ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۷، شماره ۴ (۱۴۰۱)، صص. ۱-۱۰
http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

الکساندر لیاپانوف، خالق نظریه‌ی مدرن پایداری*

لَسلو هاتوانی
مترجم: رامین کاظمی

چکیده. الکساندر م. لیاپانوف، ریاضیدان برجسته‌ی روسی، صد سال پیش در ۶ نوامبر ۱۹۱۸ درگذشت. برای گرامی‌داشت یاد او، رویدادهای اصلی زندگی او در دوران دانشجویی، سال‌های اقامت در سن‌پترزبورگ تا سال ۱۸۸۵، سپس دوره‌ی زندگی در خارکف، و سرانجام دوره‌ی دوم زندگی او در سن‌پترزبورگ از سال ۱۹۰۲ را مرور می‌کنیم. زمینه‌های اصلی فعالیت علمی او (نظریه‌ی پایداری، نظریه‌ی پتانسیل، نظریه‌ی احتمال، شکل سیارات) را با تمرکز بر نظریه‌ی پایداری و آشوب به تفصیل بازگو می‌کنیم.

الکساندر میخائیلوویچ لیاپانوف[۱]، محقق برجسته ریاضیات نه‌تنها در روسیه، بلکه بدون اغراق در تاریخ ریاضیات در سراسر جهان، صد سال پیش در ۶ نوامبر ۱۹۱۸ درگذشت.

لیاپانوف در ۲۵ مه ۱۸۵۷ در یاروسلاو (روسیه) به دنیا آمد. پدرش ستاره‌شناس رصدخانه‌ی کازان بود؛ که بعدها به‌عنوان مدیر مدرسه‌ی راهنمایی یاروسلاو مشغول به‌کار شد. در خانواده‌ی هفت فرزندی او تنها سه پسر به سن بزرگسالی رسیدند. الکساندر پسر بزرگتر بود. برادرانش نیز مانند او با استعداد بودند: برادر بزرگترش سرگئی[۲] آهنگساز مشهوری بود، بوریس[۳] با زبان‌شناسی اسلاوی سروکار داشت و عضو فرهنگستان علوم روسیه شد. الکساندر کوچک تحصیلات ابتدایی خود را در خانه به‌عنوان شاگرد خصوصی پدرش و پس از مرگ او، نزد عمویش به پایان رساند. در سال ۱۸۷۰، خانواده به نیژنی–نووگورود[۴] نقل مکان کردند. او در آنجا دانش‌آموز دبیرستان محلی بود و در سال ۱۸۷۶ با مدال طلا فارغ‌التحصیل شد. با الهام از فضای خلاقانه‌یی که در خانه و در بین خویشاوندان نزدیکش بود، تا آن زمان علاقه‌ی زیادی به علوم پیدا کرده بود [۲].

لیاپانوف جوان، پس از پایان دوره‌ی متوسطه، در دانشکده‌ی ریاضیات دانشگاه سن‌پترزبورگ ثبت‌نام کرد. این دوره، سال‌های طلایی مکتب آموزش ریاضی در سن‌پترزبورگ بود که به لطف بنیان‌گذار آن، ریاضیدان برجسته‌ی آن زمان، پافنوتی ل. چبیشف[۵] و شاگردانش، الکساندر اِن. کورکین[۶] و ئیگور آی. زولوتارف[۷] فضایی سرشار از عشق و علاقه در او ایجاد کرده بود. لیاپانوف دو سال زودتر از حد معمول فارغ‌التحصیل شد و افتخارات زیادی را به‌دست آورد، سپس در گروه مکانیک

عبارات و کلمات کلیدی: دستگاه دینامیکی، پایداری، پایداری مجانبی، نمای لیاپانوف، آشوب، قضیه‌ی حدی مرکزی.
دبیرتخصصی رابط: صغری نوبختیان
نوع مقاله: ترجمه‌ای
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۳۰
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2023.136061.1548 .

*L. Hatvani, Aleksandr Lyapunov, the man who created the modern theory of stability, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **26** (2019) 1–9. [1]Aleksandr Mikhailovich Lyapunov [2]Sergei [3]Boris [4]Nizhnii-Novgorod [5]Pafnutii L. Chebyshev [6]Aleksandr N. Korkin [7]Yegor I. Zolotarev

نظری دانشگاه مشغول به‌کار شد. اولین دوره‌ی زندگی علمی او در سن‌پترزبورگ تا سال ۱۸۸۵ به طول انجامید. بعدها، در سال ۱۹۰۲، پس از این‌که عضو پیوسته‌ی فرهنگستان علوم روسیه شد، به سن‌پترزبورگ بازگشت.

در دوره‌ی سال‌های ۱۸۸۵-۱۸۷۶ فضای الهام‌بخش مدرسه‌ی ریاضی سن‌پترزبورگ، نه‌تنها به‌واسطه‌ی استادان و دانشمندانی که در آنجا تدریس و تحقیق می‌کردند، بلکه همچنین به‌خاطر جامعه‌ی دانشجویان آن، در آینده‌ی علمی لیاپانوف مؤثر بود. مرد جوان که کم‌کم به خودباوری می‌رسید، بسیار تحت تأثیر چبیشف بود. از خاطرات او پیداست که به سخنرانی‌های چبیشف بسیار علاقه داشته است. ماهیت فعالیت علمی بعدی او، با این سخنرانی‌ها، توصیه‌ها، نظرات و دستورات شخصی استادش، شکل گرفت. مانند سایر پیروان چبیشف، او نیز این تصور کلی را داشت که تحقیقات ریاضی باید براساس واقعیت‌ها صورت گیرد. فقط موضوعات تحقیقاتی که از کاربردها نشأت می‌گیرند، ارزشمند هستند و تنها آن نظریه‌هایی واقعاً مفید هستند که از بررسی موارد خاص در دنیای واقعی سرچشمه می‌گیرند.

پس از فارغ‌التحصیلی، در سال ۱۸۸۲، لیاپانوف بارها به چبیشف سر زد و از او در مورد موضوع پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد خود مشاوره گرفت. چبیشف بر این باور بود که نباید مسائل ساده‌ی ریاضی، که با روش‌های عمومیِ شناخته شده قابل حل هستند، را مطالعه کرد، هرچند مسئله و پاسخ آن نو باشند. او معتقد بود هر ریاضیدان جوانی که بخواهد در تحقیقات علمی موفق باشد باید سعی کند به مسائل دشوار و جدی ریاضی بپردازد و آنها را حل کند. به این ترتیب او به لیاپانوف، محقق بخش مکانیک نظری، مسئله‌ی زیر را پیشنهاد کرد. می‌دانیم که اَشکال تعادلیِ سیالاتی که با سرعت‌های کم می‌چرخند، بیضی هستند، امّا این بیضی‌ها در مقادیر بحرانی خاصی از سرعت چرخش، از بین می‌روند. آیا این درست است که بیضی‌ها با سرعت بحرانی به اَشکال تعادلی جدیدی تبدیل می‌شود که در سرعت‌های بالا نزدیک به مقادیر بحرانی تاحدی با بیضی تعادلی تفاوت دارند؟ به زبان پیشرفته، این یک مسئله‌ی دووجهی است که در بررسی اَشکال سیارات اهمیت اساسی دارد. چبیشف به لیاپانوف گفت: "اگر این مسئله را حل کند، یک ریاضیدان مشهور خواهد شد". بعداً چبیشف متوجه شد که همان مسئله را برای زولوتارف و صوفیا کوالفسکایا[8] نیز مطرح کرده است. معلوم نشد که آیا آنها به این سوال پرداخته‌اند یا نه. این مسئله باعث رفتن به سمت مسائلی شد که طی آزمایش‌های ناموفق کشف می‌شد: آیا بیضی‌های تعادلی در سرعت‌های کم پایدار هستند؟ آیا ممکن است ما و همه‌ی آیندگان مدیون این بررسی برای تولد نظریه‌ی مدرن پایداری باشیم؟ در سال ۱۸۸۴، لیاپانوف پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد خود را در مورد این موضوع نوشت و در سال ۱۸۸۵ در دانشگاه سن‌پترزبورگ از آن دفاع کرد. یکی از داوران پایان‌نامه، دیمیتری کِی. بوبیلف[9] بود که او را تشویق به انتشار نتایج کرد. نام لیاپانوف بیست‌وهفت ساله به‌خاطر پایان‌نامه‌اش سر زبان‌ها افتاد. بلافاصله پس از دفاع، نقدی در مورد آن در خبرنامه‌ی اخترشناسی[10] منتشر شد، سپس در سال ۱۹۰۴ سالنامه‌ی دانشگاه تولوز[11] ترجمه‌ی کامل آن را به فرانسوی منتشر کرد. در سال ۱۸۸۵، لیاپانوف به رتبه‌ی دانشیاری ارتقا یافت و به ریاست بخش مکانیک دانشگاه خارکف رسید.

پیش از این‌که به دوره‌ی خارکف بپردازیم، که یک دوره‌ی پربار علمی بود، می‌بایستی دو پیوند شخصی او از سن‌پترزبورگ را یادآور شویم. نخستین آن‌ها بوبیلف است، که یکی از معلمان لیاپانوف از ابتدای تحصیل در دانشگاه بود، و تا زمان مرگ با او در ارتباط بود. بوبیلف در همان لحظه‌ی اول به استعداد لیاپانوف پی بُرد و پیوسته از او حمایت می‌کرد. او یکی از داوران مقاله‌ی لیاپانوف بود که در سال ۱۸۸۰ مدال طلا دریافت کرد. نتایج او در قالب دو مقاله‌ی علمی منتشر شد. لیاپانوف در خاطرات خود از معلم سابق خود به خاطر حمایت تقریباً ۴۰ ساله قدردانی نمود و بر اهمیت توجه و مراقبت از او تأکید کرد. بوبیلف اولین متونِ لیاپانوف را که اغلب ساده و مقدماتی بود نگارش می‌کرد. این موضوع باعث رشد استعدادهای او شد.

[8]Kovalevskaya [9]Dimitrii K. Bobilev [10]Bulletin Astronomique [11]Annales de l'Université de Toulouse

دوستی مهم دیگر لیاپانوف که در سن‌پترزبورگ آغاز و برای یک عمر ماندگار شد، دوستی با آندری‌اِی. مارکوف[۱۲] بود. علی‌رغم اینکه مارکوف تنها یک سال از لیاپانوف بزرگتر بود، امّا تأثیر به‌سزایی در رشد فعالیت علمی لیاپانوف داشت. شکی نیست که لیاپانوف بدون این ارتباط نمی‌توانست به آن نتایج مهم در نظریه‌ی احتمالات دست یابد [۵].

لیاپانوف با اشتیاق فراوان در خارکف شروع به‌کار کرد. او بی‌درنگ بازنگری سرفصل‌های دروس مکانیک را هم در دانشگاه و هم در دانشکده‌ی فنی خارکف به عهده گرفت. او کتاب‌های درسی جدیدی نوشت. امروزه نیز می‌توان به کیفیت بالای این سرفصل‌ها اذعان داشت، زیرا در سال ۱۹۸۲ فرهنگستان علوم اوکراین آنها را منتشر کرد [۴]. علاوه‌بر وظایف آموزشی، او سعی کرد زمانی را برای پژوهش‌های علمی نیز بیابد، امّا این امر اساساً دشوارتر از زمان حضور در سن‌پترزبورگ بود. او ظرفیت کاری عظیمی داشت و معمولاً تا ساعت ۴ تا ۵ صبح کار می‌کرد، امّا اغلب اتفاق می‌افتاد که بدون خواب و استراحت به دانشگاه می‌رفت تا تدریس یا سخنرانی کند. شاید این ویژگی منجر به طلوع سریع ستاره‌ی علمی او شد. او دو مقاله‌ی اساسی در نظریه‌ی پایداری منتشر کرد که کار روی آنها را در سن‌پترزبورگ آغاز کرده بود. لیاپانوف در مبحث قضایای حدی مرکزی نتایجی اساسی را در نظریه‌ی احتمالات ثابت کرد. او در سن‌پترزبورگ و در سخنرانی‌های چبیشف به این موضوع علاقه‌مند شد. این نتایج توسط مارکوف به فرهنگستان علوم روسیه ارائه شد. علاوه‌براین، آنچه برای ریاضیدانانی که با دینامیک سروکار دارند، مهمتر است این بود که در سال ۱۸۸۸، او شروع به انتشار نتایج کلی خود در مورد پایداری حرکت دستگاه‌های مکانیکی با درجه‌ی آزادی متناهی کرد. او در سال ۱۸۹۲ اثر ''مسئله‌ی عمومی پایداری حرکات'' را منتشر کرد که در آن نظریه‌ی انتزاعی جدید ریاضی پایداری را پایه‌گذاری کرد (بعداً به این موضوع باز خواهیم گشت). او این اثر را به‌عنوان رساله‌ی دکترا به دانشگاه مسکو بُرد و در سپتامبر ۱۸۹۲ از آن دفاع کرد. یکی از داوران رساله، نیکولای ژوکوفسکی[۱۳] بود. مشابه پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، او ترجمه‌ی کاملی به فرانسوی را در سالنامه‌ی دانشگاه تولوز منتشر کرد. او در سال ۱۸۹۳ به رتبه‌ی استادی در دانشگاه خارکف ارتقا یافت.

لیاپانوف در سن‌پترزبورگ مردی فوق‌العاده محجوب به‌شمار می‌آمد. شیوه‌ی زندگی و رفتار او در خارکف کاملاً متفاوت بود. روزها را معمولاً در اتاق کارش می گذراند و درهای آن همیشه به روی همکاران و شاگردانش باز بود. آنها صحبت‌های غیررسمی پربار، البته عمدتاً در مورد ریاضیات داشتند. بهترین شاگرد او ولادیمیراِی. استکلوف[۱۴] بود که اولین ملاقات خود را با لیاپانوف چنین توصیف می‌کند. برای درک بهتر داستان، لازم است فضای سیاسی دانشگاه‌های روسیه در آن سال‌ها را بشناسیم. در سال ۱۸۶۳، مقررات جدیدی برای آموزش عالی ارائه شد که اساساً حقوق بیشتری را برای دانشجویان نسبت به قبل تضمین می‌کرد. در سال ۱۸۸۴، ایوان دلیانوف[۱۵] به سمت وزیر جدید آموزش و پرورش منصوب شد و شروع به حذف دستاوردهای جدید سال ۱۸۶۳ کرد. به‌عنوان مثال، او می‌خواست زنان را از ورود به دانشگاه منع کند. اکثریت دانشجویان با این اقدامات ارتجاعی مخالف بودند و دست به تظاهرات زدند. هنگامی که خبر استخدام استاد جدید به دانشگاه خارکف رسید این باور وجود داشت که استاد جدید نیز ''مخلوق ارتجاعی دلیانوف'' است. با حضور در سالنی پرظرفیت، لیاپانوف توسط رئیس دانشکده به حضار معرفی شد. حضار امّا به‌جای رویارویی با یک «مخلوق ارتجاعی» با یک جوان خوش‌تیپ و کمی بزرگتر از خود مواجه شدند. وقتی رئیس سالن را ترک کرد، مدرس جدید بلافاصله با صدایی که از هیجان کمی می‌لرزید شروع به صحبت در مورد مکانیک کرد. سپس شگفتی واقعی رخ داد. مکانیک درس مورد علاقه‌ی دانشجویان نبود. مدرس جدید در مورد مفاهیمی صحبت کرد که قبلاً خشک و مرموز به‌نظر می‌رسیدند، امّا به‌گونه‌ای اعجاب‌انگیز تعصب دانشجویان ناگهان از بین رفت و از آن روز لیاپانوف در ارزشیابی دانشجویان جایگاه بالایی داشت. او با اشتیاق، دقت، دانش عمیق و

[12] Andrei A. Markov [13] Nikolai Zhukovskii [14] Vladimir A. Steklov [15] Ivan Delyanov

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2023.136061.1548

با بالابردن سطح یادگیری مخاطبان به احترام زیادی دست یافت. با تلاش وی، دانشجویانی که علاقه‌ی خاصی به مکانیک نداشتند نیز به این موضوعات علاقه‌مند شدند.

لیاپانوف به‌طور مشتاقانه‌ای در دانشگاه خارکف خدمت می‌کرد. یکی از همکارانش این‌گونه توصیف می‌کند: لیاپانوف استادی بود که دانشگاه را زنده کرد و رونق بخشید و آرمان‌های معلم و عالم را مجسم کرد. او مردی پاک‌سرشت بود که دائماً در فضای ناب علم زندگی می‌کرد. فعالیت او در انجمن ریاضی خارکف نیز قابل توجه بود. در دوره‌ی ۱۸۹۹–۱۹۰۲ او رئیس و سردبیر انجمن بود. او تمام دستاوردهای خود را در جلسات انجمن ارائه می‌کرد که در آن شاگردانش، استکلوف و نیکولای اِن. سالتیکوف[۱۶] نیز اغلب سخنرانی داشتند.

لیاپانوف در سال ۱۹۰۰ عضو وابسته، و در سال ۱۹۰۱ عضو پیوسته‌ی فرهنگستان علوم روسیه شد، و درنهایت به ریاست بخش ریاضیات کاربردی سن‌پترزبورگ رسید که پس از مرگ چبیشف از سال ۱۸۹۴ این جایگاه خالی مانده بود. در سال ۱۹۰۲ به سن‌پترزبورگ بازگشت و دوره زندگی خارکف به پایان رسید. او همیشه به نیکی از سال‌هایی که در آنجا گذرانده بود، یاد می‌کرد. به گفته‌ی استکلوف، او این دوران را شادترین دوران زندگی خود می‌دانست.

از سال ۱۹۰۲، لیاپانوف بجز آخرین سال زندگی خود در اودسا را، در سن‌پترزبورگ زندگی کرد. در دوره‌ی دوم زندگی خود در سن‌پترزبورگ، او دیگر تدریس نکرد، تمام وقت خود را به تحقیقات علمی اختصاص داد. او به مسئله‌ای که چبیشف در سال ۱۸۸۲ برای او طرح کرده بود، یعنی مسئله‌ی توسعه‌ی شکل تعادلی سیالات سنگین که با سرعت‌های متغیر می‌چرخند، رجوع کرد. درنهایت، او موفق شد مسئله را به‌طور کامل حل کند. این عزم راسخ و تلاش شبانه‌روزی برای حل مسئله از سوی استکلوف یک شاهکار واقعی خوانده شد. در سن‌پترزبورگ زندگی او تقریباً دور از انتظار بود. او مردی برون‌گرا نبود، از رویدادهای اجتماعی بجز کنسرت‌های برادرش بازدید نمی‌کرد. تنها آرامش او در یافتن فرصتی برای توجه به طبیعت بود. او کاشت و مراقبت از گیاهان و درختان باغ و داخل خانه را بسیار دوست داشت، آپارتمان او با فیکوس‌ها و گیاهان تزئین شده بود.

او مکاتبات بسیاری با چندین ریاضیدان خارج از روسیه ازجمله آنری پوانکاره[۱۷] و امیل پیکارد[۱۸] داشت. در سال ۱۹۰۸، او به چهارمین کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیدانان در رُم دعوت شد و در آنجا با بسیاری از دوستان خود ملاقات کرد. متأسفانه، او هرگز موفق نشد پوانکاره را، که قوی‌ترین ارتباط علمی را با او داشت، رو در رو ملاقات کند.

از سال ۱۹۰۹، او در کار بزرگ فرهنگستان علوم روسیه برای جمع‌آوری و انتشار تمام آثار لئونارد اویلر[۱۹] شرکت کرد و ویراستار جلد هجدهم و نوزدهم بود. او برای خدمات علمی و آموزشی خود چندین تقدیرنامه دریافت کرد. دکترای افتخاری دانشگاه‌های سن‌پترزبورگ، خارکف و کازان را دریافت کرد. عضو خارجی فرهنگستان رُم، عضو وابسته‌ی فرهنگستان پاریس، عضو افتخاری انجمن ریاضی خارکف و عضو چندین انجمن علمی دیگر نیز بود.

در ژوئن ۱۹۱۷، او همراه با همسرش به اودسا، جایی که برادر کوچکترش زندگی می‌کرد، نقل مکان کرد. در سال دوم اقامت خود در خارکف، لیاپانوف با دخترعموی دوم خود، که شاگرد خصوصی پدرش در یاروسلاو بود، ازدواج کرد. در آغاز دهه‌ی ۱۹۰۰، همسرش به سِل ریوی مبتلا شد. پزشکان پیشنهاد تغییر آب‌وهوا را دادند و به‌همین دلیل به اودسا نقل مکان کردند. لیاپانوف دوره‌ی ویژه‌ای را در سال‌های ۱۹۱۸–۱۹۱۹ در دانشگاه اودسا در مورد "اَشکال اجرام سماوی" راه‌اندازی کرد. متأسفانه همسرش در ۳۱ اکتبر ۱۹۱۸ درگذشت. در همان روز لیاپانوف با گلوله‌ی هفت‌تیر به زندگی خود پایان داد. او درخواست کرده بود که با همسرش در همان قبر دفن شود. او در ۳ نوامبر ۱۹۱۸ درگذشت.

لیاپانوف عمدتاً در چهار زمینه‌ی زیر از ریاضیات و مکانیک دستاوردهای مهمی داشته است:

---

[16] Nikolai N. Saltikov [17] Henri Poincaré [18] Émile Picard [19] Leonhard Euler

۱. نظریه‌ی پایداری.
۲. نظریه‌ی پتانسیل.
۳. نظریه‌ی احتمال.
۴. اَشکال اجرام سماوی.

بررسی نظریه‌ی پایداری را می‌توان به دو دوره‌ی کاملاً مجزا تقسیم کرد: دوره‌ی قبل از لیاپانوف و دوره‌ای که با فعالیت لیاپانوف شروع می‌شود. نقطه‌ی عطف، امّا رساله‌ی دکترای لیاپانوف در سال ۱۸۹۲ است که قبلاً به آن اشاره شد. قبل از لیاپانوف، نظریه‌ی پایداری به‌عنوان بخشی از مکانیک به معنای مجموعه‌ای از تحقیقات برای بررسی پایداری خاص دستگاه‌های مکانیکیِ مختلف بود، بدون اینکه تعریف دقیقی از پایداری وجود داشته باشد؛ یعنی، هیچ ''نظریه‌ی'' مشخص پایداری وجود نداشت. نتیجه‌ای از قضیه‌ی مشهور جوزف–لوئی لاگرانژ[۲۰] بود که می‌گفت وضعیت تعادل یک دستگاه مکانیکیِ پایستار، پایدار است هرگاه انرژی پتانسیلِ حداقلی در موقعیت تعادل مربوطه داشته باشد. پیتر گوستاو لژون دیریکله[۲۱] یک اثبات هندسی شگفت‌انگیز و ساده مبتنی بر پایستگی کل انرژی مکانیکی ارائه کرد. کشف لیاپانوف چیزی جز درک این واقعیت نبود که اثبات نه‌تنها برای دستگاه‌های مکانیکی بلکه برای دستگاه‌های دلخواه که توسط معادله‌های دیفرانسیل واپایش می‌شوند (امروزه ما آنها را دستگاه‌های دینامیکی می‌نامیم) کار می‌کند، به‌شرطی که بتوان یک تابع کمکی «انرژی‌مانند» برای دستگاه پیدا کرد. قبل از هر چیز، او پایداری جواب ثابت (موقعیت تعادل) یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل را تعریف و ادعا کرد که این جواب پایدار است هرگاه جواب‌هایی که در یک همسایگی به اندازه‌ی کافی کوچک از موقعیت تعادل آغاز می‌شوند نزدیک به موقعیت تعادل باقی بمانند. به‌عبارت‌دیگر، تا حدودی به‌طور کلی‌تر، اگر مقادیر آغازین یک جواب را به اندازه‌ی کافی تغییر دهیم، جوابی که با شروع از این نقطه حاصل می‌شود (حرکت اختلالی) نزدیک به جواب اصلی (حرکت بدون اختلال) باقی می‌ماند. مسائل پایداری عمدتاً به این دلیل دشوار هستند که جواب‌های معادله‌های دیفرانسیل باید در بازه‌های نامتناهی مقایسه شوند، بنابراین روش‌های عددی را نمی‌توان اعمال کرد.

لیاپانوف دو روش برای بررسی‌های پایداری معرفی کرد. این روش‌ها حتی امروزه روش اول و دوم (یا مستقیم) لیاپانوف نامیده می‌شوند. روش اول از ابزارهای قبلی بررسی‌های پایداری پیروی می‌کند، امّا بر مبنایی کاملاً جدید پایه‌ریزی می‌شود. خواص پایداریِ جواب‌های دستگاه‌های خطی معادله‌های دیفرانسیل با ضرایب ثابت حتی قبل از لیاپانوف به‌خوبی شناخته شده بود. جواب کلی چنین دستگاهی، مجموعی متناهی از توابع نمایی است. بنابراین، هر خاصیت پایداری توسط نماهایی از این توابع تعیین می‌شود. در بررسی دستگاه‌های غیرخطی، اولین جمله از سری تیلور از سمت راست دستگاه که خطی است، انتخاب و جمله‌های باقی‌مانده حذف می‌شوند زیرا در مقایسه با جمله‌ی خطی کوچک هستند. جواب ثابت دستگاه غیرخطی اصلی پایدار گفته می‌شد هرگاه همان جواب ثابت، به‌عنوان جواب دستگاه خطی تقلیل‌یافته، پایدار می‌بود، و در غیر این صورت گفته می‌شد که ناپایدار است. این روش را بررسی پایداری براساس تقریب اول نامیدند. لیاپانوف در پایان‌نامه‌ی خود نشان داد که این روش که برای صدها سال به‌کار گرفته می‌شد ممکن است منجر به نتایج نادرستی در برخی وضعیت‌های بحرانی شود. او نقش توابع نمایی را حتی با معرفی مفهوم عدد مشخصه حفظ کرد، و این نقش را به دستگاه‌های خطی معادله‌های دیفرانسیل با ضرایب متغیر گسترش داد. عدد واقعی μ عدد مشخصه‌ی یک جواب است هرگاه در بین تمام توابع $\{e^{ct}\}_{c\in\mathbb{R}}$ تابع $e^{-\mu t}$ ''نزدیکترین'' به جواب باشد. او نشان داد که جواب‌های یک دستگاه معادله‌های دیفرانسیل خطی دلخواه با ضرایب متغیر تنها می‌توانند تعدای متناهی عدد مشخصه‌ی متفاوت داشته باشند. علاوه‌براین، او ثابت کرد که در برخی شرایط نظم، جواب صفر دستگاه غیرخطی اصلی در صورتی پایدار است که همه‌ی اعداد مشخصه‌ی دستگاه خطی تقلیل‌یافته مثبت باشند، به این

[20]Joseph-Louis Lagrange [21]Peter Gustav Lejeune Dirichlet

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2023.136061.1548

ترتیب جواب صفر ناپایدار است هرگاه دستگاه خطی تقلیل‌یافته حداقل دارای یک عدد مشخصه‌ی منفی باشد. او همچنین با مثال‌هایی نشان داد که اگر صفر یک عدد مشخصه‌ی دستگاه خطی تقلیل‌یافته باشد (وضعیت بحرانی)، می‌توان جمله‌های غیرخطی سمت راست را طوری انتخاب کرد که جواب صفر دستگاه غیرخطیِ کامل پایدار باشد، امّا می‌توان آنها را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که ناپایدار نیز باشند. این بدان معنی است که روش بررسی پایداری براساس تقریب اول می‌تواند نتایج نادرستی در وضعیت‌های بحرانی داشته باشد.

اعداد غیر از اعداد مشخصه، نماهای لیاپانوف نامیده می‌شوند که نقش مهمی در نظریه‌ی ریاضی آشوب دارند. این نظریه به مدل‌های دینامیکی‌ای مربوط می‌شود که دارای حرکات غیرقابل پیش‌بینی‌اند و کاملاً تصادفی به‌نظر می‌رسند، علی‌رغم این واقعیت که مدل‌ها کاملاً تعیینی هستند؛ یعنی همه‌ی قوانین دستگاه‌ها یا پدیده‌های توصیف‌شده معلوم‌اند. دستگاه‌ها دارای مدل‌های ریاضی تعیینی به‌شکل معادله‌های دیفرانسیل دقیقی هستند که حاوی هیچ جزء تصادفی نیست، و هر حرکتی از آن می‌تواند هر چندبار که بخواهید با همان دوره‌ها تکرار شود، مشروط به اینکه دستگاه را دقیقاً از همان وضعیت آغازین شروع کنید، امّا حرکت‌ها قویاً نسبت به تغییرات کوچک مقادیر آغازین حساس هستند. ادوارد لورنز[۲۲] این پدیده را ''اثر پروانه‌ای'' نامید و بیان کرد که اگر در جایی در برزیل پروانه‌ای شروع به بال‌زدن کند، ممکن است منجر به یک سونامی در تگزاس شود. این پدیده توسط نماهای خاص لیاپانوف تعبیر می‌شود. فرض کنید $\Phi(t;\mathbf{u})$ جواب عمومی دستگاه باشد که در شرط آغازین $\Phi(0;\mathbf{u})=\mathbf{u}$ با بردار اولیه‌ی $\mathbf{u}$ صدق می‌کند. اگر دستگاه را از نقطه‌ی آغازین $\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}$ شروع کنیم و اختلاف دو جواب را براساس سری تیلور بسط دهیم، آنگاه تقریب $\Phi(t;\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})-\Phi(t;\mathbf{u})\approx D_{\mathbf{u}}\Phi(t;\mathbf{u})\Delta\mathbf{u}$ را به‌دست می‌آوریم. این اختلاف می‌تواند برای $\Delta\mathbf{u}$ی کوچک، بزرگ باشد هرگاه نُرم ماتریس مشتق $D_{\mathbf{u}}\Phi(t;\mathbf{u})$ بزرگ باشد. به‌هرحال، مشخص است که این ماتریس در دستگاه وردشی معادله‌ها صدق می‌کند که یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر است. اگر این سیستم حداقل یک نمای لیاپانوف مثبت به‌معنای بالا داشته باشد، نُرم ماتریس مشتق ممکن است به‌صورت نمایی در زمان رشد کند، به این معنی که اختلاف دو جواب به‌صورت نمایی در زمان برای $D_{\mathbf{u}}\Phi(t;\mathbf{u})$ی معینی افزایش می‌یابد. اگر فضای فاز کراندار باشد، مطلب بالا از این واقعیت نتیجه می‌شود که جواب بعدیِ قابل پیش‌بینی ندارد زیرا نقطه‌ی فازِ جواب به موقعیت تعادلی یا مدار تناوبی همگرا نمی‌شود، امّا تا پایانِ زمان بین اینها به اصطلاح پرسه می‌زند. این همان آشوب است.

روش دوم یا مستقیم، درواقع توسیع برهان چشم‌نواز دیریکله به دستگاه معادله‌های دیفرانسیل دلخواه است. این روش، روش ''مستقیم'' نامیده می‌شود زیرا کاربرد آن مانند استفاده از قضیه‌ی لاگرانژ–دیریکله مستلزم دانش جواب‌ها نیست، و فقط کافی است انرژی را بشناسیم. به‌عبارت‌دیگر، بدون آگاهی از خود جواب‌ها، می‌توان مستقیماً از معادله‌ها، خواص جواب‌ها را استنتاج کرد. این یک مزیت بسیار مهم روش است زیرا ما جواب‌ها را به‌ندرت می‌شناسیم. معمولاً جواب‌ها نامعلوم‌اند، حتی نمی‌توان آنها را با فرمول بیان کرد. اینها دستگاه‌های انتگرال‌ناپذیر هستند (به‌عنوان مثال، این وضعیت برای دستگاه معادله‌های حرکت سه جسم ثابت شده است). در قضایای لیاپانوف در مورد پایداری، فقط وجود تابع کمکی با مقدار اسکالر V (تابع لیاپانوف) لازم است که در طول جواب‌ها ناافزایشی است. این توضیح می‌دهد که چرا این تابع را ''انرژی‌مانند'' می‌نامند: انرژی مکانیکی یک دستگاه مکانیکی یا ثابت است یا ازهم‌پاشیده می‌شود؛ یعنی، بنابر قضیه‌ی اول روش مستقیم، اگر بتوان چنین تابعی را برای دستگاه پیدا کرد، آنگاه جواب تعادلی دستگاه پایدار است.

لیاپانوف نوع قوی‌تری از برهان را که در عمل مهم است، معرفی کرد. بنابر تجربه، یک دستگاه مکانیکی تحت میرایی ''مجانبی'' به موقعیت تعادلی باز می‌گردد. این بدان معنی است که اگر دستگاه از موقعیتی نزدیک به تعادل با سرعت اولیه‌ی کم شروع شود، آنگاه انحراف از تعادل و سرعت به سمت صفر می‌روند وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند. لیاپانوف این

[22] Edward Lorenzr

ویژگی را پایداری مجانبی نامید. با یادآوری نسخه‌ی مقدماتی تعریف لیاپانوف از پایداری، می‌توان این ویژگی را بیان کرد که اثر آشفتگی‌ها در مقادیر آغازین از بین می‌رود. به‌عنوان مثال، چنین رفتاری را می‌توان در آونگ مشاهده کرد، به‌شرطی که نتوان از دست میرایی رها شد. مانند انرژی مکانیکی، تابع V معین‌مثبت است، بنابراین، به‌جای همگرایی به صفرِ متغیرهای وضعیت، کافی است تضمین کنیم که V در امتداد جواب‌ها به صفر تمایل دارد؛ یعنی، تابع مرکب با تابع خارجی V و با یک حرکت مادامی‌که تابع درونی به صفر تمایل دارد. زیبایی روش در این است که می‌توان مشتق تابع مرکب را محاسبه و نزولی‌بودن آن را بررسی کرد، علاوه‌براین، میزان نزولی‌بودن آن را تعیین کرد حتی اگر خود جواب را ندانیم. این بدان معنی است که مشتق تابع درونی (که حرکت است) را می‌توان با سمت راست معادله‌ای که در دست ما است، جایگزین کرد. با قضیه‌ی دوم روش مستقیم، اگر مشتق V در امتداد جواب‌ها معین‌نامنفی باشد، جواب صفر به‌طور مجانبی پایدار است. از این قضیه می‌توان برای ارائه‌ی شرایط دقیقی استفاده کرد که تحت آن روش قدیمی "بررسی‌های پایداری براساس تقریب اول" کار می‌کند.

از مدت‌ها قبل از لیاپانوف حدس زده می‌شد که عکس قضیه‌ی لاگرانژ–دیریکله نیز برقرار است؛ یعنی، اگر انرژی پتانسیل یک دستگاه مکانیکی پایستار کمینه‌ی اکیدی در موقعیت تعادلی نداشته باشد، آن‌گاه تعادل ناپایدار است. در این میان، برای بررسی این مسئله، لیاپانوف نیز یک قضیه‌ی متضمن ناپایداری برای تعادل را فرمول‌بندی کرد. این سومین قضیه‌ی اساسی روش او است. او با استفاده از این قضیه، عکس قضیه‌ی لاگرانژ–دیریکله را در حالتی که انرژی پتانسیل تحلیلی باشد و فقدان کمینه‌ی اکید را بتوان از جمله‌ی با کمترین درجه در بسط سری انرژی پتانسیل استخراج کرد، ثابت کرد [۳].

روشن است که روش مستقیم "فقط" برنامه‌ای برای بررسی پایداری است. اولین مرحله‌ی برنامه، یافتن تابع لیاپانوف برای دستگاه تحت بررسی است. برنامه نمی‌تواند در مورد چگونگی یافتن چنین تابعی چیزی بگوید. برای دستگاه‌های مکانیکی که نیوتن[۲۳] این تابع را پیدا کرد، آن را انرژی مکانیکی کل نامید (به بیان دقیق‌تر، نیوتن یکی از این تابع‌ها را پیدا کرد، زیرا از آن زمان مشخص شد که برای بررسی مسائل پایداری خاصی در مکانیک، چندین تابع لیاپانوف متفاوت از انرژی می‌توانند مفید باشد، حتی توابعی که تفسیر مکانیکی ندارند). بدون شک، دشوارترین مرحله‌ی روش، یافتن تابع لیاپانوفِ مناسب است. هیچ الگوریتمی برای این کار وجود ندارد. به گفته‌ی یوگنی بارباشین[۲۴]، یافتن یک تابع لیاپانوفِ مناسب آمیخته‌ای از ثروت و هنر است. با وجود این، او یک رساله در مورد چگونگی ساختن این تابع در موارد خاص نوشت [۱].

بیش از صد سال از معرفی روش مستقیم می‌گذرد. با دانستن نتایج این دوره، بی‌تردید می‌توان گفت که روش مستقیم، عمومی‌ترین و مؤثرترین ابزار بررسی پایداری در نظریه‌ی پایداری است و کاربردهای آن ازجمله در علوم فنی، علوم طبیعی، به‌ویژه زیست‌شناسی و اقتصاد غیرقابل‌انکار است.

درادامه، برخی از نتایج به‌دست آمده توسط لیاپانوف را در سه حوزه‌ی دیگر به اختصار مرور می‌کنیم.

لیاپانوف نتایج خود را در نظریه‌ی پتانسیل در مجله‌ی ریاضیات[۲۵] در سال ۱۸۹۸ منتشر کرد. این نتایج مربوط به خواص پتانسیل تک‌لایه‌ها و دولایه‌ها، مسئله‌ی دیریکله و برخی از روابط اساسی نظریه‌ی توابع هارمونیک بود. همان‌طور که مشخص است، کارل گوتفرید نیومن[۲۶] روشی را پیشنهاد کرد که نه‌تنها برای اثبات وجود حل مسئله‌ی دیریکله، بلکه برای حل مسائل مقدار مرزی برای معادله‌ی لاپلاس نیز مناسب بود، امّا همگرایی چند سری نامتناهی در آن روش تنها در مورد رویه‌های[۲۷] محدب ثابت شد. لیاپانوف با فرض اینکه روش نویمان را می‌توان برای رویه‌ای مفروض به‌کار گرفت، روابط اساسی و نظریه‌ی کامل توابع هارمونیک را مستقل از محدب‌بودن یا نبودنِ رویه ارائه کرد.

[23] Newton [24] Yevgenii Barbashin [25] Mathématiques [26] Carl Gottfried Neumann [27] surfaces

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2023.136061.1548

قضایای حدی مرکزی برای توزیع مجموع متغیرهای تصادفی مستقل در نظریه‌ی احتمال بسیار مهم هستند. چبیشف چنین قضیه‌ای را با فرض اینکه همه‌ی متغیرهای تصادفی دارای گشتاورهای متناهی باشند، ثابت کرد. لیاپانوف موفق شد این فرض مهم را در قضیه حذف کند. او ثابت کرد که اگر فقط یک گشتاور از هر متغیر متناهی باشد، این قضیه باز برقرار است. رویکرد لیاپانوف نوآوری دیگری داشت: او از توابع مشخصه برای اثبات استفاده کرد و روشی بسیار کارآمد را با کاربرد گسترده‌ای در نظریه‌ی احتمالات معرفی کرد.

تحقیقات برای تکامل اَشکال اجرام سماوی با اسحاق نیوتن[۲۸] آغاز شد. او در کتاب "اصول[۲۹]" نشان داد که یک جرم همگن سیال که با سرعت کمی تحت تأثیر نیروهای گرانشی و گریز از مرکز می‌چرخد، شکل یک بیضی دورانی فشرده دارد. الکسیس کلود کلراوت[۳۰] در رساله‌ی خود در سال ۱۷۴۳ با توسعه‌ی بیشتر این نظریه، اَشکال تعادلی سیالات با چگالی غیرثابت را که با سرعت کم می‌چرخند، مورد مطالعه قرار داد. او از این فرض اولیه شروع کرد که بخش‌هایی با چگالی ثابت از یک سیال دارای اَشکالی به‌صورت بیضی‌های دورانی هستند. پی‌یر سیمون دو لاپلاس[۳۱]، این شرط را که رویه‌های سطحی بیضی‌های دورانی هستند، بیشتر مدنظر قرار داد. او سیال ناهمگن را به لایه‌های همگن تقسیم کرد و ثابت کرد که در تقریب اول این لایه‌ها بیضی‌های دورانی را تشکیل می‌دهند. تحقیقات لاپلاس از نظر ریاضی پایه و اساس محکمی نداشت. لیاپانوف پایه و اساس دقیق ریاضی نظریه را بنیان نهاد. او شرایطی را در مورد چگالی سیال ارائه کرد که تحت آن می‌توانست وجود اَشکال تعادلی را ثابت کند. در ابتدا، مستقل از رویکرد قابل بحث لاپلاس، او دقیقاً معادله‌های انتگرال غیرخطیِ مدل‌سازی سیال را تحلیل کرد، روشی برای جواب این معادله‌ها ارائه و نتایج را با نظریه‌ی کلراوت مقایسه کرد. در گام دوم که مستلزم استقامت و انضباطی بارز بود، او همگرایی سری‌های نامتناهی را که روش براساس آن پایه‌ریزی شده بود، بررسی کرد. مهم است که تأکید شود که برخلاف محققان قبلی، او تحلیلی‌بودن تابع چگالی سیال را درنظر نگرفت. او فقط فرض کرد که تابع چگالی با رفتن به رویه‌ی مرزی کاهش می‌یابد، و اجازه داد که این تابع تعدادی نامتناهی ناپیوستگی داشته باشد. او می‌توانست معادله‌ی کلراوت را در این شرایط با استفاده از نظریه‌ی انتگرال استیلجیس[۳۲] حل کند. به گفته‌ی خودش، این کار ۱۵ سال از دوره‌ی دوم زندگی او را در سن‌پترزبورگ گرفت.

در سال ۱۹۱۷، زمانی که او و همسرش به اودسا نقل مکان کردند، دانشگاه اودسا از او خواست تا دوره‌ای را در مورد موضوعی که خود او انتخاب می‌کند، ارائه دهد. لیاپانوف یک دوره‌ی آموزشی را با عنوان "اَشکال اجرام سماوی" پیشنهاد کرد که در آن قصد داشت نتایج کار خود در ۱۵ سال گذشته را خلاصه کند. به‌دلیل بیماری همسر، هفت سخنرانی دو ساعته از دوره را ایراد کرد و تنها مرگ غم‌انگیزش او را از انجام وظایف بازداشت و این امر نشان‌دهنده‌ی انسانیت، معلمیِ واقعی و دانش‌پژوهی اوست.

الکساندر میخائیلوویچ لیاپانوف، مرد علمی اَجرام سماوی، و ستاره‌ی ریاضیات روسیه بود که در مدار قوس بزرگی می‌چرخید. تأثیر نتایج او هم در ریاضیات محض و کاربردی و هم در مکانیک غیرقابل ارزش‌گذاری است. میراث او، آثار علمی و معلمیِ مثال‌زدنی او از آن زمان تاکنون همواره مورد احترام و قدردانی همیشگی ریاضیدانان در سراسر جهان بوده است.

مراجع

[1] E. A. Barbashin, *Lyapunov Functions*, Nauka, Moscow, 1970.

[28]Isaac Newton [29]Principia [30]Alexis Claude Clairaut [31]Pierre Simon de Laplace [32]Stieltjes

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2023.136061.1548

[2] L. Hatvani, Alekszandr Ljapunov, aki rendet csinált a stabilitáselméletben (in Hungarian) [Aleksandr Lyapunov, who has put stability theory in order], *Magyar Tudomány*, **180** (2019) 255–265. https://doi.org/10.1556/2065.180.2019.1.10.

[3] A. M. Lyapunov, *Collected works*, (in Russian), Academy of Sciences of Soviet Union, Moscow, 1948.

[4] A. M. Lyapunov, *Lectures in theoretical mechanics*, (in Russian), Naukova Dumka, Kiev, 1982.

[5] Y. Sinai, *Russian mathematicians in the 20th century*, World Scientific, New Jersey, 2003. https://doi.org/10.1142/4499;Zbl1079.01023.

رامین کاظمی
گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین
r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

رامین کاظمی متولد شهریورماه ۱۳۵۷ در شهر دلفان از توابع استان لرستان است. وی در سال ۱۳۷۶ وارد مقطع کارشناسی رشته آمار دانشگاه رازی و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته آمارریاضی در دانشگاه شهید بهشتی شد. در سال ۱۳۸۶ دوره دکتری در گرایش احتمال را در دانشگاه شهید بهشتی و تحت راهنمایی دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل آغاز و در سال ۱۳۹۰ از رساله خود دفاع کرد. حوزه‌ی پژوهشی او، درخت‌های تصادفی، ترکیبیات تحلیلی و تاریخ و فلسفه‌ی ریاضیات است. در حال حاضر، او استاد گروه آمار دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) است.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2023.136061.1548

Aleksandr Lyapunov, the man who created the modern theory of stability

László Hatvani
Translator: Ramin Kazemi

Abstract: The outstanding Russian mathematician Aleksandr M. Lyapunov passed away one hundred years ago, on November 6, 1918. Honouring his memory, we recall the main events of his life when he was a student, then from the years in Saint Petersburg until 1885, from the Kharkov period, finally from his second period in Saint Petersburg from 1902. We recount the main fields of his scientific activity (stability theory, potential theory, probability theory, shape of planets) concerning stability theory and chaos in details.
Keywords: dynamical system, stability, asymptotic stability, Lyapunov exponent, chaos, central limit theorem.

Ramin Kazemi
Department of Statistics, Faculty of Sciences, Imam Khomeini International University, Qazvin.
Email: r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

Communicated by Soghra Nobakhtian.
Article Type: Translation Paper.
Received: 12/12/2022, Accepted: 20/01/2023.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2023.136061.1548