❊ لد ❊ میخواهیم در دائره مخمس بسازیم پس عمل کنیم
در آن دائره مثلث اب ج شبیه بمثلث مخمس یعنی زوایای آن متساوی زوایای مثلث مخمس باشد
و تنصیف کنیم دو زاویه اب ج ا ج ب را بدو خط ب د ج ه و وصل کنیم خطوط ب ه ه ا ا د د ج را تا سطح ا ه ب ج د مخمس
حاصل گردد زیرا که زوایای ب ا ج ا ب د د ب ج ا ج ه ه ج ب پنجگانه متساوی اند لهذا قسیها و اوتار آنها نیز متساوی
باشند از این جهت هر پنج اضلاع متساوی باشند و چون هر زاویه از آن بر سه
قوس متساوی واقع ست از این سبب زوایا هم برابر باشند ❊ له ❊
میخواهیم که در دائره مسدسی عمل کنیم چون دائره اب ج د و ه مرکز آن باشد و رسم
کنیم بر نقطه ا که بر محیط واقع ست ببعد ا ه دائره ب ه ج د و وصل کنیم دو خط ب د

**شکل ۲۵.**  ترسیم مثلث مخمّس

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506

# A Study of the Concept and Background of Golden Ratios in Written Sources

(Ancient Greece, Islamic period, Middle Ages and Modern Times)

Fatima Saadatmand

**Abstract:** One of the most popular theories in aesthetics is the golden ratio theory in either theoretical or practical geometry. The golden ratio, the golden proportion which is called the extreme and mean ratio by Euclid, goes by other several various names over history. The golden ratio is well known in the artistic composition and architecture of buildings, statues, and sculptures, as still used today. There are a lot of myths about the golden ratio; Some attribute it to sacred numbers among the Pythagoreans, and some figure out an excellent placement in geometry and architecture for it, mentioning that particular ancient temples and structures were built on the basis of these numbers. The present study aims to examine the written background of the golden ratio through the written heritage of the Islamic period including accessible manuscripts and treatises as primary sources, besides the articles and reports on ancient Greek works, mainly in Greek, Latin, or other languages as secondary sources. In this article, we first explain the background of this issue in the case of ancient Greece, and then we review some textbooks of the Islamic period on the subject of arithmetic or geometry that addressed this theory directly or indirectly. Since this article relies on the Islamic period in medieval and early modern times, only the treatises and some of the efforts spared including the existing written works and the visual arts from the Islamic period to the present century are introduced. Moreover, the special shapes famed as sacred or golden due to their specific geometric properties are described.

**G**olden ratio, Extreme and mean ratio, aesthetics, Islamic period, practical geometry.

**Fatima Saadatmand**

Research Institute of History of Science, University of Tehran, Tehran.

Email: saadatmand88@ut.ac.ir

Communicated by Alireza Abdollahi.

Article Type: Research Paper.

Received: 10/05/2022, Accepted: 22/01/2023.



DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.133483.1506