ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۷، شماره ۲ (۱۴۰۱)، صص. ۱۹-۳۶
http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

پیرامون برخی خمینه‌های همدیس اینشتین از بعد چهار

امیر حسام زعیم*، یداله آریانژاد و مختار قیطاسی

چکیده. خانواده مهمی از خمینه‌های شبه ریمانی چهار بعدی یعنی فضاهای متقارن تعمیم یافته را از لحاظ هندسه همدیس مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فضاهای متقان تعمیم یافته به عنوان توسیعی از فضاهای متقارن توسط هندسه‌دانان معرفی شدند و در ابعاد پایین یعنی تا بعد چهار طبقه‌بندی دقیقی از آنها ارائه شد. امروزه مطالعات بسیاری روی این خانواده از خمینه‌های شبه‌ریمانی انجام شده است.

هندسه همدیس با توجه به ارتباطی که با هندسه ذاتی فضا دارد همواره مورد توجه محققان بوده است. لذا ویژگی‌های هندسی بسیاری را می‌توان مطالعه کرد که درکلاس همدیس هندسه ذاتی فضا برقرار می‌شوند. یکی از این خواص که در فیزیک نیز اهمیت دارد خاصیت اینشتین بودن است.

در نتیجه این تحقیق، یک طبقه‌بندی کلی از متریک‌های همدیس اینشتین در فضاهای متقارن تعمیم یافته از بعد چهار ارائه می‌گردد.

۱. مقدمه

اکثر اشیای هندسی که روی یک خمینه قرار دارند مستقیماً با تانسور خمیدگی ریمان مرتبط هستند. به همین دلیل مطالعه خمینه‌ها با ویژگی‌های خاص تانسور خمیدگی توجه ریاضی‌دانان را به خود جلب کرده است. از جهتی می‌توان گفت، فضاهایی که ساده‌ترین شکل تانسور خمیدگی را دارند خمینه‌های همگن هستند. در واقع، به دلیل ساختار ساده تانسور خمیدگی ریمان، هر ویژگی که در یک نقطه از خمینه همگن وجود دارد می‌تواند به راحتی به نقطه دیگر تعمیم یابد. به عبارت دیگر ممکن است یک خمینه همگن مانند یک نقطه مورد مطالعه قرار گیرد و البته، تانسورهای مختلف روی خمینه معنای جبری پیدا خواهند کرد. خمینه‌های همگن بیشتر در هندسه ریمانی مطالعه شده‌اند [۲۳]، اما مطالعات اخیر بیشتر بر روی هندسه‌ی شبه ریمانی متمرکز است. برای نمونه، بررسی خمینه‌های لورنتسی همگن ۳-بعدی در [۳] و حالت ۴-بعدی با علامت متریک لورنتسی یا خنثی در [۴، ۱۵] انجام گرفته است. بسیاری از ویژگی‌های مرتبط به تانسور خمیدگی ریمانی نیز بر روی خمینه‌های همگن شبه‌ریمانی مورد پژوهش قرار گرفته‌اند. مثلا خمینه‌های لورنتسی ۳-بعدی با خمیدگی بازگشتی در [۵، ۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. خمینه‌های همگن ناکاهشی از بعد ۴ در [۶، ۷] و [۱۷] مطالعه شده‌اند. در چندین مرجع مختلف از جمله [۹، ۸]

عبارات و کلمات کلیدی: فضاهای متقارن تعمیم یافته، متر اینشتین، هندسه همدیس.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۷/۱۸
* نویسنده مسئول
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518 .

در مورد گروه‌های نوسانگر ۴–بعدی مطالعاتی صورت گرفته است. یکی از جالب‌ترین دسته‌بندی‌های خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن با چندین ویژگی هندسی فضاهای متقارن تعمیم‌یافته هستند که در [۱۴] دسته‌بندی و مطالعه شده‌اند.

هندسه‌ی همدیس از دیدگاه‌های زیادی دارای اهمیت است. فضاهای (M,g) و $(M,\hat{g})$ به‌صورت همدیس هم‌ارزند، اگر بین آن‌ها یک تبدیل همدیس وجود داشته باشد. به‌عبارت دیگر، تابع هموار موضعی φ (حافظ زاویه) وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $\hat{g}=\varphi^{-2}g$. در این حالت مجموعه‌ای از مترهای $\hat{g}$، کلاس همدیس g را تشکیل می‌دهند. ویژگی‌های مختلف فضا را می‌توان از طریق کلاس همدیس مورد مطالعه قرار داد. برای مثال، یک فضای به صورت همدیس هم‌ارز با یک فضای تخت (اینشتینی و متقارن)، همدیس تخت (همدیس اینشتینی و همدیس متقارن) نامیده می‌شود. در اینجا به این موضوع اشاره می‌کنیم که تانسور همدیس ویل W توسط یک تبدیل همدیس حفظ می‌شود اما التصاق و تانسور خمیدگی ریمانی لزوماً ثابت باقی نمی‌مانند. چون تانسور ریچی به وسیله تبدیل‌های همدیس حفظ نمی‌شود، طبیعی است که حالت همدیس اینشتین را مطالعه کنیم. برینکمن [1] در [۱] این مسئله را بررسی کرد و شرط لازم و کافی برای همدیس اینشتین شدن متریک g را به دست آورد:

$$(n-2)\,\mathrm{Hes}_\varphi+\varphi\varrho=\frac{1}{n}\{(n-2)\Delta\varphi+\varphi\tau\}g, \tag{1}$$

که $\mathrm{Hes}_\varphi=\nabla d\varphi$ هسین φ بوده و ϱ تانسور ریچی و τ خمیدگی اسکالر متریک g است [۱].

تبدیل‌های همدیسی که یک خمینه را به خمینه‌ای اینشتینی می‌نگارد در [۲] بررسی شده‌اند. بر اساس این پژوهش، تبدیل‌های همدیس دو بعدی بدیهی هستند وتبدیل‌های همدیس سه بعدی معادل با ویژگی همدیس تخت هستند. پس بعد چهار کمترین بعدی است که مثال‌هایی نابدیهی را شامل می‌شود. خمینه‌های همدیس اینشتین در میان فضاهای همگن ناکاهشی از بعد چهار در [۱۳] مطالعه شده‌اند. فضاهای همدیس اینشتین با توسیع نیمه‌مستقیم از گروه‌های هایزنبرگ [2] در [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. حالت‌های خاص چهار بعدی که حاصل‌ضرب ابر صفحه‌ها با انحنای اسکالر ناصفر هستند در [۲۰] و [۲۱] بررسی شده‌اند. گُور[3] و نورسکی[4] در [۱۸] شرایطی نابدیهی برای همدیس اینشتین شدن تانسور ویل یک متریک را به‌دست آورده‌اند، اما هنوز مسائل جالبی برای مطالعه این ویژگی در فضاهای مختلف با استفاده از معادلات تانسوری وجود دارد.

ساختار این مقاله به‌این صورت است که در بخش دوم فضاهای متقارن تعمیم‌یافته چهار بعدی را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم به مطالعه تانسور بچ روی فضاهای تحت بررسی می‌پردازیم. سرانجام در بخش چهارم فضاهای متقارن تعمیم‌یافته همدیس اینشتین از بعد چهار را به طور کامل دسته‌بندی می‌کنیم.

۲. پیش‌نیازها و تعاریف ابتدایی

۱.۲. فضای متقارن تعمیم‌یافته‌ی چهار بعدی. فرض کنیم x یک نقطه‌ی دلخواه از یک خمینه شبه‌ریمانی همبند (M,g) باشد. یک تقارن در x به وسیله‌ی یک ایزومتری S_x از M تعریف می‌شود که نقطه تنهای x را ثابت نگه می‌دارد. در یک فضای متقارن (M,g) هر نقطه‌ی x یک تقارن S_x را به وسیله‌ی ژئودزیک‌های برگشتی می‌پذیرد. اگر این ویژگی را تعمیم دهیم، یک S–ساختار منظم را به عنوان یک خانواده‌ی $\{S_x : x\in M\}$ از تقارن‌های (M,g) که به ازای هر x و y در M در روابط $S_x\circ S_y=S_z\circ S_x$ و $z=S_x(y)$ صدق می‌کنند، بیان می‌کنیم.

منظور از مرتبه‌ی یک S–ساختار منظم، کوچک‌ترین عدد صحیح $k\geqslant 2$ است که به ازای هر $x\in M$ داشته باشیم $S_x^k=\mathrm{Id}_M$. اگر چنین عددی موجود نباشد، S–ساختار منظم را از مرتبه‌ی نامتناهی نامند. یک فضای متقارن تعمیم‌یافته

[1] H. Brinkmann [3] A. R. Gover [4] P. Nurowski

یک خمینه شبه ریمانی همبند است که دست کم یک S–ساختار منظم را می‌پذیرد. در بعد ۲ همه‌ی خمینه‌های متقارن تعمیم‌یافته، متقارن هستند. در بعدهای ۳ و ۴ خمینه‌های متقارن تعمیم‌یافته توسط سرنی و کوالسکی در مرجع [۱۴] دسته‌بندی شده‌اند.

قضیه ۱.۲. [۱۴] فرض کنیم (M,g) یک فضای همبند ساده‌ی متقارن تعمیم‌یافته‌ی چهار بعدی باشد. آن‌گاه (M,g) از مرتبه‌ی ۳ و یا نامتناهی است. همه‌ی این فضاها تجزیه‌ناپذیر هستند و با تقریب ایزومتری، به یکی از چهار رده‌ی زیر تعلق دارند:

نوع a : $\frac{G}{H}$ یک فضای همگن است که در آن

$$G=\begin{bmatrix} a & b & u\\ c & d & v\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad H=\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

و $ad-bc=1$، (M,g) فضای $\mathbb{R}^4$ با مختصات (x,y,u,v) است و با متریک شبه ریمانی

$$\begin{aligned}g=&\pm\Big[(-x+\sqrt{1+x^2+y^2})du^2+(x+\sqrt{1+x^2+y^2})dv^2-2y^2dudv\Big]\\ &+\lambda\Big[(1+y^2)dx^2+(1+x^2)dy^2-2xydxdy\Big]/(1+x^2+y^2),\end{aligned}$$

که در آن $\lambda\neq 0$ یک عدد حقیقی ثابت است. مرتبه‌ی این فضا ۳ است و علامت‌های ممکن برای متریک عبارت است از $(4,0)$، $(0,4)$ و $(2,2)$. یک نمونه از تقارن‌های مرتبه‌ی ۳ به مرکز $(0,0,0,0)$ چنین است:

$$\begin{aligned} u' &= -(1/2)u-(\sqrt{3}/2)v, & v' &= -(\sqrt{3}/2)u-(1/2)v,\\ x' &= -(1/2)x+(\sqrt{3}/2)y, & y' &= -(\sqrt{3}/2)x-(1/2).\end{aligned}$$

نوع b : $\frac{G}{H}$ یک فضای همگن است که در آن

$$G=\begin{bmatrix} e^{-(x+y)} & 0 & 0 & a\\ 0 & e^{x} & 0 & b\\ 0 & 0 & e^{y} & c\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad H=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -w\\ 0 & 1 & 0 & -2w\\ 0 & 0 & 1 & 2w\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(M,g) فضای $\mathbb{R}^4$ با مختصات (x,y,u,v) است و با متریک شبه ریمانی

$$g=\lambda\big(dx^2+dy^2+dxdy\big)+e^{-y}\big(2dx+dy\big)dv+e^{-x}\big(dx+2dy\big)du,$$

که در آن λ یک عدد حقیقی ثابت است. مرتبه‌ی این فضا ۳ است و تنها علامت ممکن برای متریک $(2,2)$ است. یک نمونه از تقارن‌های مرتبه‌ی ۳ به مرکز $(0,0,0,0)$ چنین است:

$$u'=-ue^{(y-x)}-v,\quad v'=ue^{-(y+2x)},\quad x'=y,\quad y'=-(x+y).$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

نوع c : فضای همگن به صورت گروه ماتریسی زیر است:

$$G=\begin{bmatrix} e^{-t} & ۰ & ۰ & x\\ ۰ & e^{t} & ۰ & y\\ ۰ & ۰ & ۱ & z\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix},$$

که (M,g) فضای $\mathbb{R}^۴$ با مختصات (x,y,u,v) است و با متریک شبه ریمانی

$$g=\pm\big(e^{۲t}dx^۲+e^{-۲t}dy^۲\big)+dzdt,$$

و علامت‌های ممکن برای متریک $(۱,۳)$ و $(۳,۱)$ هستند. این فضاها به وضوح متقارن هستند [۱۶]. بنابراین چون فضاهای متقارن تعمیم‌یافته مورد بحث ما هستند (نه متقارن) این رده را در بخش‌های بعدی حذف می‌کنیم.

نوع d : $\frac{G}{H}$ یک فضای همگن است که در آن

$$G=\begin{bmatrix} a & b & x\\ c & d & y\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix},\qquad H=\begin{bmatrix} e^{t} & ۰ & ۰\\ ۰ & e^{-t} & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix},$$

با $ad-bc=۱$، (M,g) فضای $\mathbb{R}^۴$ با مختصات (x,y,u,v) است و با متریک شبه ریمانی

$$\begin{aligned} g&=\big(\sinh(۲u)-\cosh(۲u)\sin(۲v)dx^۲+\big(\sinh(۲u)+\cosh(۲u)\sin(۲v)\big)dy^۲\big)\\ &\quad-۲\cosh(۲u)\cos(۲v)dxdy+\lambda\big(du^۲-\cosh^۲(۲u)dv^۲\big),\end{aligned}$$

که $\lambda\neq ۰$ یک عدد حقیقی ثابت است. مرتبه‌ی آن بی‌نهایت بوده و تنها علامت ممکن برای متریک، $(۲,۲)$ است. یک تقارن در نقطه‌ی $(۰,۰,۰,۰)$ توسط خودسانی زیر روی G القا می‌گردد:

$$a'=a,\quad b'=(۱/\alpha^۲)b,\quad c'=a^۲c,\quad d'=d,\quad x'=((۱/\alpha)x,\quad y'=\alpha y,$$

که در آن $\alpha\neq ۰,\pm۱$.

هر فضای شبه ریمانی متقارن تعمیم‌یافته، همگن است. همچنین، یک ساختار از فضای همگن تحویل‌پذیر با متریک پایا را می‌پذیرد [۱۴]. مثال‌های چهار بعدی متناظر با چنین فضاهای همگن $\frac{G}{H}$ در قضیه‌ی ۱.۲ ذکر شده‌اند.

فضاهای متقارن تعمیم‌یافته موضوع چندین مطالعه بوده است. به‌عنوان مثال ساختارهای هندسی و ریچی سالیتون‌ها به ترتیب در مراجع [۱۲] و [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۲.۲. خمینه‌های همدیس اینشتین. مطالعه خمینه‌های همدیس اینشتین در فضاهای شبه ریمانی از موضوعات جالب در فیزیک و ریاضی است. با استفاده از دستگاه مختصات موضعی، معادله‌ی همدیس اینشتین (۱) سیستمی از PDE را ارائه می‌دهد که به طور کلی سخت و غیر قابل کنترل است. این معادله در حالت بعدی بدیهی و در بعد معادل با ویژگی همدیس تخت است. بنابراین اولین مورد برای بررسی، حالت چهار بعدی است. از آنجا که هر خمینه همدیس اینشتینی بش [۵] تخت

[5] Bash

است، بنابراین طبیعی است که اول تانسور بش مطالعه گردد. تانسور همدیس ویل را با W نشان می‌دهیم و در این صورت تانسور بش روی (M^n, g) با رابطه

$$\mathcal{B} = \operatorname{div}_1 \operatorname{div}_4 W + \frac{n-3}{n-2} W[\varrho],$$

به‌دست می‌آید، که در آن $\{e_i\}$ پایه‌ای شبه متعامد است. با $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$، تانسور $W[\varrho]$ ادغام تانسور ریچی از W است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W[\varrho](X, Y) = \textstyle\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j W(e_i, X, Y, e_j) \varrho(e_i, e_j).$$

می‌توان اجزای تانسور بش را با استفاده از تانسور کاتان[6] مشخص نمود. میدان تانسوری $(0, 2)$

$$\mathcal{S} = \varrho - \frac{\tau}{2(n-1)} g, \tag{2}$$

یک تانسور متقارن است که تانسور شاوتن[7] نامیده می‌شود و در آن τ خمیدگی اسکالر است.

شرایط تانسور شاوتن به‌عنوان تانسوری کودازی (به این معنی که مشتق کواریان آن تماماً متقارن است) توسط تانسور کاتان بررسی می‌شود که با مؤلفه‌های زیر تعیین می‌شود:

$$\mathcal{C}_{ijk} = \left(\nabla_i \mathcal{S}\right)_{jk} - \left(\nabla_j \mathcal{S}\right)_{ik}. \tag{3}$$

حال می‌توان تانسور بش را توسط مؤلفه‌های زیر تعیین کرد:

$$\mathcal{B}_{ij} = \frac{1}{n-2} \left\{ \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \left(\nabla_l \mathcal{C}\right)_{kij} + \sum_{k.l=1}^{n} \left(\varrho_{kl} \sum_{s,t=1}^{n} g^{ks} g^{lt} W_{isjt} \right) \right\} \tag{4}$$

که W_{isjt} مؤلفه‌های تانسور همدیس ویل هستند که با رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} W_{ijhk} = R_{ijhk} &- \frac{1}{n-2}\big(g_{ih}\varrho_{jk} - g_{jh}\varrho_{ik} - g_{ik}\varrho_{jh} \\ &+ g_{jk}\varrho_{ih}\big) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\big(g_{ih}g_{jk} - g_{jh}g_{ik}\big). \end{aligned} \tag{5}$$

هر خمینه همدیس اینشتینی بش تخت است و برای خمینه‌های بش تخت از بعد ۴ معادله‌ی همدیس اینشتین چنین است:

$$2 \operatorname{Hes}_\varphi + \varphi\varrho = \frac{1}{4}\{2\Delta_\varphi + \varphi r\} g, \tag{6}$$

که این رابطه همدیس، اینشتین بودن فضا را ایجاب می‌کند.

۳. مطالعه‌ی تانسور بش

برای سادگی در محاسبات تانسور بش روی فضاهای متاقرن تعمیم یافته چهار بعدی از روش‌های جبری کمک می‌گیریم.

[6]Cotton [7]Schouten

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

۱.۳. قضیه اساسی تانسور بش. برای مطالعه تانسور بش روی فضاهای متقارن تعمیم‌یافته چهار بعدی می‌بایست هر رده را جداگانه بررسی کنیم. نتایج در قضیه زیر آمده است:

قضیه ۱.۳. فرض کنیم (M,g) یک خمینه متقارن تعمیم‌یافته‌ی ۴ بعدی باشد. (M,g) بش تخت است اگر و فقط اگر از نوع b قضیه ۱.۲ باشد.

اثبات. اثبات این قضیه مبتنی بر مطالعه حالت به حالت فضاهای متقارن تعمیم‌یافته ۴ بعدی مطابق با دسته‌بندی است که در [۱۴] آمده است.

نوع a – حالت شبه‌ریمانی: فرض کنیم $(M=G/H,g)$ فضای متقارن تعمیم‌یافته ۴ بعدی از نوع a قضیه ۱.۲ و g متریک پایا از علامت $(2,2)$ باشد. نشان می‌دهیم که (M,g) بش تخت نیست.

با توجه به [۱۴]، جبر لی $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ با پایه‌ی $\{u_1,u_2,u_3,u_4,h_1\}$ را در نظر می‌گیریم که $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ و $\{h_1\}$ به‌ترتیب پایه‌هایی برای $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{h}$ هستند به‌طوری‌که (در صورت نیاز با قرینه کردن متریک [۲۲]) براکت لی روی $\mathfrak{g}$ و ضرب اسکالر روی $\mathfrak{m}$ با جدول زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{array}{c|ccccc}
[\,] & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & h_1 \\
\hline
u_1 & 0 & 0 & -\delta u_1 & \delta u_2 & u_2 \\
u_2 & 0 & 0 & \delta u_2 & \delta u_1 & -u_1 \\
u_3 & \delta u_1 & -\delta u_2 & 0 & -2\delta^2 h_1 & -2u_4 \\
u_4 & -\delta u_2 & -\delta u_1 & 2\delta^2 h_1 & 0 & 2u_3 \\
h_1 & -u_2 & u_1 & 2u_4 & -2u_3 & 0
\end{array}, \tag{7}$$

که در آن $\delta>0$ یک عدد ثابت حقیقی است و

$$g=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

با جایگذاری $\Lambda[i]=\Lambda_{u_i}$ و با یک محاسبه‌ی مستقیم می‌توانیم التصاق لوی–چویتا را به شرح زیر به دست آوریم:

$$\Lambda[1]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ -\frac{\delta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda[2]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$\Lambda[3]=\Lambda[4]=0$. با استفاده از معادله‌ی

$$R_{ij}:=R(u_i,u_j)=[\Lambda_{u_i},\Lambda u_j]-\Lambda_{[u_i,u_j]},$$

می‌توانیم مؤلفه‌های ناصفر تانسور خمیدگی را به شکل زیر محاسبه کنیم:

$$R_{12}=\begin{bmatrix}0&-\delta^2&0&0\\ \delta^2&0&0&0\\ 0&0&0&-\delta^2\\ 0&0&\delta^2&0\end{bmatrix},\qquad R_{13}=\begin{bmatrix}0&0&-\delta^2&0\\ 0&0&0&\delta^2\\ -\frac{\delta^2}{2}&0&0&0\\ 0&\frac{\delta^2}{2}&0&0\end{bmatrix},$$

$$R_{14}=R_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0&-\delta^2\\ 0&0&-\delta^2&0\\ 0&-\frac{\delta^2}{2}&0&0\\ -\frac{\delta^2}{2}&0&0&0\end{bmatrix},\qquad R_{24}=\begin{bmatrix}0&0&\delta^2&0\\ 0&0&0&-\delta^2\\ \frac{\delta^2}{2}&0&0&0\\ 0&-\frac{\delta^2}{2}&0&0\end{bmatrix},$$

$$R_{34}=\begin{bmatrix}0&2\delta^2&0&0\\ -\delta^2&0&0&0\\ 0&0&0&-4\delta^2\\ 0&0&4\delta^2&0\end{bmatrix}.$$

با ادغام بر روی مؤلفه‌های اول و سوم تانسور خمیدگی، تانسور ریچی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$(\varrho_{ij})=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&-6\delta^2&0\\ 0&0&0&-6\delta^2\end{bmatrix}. \tag{10}$$

بنابراین (M,g) در این‌حالت اینشتینی نیست. با استفاده از (۲)، تانسور شاوتن برابر تانسور ریچی است. عناصر ناصفر تانسور کاتان (با تقریب تقارنی) عبارت‌اند از:

$$\mathcal{C}_{131}=-3\delta^2,\qquad \mathcal{C}_{142}=3\delta^3,\qquad \mathcal{C}_{232}=3\delta^2,\qquad \mathcal{C}_{241}=3\delta^3. \tag{11}$$

و مؤلفه‌های ناصفر تانسور ویل به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$W_{1234}=2\delta^2,\qquad W_{1324}=\delta^2,\qquad W_{1423}=-\delta^2. \tag{12}$$

با استفاده از (۴)، تانسور بش به فرم زیر است:

$$\mathcal{B}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\delta^4&0&0&0\\ 0&-\frac{3}{2}\delta^4&0&0\\ 0&0&-3\delta^4&0\\ 0&0&0&-3\delta^4\end{bmatrix}. \tag{13}$$

بنابراین (M,g) بش تخت است اگر $\delta=0$، که این ناممکن است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

نوع a – حالت ریمانی : فرض کنیم $(M = G/H, g)$ فضای متقارن تعمیم‌یافته چهار بعدی از نوع a قضیه ۱.۲ باشد که متریک پایا g با علامت $(۴,۰)$ و یا $(۰,۴)$ است.

با توجه به [۱۴]، جبر لی $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ با پایه‌ی $\{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴, h_۱\}$ را در نظر می‌گیریم که $\{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴\}$ و $\{h_۱\}$ به ترتیب پایه برای $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{h}$ هستند. براکت لی روی $\mathfrak{g}$ و ضرب داخلی روی $\mathfrak{m}$ به شکل زیر تعیین می‌شوند:

$$\begin{array}{c|ccccc} [\ ] & u_۱ & u_۲ & u_۳ & u_۴ & h_۱ \\ \hline u_۱ & ۰ & ۰ & -u_۱ & u_۲ & u_۲ \\ u_۲ & ۰ & ۰ & u_۲ & u_۱ & -u_۱ \\ u_۳ & u_۱ & -u_۲ & ۰ & -۲h_۱ & -۲u_۴ \\ u_۴ & -u_۲ & -u_۱ & ۲h_۱ & ۰ & ۲u_۳ \\ h_۱ & -u_۲ & u_۱ & ۲u_۴ & -۲u_۳ & ۰ \end{array} \tag{۱۴}$$

و

$$g = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۲}{\rho} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۲}{\rho} \end{bmatrix}, \tag{۱۵}$$

که $\rho \neq ۰$ عددی حقیقی و ثابت است. با یک محاسبه‌ی مستقیم می‌توانیم التصاق لوی–چویتا را به شرح زیر توصیف کنیم:

$$\Lambda[۱] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ \frac{۱}{۲}\rho & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲}\rho & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \Lambda[۲] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲}\rho & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۲}\rho & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \tag{۱۶}$$

و $\Lambda[۳] = \Lambda[۴] = ۰$. مؤلفه‌های تانسور خمیدگی به‌صورت زیر است:

$$R_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰ & \rho & ۰ & ۰ \\ -\rho & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \rho \\ ۰ & ۰ & -\rho & ۰ \end{bmatrix}, \qquad R_{۱۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ \frac{\rho}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{\rho}{۲} & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$R_{۱۴} = R_{۲۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & \frac{\rho}{۲} & ۰ & ۰ \\ \frac{\rho}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad R_{۲۴} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ -\frac{\rho}{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{\rho}{۲} & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$R_{۳۴}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}.$$

تانسور ریچی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(\varrho_{ij})=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۶ \end{bmatrix}, \tag{۱۷}$$

پس (M,g) اینشتینی نیست. با استفاده از (۲)، تانسور شاوتن برابر تانسور ریچی است. عناصر ناصفر تانسور کاتان (با تقریب تقارنی) عبارت‌اند از:

$$\mathcal{C}_{۱۳۱}=۳\rho,\qquad \mathcal{C}_{۱۴۲}=-۳\rho,\qquad \mathcal{C}_{۲۳۲}=-۳\rho,\qquad \mathcal{C}_{۲۴۱}=-۳\rho,$$

و اجزای ناصفر تانسور ویل (با تقریب تقارنی) به فرم زیر هستند:

$$W_{۱۲۳۴}=۲,\qquad W_{۱۳۲۴}=۱,\qquad W_{۱۴۲۳}=-۱. \tag{۱۸}$$

با استفاده از (۴) تانسور بش به فرم زیر به‌دست می‌آید:

$$(\mathcal{B}_{ij})=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲}\rho^{۲} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۳}{۲}\rho^{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳\rho & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳\rho \end{bmatrix}. \tag{۱۹}$$

بنابراین (M,g) بش تخت است اگر و فقط اگر $\rho=۰$، که این ناممکن است.

نوع b : فرض کنیم $(M=G/H,g)$ یک فضای متقارن تعمیم‌یافته‌ی چهار بعدی از نوع b قضیه ۱.۲ باشد. $(M=G/H,g)$ و جبرلی $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ توسط پایه‌ی $\{u_۱,u_۲,u_۳,u_۴,h_۱\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $\{u_۱,u_۲,u_۳,u_۴\}$ و $\{h_۱\}$ به‌ترتیب پایه برای $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{h}$ هستند به‌طوری‌که براکت لی روی $\mathfrak{g}$ و ضرب داخلی روی $\mathfrak{m}$ با جدول‌های زیر به‌دست می‌آیند:

(۲۰)

$[\,]$	$u_۱$	$u_۲$	$u_۳$	$u_۴$	$h_۱$
$u_۱$	۰	۰	$-u_۱$	$\varepsilon h_۱+u_۲$	۰
$u_۲$	۰	۰	$-\varepsilon h_۱ u_۲$	$u_۱$	۰
$u_۳$	$u_۱$	$\varepsilon h_۱-u_۲$	۰	۰	$۲u_۲$
$u_۴$	$-\varepsilon h_۱-u_۲$	$-u_۱$	۰	۰	$-۲u_۱$
$h_۱$	۰	۰	$-۲u_۲$	$۲u_۱$	۰

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

که $\varepsilon = \pm 1$ و

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}, \tag{21}$$

و λ یک عدد حقیقی ثابت است [۱۴].

با توجه به پایه $\{u_i\}$ و با محاسبه سر راست، $\Lambda[1] = \Lambda[2] = 0$ و

$$\Lambda[3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2\lambda \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda[4] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2\lambda \\ -1 & 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

سپس مؤلفه‌های ناصفر تانسور خمیدگی به دست می‌آیند:

$$R_{14} = -R_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_{34} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

و تانسور ریچی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$(\varrho_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

در نتیجه (M, g) هرگز اینشتینی نیست. با توجه به (۲)، تانسور شاوتن و تانسور ریچی برابر می‌شوند. مؤلفه‌های ناصفر تانسور ویل (با تقریب تقارن) به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$W_{3434} = 4\lambda.$$

همچنین از رابطه (۳) نتیجه می‌شود تانسور کاتان صفر است. سپس با استفاده از (۴)، تانسور بش هم صفر می‌شود. بنابراین (M, g) در این‌حالت همیشه بش تخت است.

نوع d : فرض کنیم $(M = G/H, g)$ فضای متقارن تعمیم‌یافته از نوع d قضیه ۱.۲ باشد. بر اساس دسته‌بندی که در [۱۴] انجام شده است، جبر لی $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ از گروه لی G توسط پایه‌ی $\{u_1, u_2, u_3, u_4, h_1\}$ را در نظر می‌گیریم که

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

$\{u_۱, u_۲, u_۳, u_۴\}$ و $\{h_۱\}$ به ترتیب پایه‌هایی برای $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{h}$ هستند به طوری که:

$$\begin{array}{c|ccccc}
[\,] & u_۱ & u_۲ & u_۳ & u_۴ & h_۱ \\
\hline
u_۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -u_۲ & u_۱ \\
u_۲ & ۰ & ۰ & -u_۱ & ۰ & -u_۲ \\
u_۳ & ۰ & u_۱ & ۰ & -h_۱ & ۲u_۳ \\
u_۴ & u_۲ & ۰ & h_۱ & ۰ & -۲u_۴ \\
h_۱ & -u_۱ & u_۲ & -۲u_۳ & ۲u_۴ & ۰
\end{array}. \tag{۲۴}$$

متریک پایا به فرم زیر است:

$$g = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \lambda \\ ۰ & ۰ & \lambda & ۰ \end{bmatrix}, \tag{۲۵}$$

که $\lambda \neq ۰$ عدد حقیقی ثابت است. با توجه به $\{u_i\}$ داریم:

$$\Lambda[۱] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{\lambda} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad \Lambda[۲] = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{\lambda} & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \tag{۲۶}$$

و $\Lambda[۳] = \Lambda[۴] = ۰$. مؤلفه‌های ناصفر تانسور خمیدگی به شکل زیر خواهند بود:

$$R_{۱۲} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\lambda} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{\lambda} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{\lambda} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{\lambda} \end{bmatrix}, \qquad R_{۱۴} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{\lambda} & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$R_{۲۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{\lambda} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad R_{۳۴} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix},$$

و تانسور ریچی برابر است با:

$$(\varrho_{ij}) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۰ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}. \tag{۲۷}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

بنابراین (M,g) تحت هیچ شرایطی اینشتینی نیست. با توجه به (۲)، تانسور شاوتن و تانسور ریچی برابر می‌شوند. مؤلفه‌های ناصفر تانسور کاتان (با تقریب تقارنی) به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\mathcal{C}_{141} = \mathcal{C}_{232} = \frac{3}{\lambda},$$

مؤلفه‌های ناصفر تانسور ویل به فرم زیر خواهند بود:

$$W_{1234} = 1, \qquad W_{1324} = \frac{1}{2}, \qquad W_{1423} = -\frac{1}{2}.$$

با استفاده از (۳۰) تانسور بش به صورت زیر است:

$$(\mathcal{B}_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2\lambda^2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2\lambda^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\lambda} & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

چون $\mathcal{B}$ نمی‌تواند صفر باشد، پس (M,g) هرگز بش تخت نخواهد بود. □

۴. فضاهای متقارن تعمیم‌یافته‌ی همدیس اینشتینی

فرض کنیم φ یک جواب معادله‌ی همدیس اینشتین (۶) باشد. در این‌صورت $\sigma = -2\ln(\varphi)$ یک تابع است که در میدان تانسور $(0,3)$:

$$\mathfrak{C} := \mathcal{C} + W(,,,\nabla\sigma),$$

صفر می‌شود. با توجه به [۱۹، قضیه‌ی ۴.۱] شرایط $\mathfrak{C} = 0$ و $\mathcal{B} = 0$، شرایط لازم برای حل معادله (۶) هستند. اگر (M,g) عمومی ضعیف باشد، این شرایط برای همدیس اینشتین شدن کافی نیز هستند.

همان‌طوری که در بخش قبلی دیدیم حالت b قضیه‌ی ۱.۳ تنها مورد بش تخت بود. بنابراین تنها حالت نابدیهی که از فضاهای متقارن تعمیم‌یافته چهار بعدی برای حل معادله همدیس اینشتین باقی می‌ماند، حالت b است.

۱.۴. قضیه اصلی همدیس اینشتین. حال به ارائه قضیه اساسی در مطالعه خمینه‌های متقارن تعمیم‌یافته چهار بعدی همدیس اینشتین می‌پردازیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم (M,g) یک خمینه متقارن تعمیم‌یافته‌ی چهار بعدی باشد. در این‌صورت (M,g) به صورت نابدیهی همدیس اینشتین است اگر و فقط اگر از نوع $\mathfrak{b}$ باشد. در مختصات موضعی (x,y,u,v) تابع ضربی φ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\varphi(x,y) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-(x+y)} + c_3 e^{y},$$

که در آن c_1، c_2 و c_3 اعداد حقیقی دلخواه هستند.

اثبات. با توجه به مباحث فصل قبل، تنها حالت نابدیهی که از فضاهای متقارن تعمیم‌یافته چهار بعدی برای حل معادله همدیس اینشتین باقی می‌ماند، حالت b است.

$$g = \lambda\left(dx^2 + dy^2 + dxdy\right) + e^{-y}\left(2dx + dy\right)dv + e^{-x}\left(dx + 2dy\right)du,$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

که در آن λ عدد ثابت حقیقی دلخواه است، رتبه‌ی $k = ۳$ و علامت متر آن $(۲,۲)$ است. عناصر ناصفر از التصاق لوی–چویتا عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_x}\partial_x &= \frac{۱}{۳}\partial_x - \frac{۲}{۳}\partial_y + \frac{۲}{۳}\lambda e^x\partial_u + \frac{۱}{۳}\lambda e^y\partial_v,\\
\nabla_{\partial_x}\partial_y &= -\frac{۱}{۳}\partial_x - \frac{۱}{۳}\partial_y + \frac{۱}{۳}\lambda e^x\partial_u + \frac{۱}{۳}\lambda e^y\partial_v,\\
\nabla_{\partial_x}\partial_u &= -\frac{۲}{۳}\partial_u + \frac{۱}{۳}e^{y-x}\partial_v,\\
\nabla_{\partial_x}\partial_v &= \frac{۲}{۳}e^{x-y}\partial_u - \frac{۱}{۳}\partial_v,\\
\nabla_{\partial_y}\partial_y &= -\frac{۲}{۳}\partial_x + \frac{۱}{۳}\partial_y - \frac{۱}{۳}\lambda e^x\partial_u + \frac{۲}{۳}\lambda e^y\partial_v,\\
\nabla_{\partial_y}\partial_u &= -\frac{۱}{۳}\partial_u + \frac{۲}{۳}e^{y-x}\partial_v,\\
\nabla_{\partial_y}\partial_v &= \frac{۱}{۳}e^{x-y}\partial_u - \frac{۲}{۳}\partial_v,
\end{aligned} \tag{۲۹}$$

که $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$، $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$، $\partial_u := \frac{\partial}{\partial u}$ و $\partial_v := \frac{\partial}{\partial v}$ میدان‌های برداری مختصاتی هستند.

تانسور خمیدگی به‌طور کامل توسط مؤلفه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
R(\partial_x,\partial_y) &= -\frac{۱}{۳}\partial_x\otimes dx - \frac{۲}{۳}\partial_x\otimes dy + \frac{۲}{۳}\partial_y\otimes dx + \frac{۱}{۳}\partial_y\otimes dy + \frac{۱}{۳}\partial_u\otimes du\\
&\quad + \frac{۲}{۳}e^{x-y}\partial_u\otimes dv - \frac{۲}{۳}e^{y-x}\partial_v\otimes du - \frac{۱}{۳}\partial_v\otimes dv,\\
R(\partial_x,\partial_u) &= \frac{۲}{۳}\partial_u\otimes dx + \frac{۱}{۳}\partial_u\otimes dy - \frac{۱}{۳}e^{y-x}\partial_v\otimes dx - \frac{۲}{۳}e^{y-x}\partial_v\otimes dy,\\
R(\partial_y,\partial_u) &= -\frac{۲}{۳}e^{x-y}\partial_u\otimes dx - \frac{۱}{۳}e^{x-y}\partial_u\otimes dy + \frac{۱}{۳}\partial_v\otimes dx + \frac{۲}{۳}\partial_v\otimes dy,
\end{aligned}$$

و تانسور ریچی عبارت است از:

$$\varrho = -\frac{۴}{۳}dx\otimes dx - \frac{۲}{۳}\big(dx\otimes dy + dy\otimes dx\big) - \frac{۴}{۳}dy\otimes dy.$$

از (۳) نتیجه می‌شود که تانسور کاتان صفر است و تانسور ویل به شکل زیر خواهد بود:

$$W = \frac{\lambda}{۲}\big(dx\otimes dy\otimes dx\otimes dy - dx\otimes dy\otimes dy\otimes dx - dy\otimes dx\otimes dx\otimes dy + dy\otimes dx\otimes dy\otimes dx\big),$$

با توجه به رابطه بالا می‌توان نشان داد که (M,g) عمومی ضعیف نیست. به این معنی که تانسور ویل W توسط نگاشتی یک‌به‌یک از TM به $\otimes^۳TM$ تعریف نمی‌شود. در این‌حالت $\lambda = ۰$ حالت همدیس تخت را نتیجه می‌دهد. بنابراین روی $\lambda \neq ۰$ تمرکز می‌کنیم.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

فرض کنیم $\varphi(x,y,u,v)$ تابع دلخواهی روی M باشد و $\sigma = -۲\ln(\varphi)$. با انجام محاسبات ساده‌ای گرادیان σ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\nabla\sigma = \frac{۴}{۳\varphi}\Big\{ & -\big(۲e^{y}\partial_v\varphi - e^{x}\partial_u\varphi\big)\partial_۱ \\ & + \big(e^{y}\partial_v\varphi - ۲e^{x}\partial_u\varphi\big)\partial_۲ \\ & - \big(\lambda e^{x+y}\partial_v\varphi - ۲\lambda e^{۲x}\partial_u\varphi + ۲e^{x}\partial_y\varphi - e^{x}\partial_x\varphi\big)\partial_۳ \\ & + \big(۲\lambda e^{۲y}\partial_v\varphi - \lambda e^{x+y}\partial_u\varphi + e^{y}\partial_y\varphi - ۲e^{y}\partial_x\varphi\big)\partial_۴\Big\},\end{aligned} \tag{۳۰}$$

بنابراین تنها عناصر ناصفر تانسور $\mathfrak{C}$ به فرم زیر هستند:

$$\begin{cases}\frac{۳}{۴}\varphi\mathfrak{C}_{۱۲۱} = \lambda(۲e^{x}\partial_u\varphi - e^{y}\partial_v\varphi),\\ \frac{۳}{۴}\varphi\mathfrak{C}_{۱۲۲} = \lambda(e^{x}\partial_u\varphi - ۲e^{y}\partial_v\varphi).\end{cases}$$

واضح است که به ازای هر $i,j,k \in \{۱,\dots,۴\}$، $\mathfrak{C}_{ijk} = -\mathfrak{C}_{jik}$. از آنجا که میدان تانسوری $\mathfrak{C}$ از یک خمینه اینشتینی صفر می‌شود، داریم:

$$\begin{cases}\frac{۳}{۴}\varphi(\mathfrak{C}_{۱۲۱} - ۲\mathfrak{C}_{۱۲۲}) = ۳\lambda e^{y}\partial_v\varphi = ۰,\\ \frac{۳}{۴}\varphi(\mathfrak{C}_{۱۲۱} - \mathfrak{C}_{۱۲۲}) = ۳\lambda e^{x}\partial_u\varphi = ۰.\end{cases} \tag{۳۱}$$

و چون $\lambda \neq ۰$، تابع φ بستگی به متغیرهای u و v ندارد. پس معادله اینشتین (۶) را برای توابع هموار $\varphi(x,y)$ بررسی می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\psi := ۲\,\mathrm{Hes}_\varphi + \varphi\varrho - \frac{۱}{۴}\{۲\Delta\varphi + \varphi\tau\}g.$$

به ازای هر $i,j \in \{۱,\dots,۴\}$ داریم $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$. با محاسبات استاندارد، مؤلفه‌های میدان تانسور ψ به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}\psi_{۱۱} &= -\frac{۴}{۳}\varphi + \frac{۴}{۳}\partial_y\varphi - \frac{۲}{۳}\partial_x\varphi + ۲\partial^۲_{xx}\varphi,\\ \psi_{۱۲} &= -\frac{۲}{۳}\varphi + \frac{۲}{۳}\partial_y\varphi + \frac{۲}{۳}\partial_x\varphi + ۲\partial^۲_{xy}\varphi,\\ \psi_{۲۲} &= -\frac{۴}{۳}\varphi - \frac{۲}{۳}\partial_y\varphi + \frac{۴}{۳}\partial_x\varphi + ۲\partial^۲_{yy}\varphi.\end{aligned} \tag{۳۲}$$

با قرار دادن $\psi = ۰$ و با حل دستگاه PDE به دست آمده، به ازای اعداد حقیقی دلخواه و ثابت $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$، جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\varphi(x,y) = c_۱e^{x} + c_۲e^{-(x+y)} + c_۳e^{y},$$

که این حکم را تمام می‌کند. $\square$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی فضاهای متقارن تعمیم یافته از بعد چهار پرداختیم. این فضاها که تعمیمی استاندارد از فضاهای متقارن هستند در مرجع [۱۴] طبقه‌بندی شده‌اند. بر این اساس، نخست حالتهای بش تخت را تعیین کردیم که فقط کلاس b را شامل می‌شوند. سپس به حل معادله همدیس اینشتین روی کلاس b پرداختیم و قضیه اساسی در مورد خمینه‌های متقارن تعمیم یافته چهار بعدی همدیس اینشتین را بیان کردیم و تابع φ که به ازای آن $\hat{g} = \varphi^{-2} g$ متریک اینشتینی است را تعیین کردیم.

مراجع

[1] H. W. Brinkmann, Riemann spaces conformal to Einstein spaces, *Math. Ann.*, **91** (1924) 269–278.

[2] H. W. Brinkmann, Einstein spaces which are mapped conformally on each other, *Math. Ann.*, **94** (1925) 119–145.

[3] G. Calvaruso, Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.*, **57** (2007) 1279–1291.

[4] G. Calvaruso and A. Zaeim, Four-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds, *Monatsh Math.*, **174** (2014) 377–402.

[5] G. Calvaruso and A. Zaeim, Symmetries of Lorentzian three-manifolds with recurrent curvature, *SIGMA*, **12** (2016) 63–75.

[6] G. Calvaruso and A. Zaeim, A complete classification of Ricci and Yamabe solitons of non-reductive homogeneous 4-spaces, *J. Geom. Phys.*, **80** (2014) 15–25.

[7] G. Calvaruso and A. Zaeim, Geometric structures over non-reductive homogeneous 4-spaces, *Adv. Geom.*, **14** (2014) 191–214.

[8] G. Calvaruso and A. Zaeim, On the symmetries of the Lorentzian oscillator group, *Collect. Math.*, **68** (2017) 51–67.

[9] G. Calvaruso, Oscillator spacetimes are Ricci solitons, *Nonlinear Anal.*, **140**(2016) 254–269.

[10] G. Calvaruso and A. Zaeim, Conformal geometry of semi-direct extensions of the Heisenberg group, *Jour. Math. Phys. Anal. Geom.*, **14** (2021) 407–421.

[11] G. Calvaruso and A. Zaeim, Geometric structures over four-dimensionl generelized symmetric spacse, *Mediterr. J. Math.*, **10** (2013) 971–987.

[12] G. Calvaruso and E. Rosado, Ricci solitons on low-dimensional generalized symmetric spaces, *J. Geom. Phys.*, **112** (2017) 106–117.

[13] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, I. Gutiérrez-Rodríguez and R. Vázquez-Lorenzo, Conformal geometry of non-reductive four-dimensional homogeneous spaces, *Math. Nachr.*, **290** (2017) 1470–1490.

[14] J. Cerny and O. Kowalski, Classification of generalized symmetric pseudo-Riemannian spaces of dimension $n \leq 4$, *Tensor (N.S.)*, **38** (1982) 256–267.

[15] M. Chaichi and A. Zaeim, Locally Homogeneous Four-Dimensional Manifolds of Signature $(2,2)$, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **16** (2013) 345–361.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

[16] B. De Leo and J. Van der Veken, Totally geodesic hypersurfaces of fourdimensional generalized symmetric spaces, *Geom. Dedicata*, **159** (2012) 373–387.

[17] E. Garcia-Rio, P. B. Gilkey and S. Nikcevic, Homogeneity of Lorentzian three-manifolds with recurrent curvature, *Math. Nachr.*, **287** (2014) 32–47.

[18] R. Gover and P. Nurowski, Obstructions to conformally Einstein metrics in n dimensions, *J. Geom. Phys.*, **56** (2006) 450–484.

[19] C. N. Kozameh, E. T. Newman and K. P. Tod, Conformal Einstein spaces, *Gen. Rel. Grav.*, **17** (1985) 343–352.

[20] W. Kuhnel and H. B. Rademacher, Conformal transformations of pseudo-Riemannian manifolds, *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zurich, (2008) 261–298.

[21] W. Kuhnel and H. B. Rademacher, Conformally Einstein spaces revisited, *Pure and Appl. Differential Geom. PADGE 2012* - In Memory of Franki Dillen, (2013) 161–167.

[22] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, **103**, Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York 1983.

[23] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, in: London Math. Soc. Lect. Notes, **83**, Cambridge Univ. Press, 1983.

امیر حسام زعیم
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
zaeim@pnu.ac.ir

امیرحسام زعیم در مرداد ماه ۱۳۶۱ در شهر اهواز متولد شد. وی تحصیلات دانشگاهی خود را در سال ۷۹ از دانشگاه شیراز آغاز کرد و پس از آن در دانشگاه صنعتی امیرکبیر و مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور ادامه داد. ایشان در سال ۱۳۹۱ به دریافت درجه دکتری نائل شد و به‌عنوان استادیار در دانشگاه پیام نور شروع به کار نمود. همچنین در سال ۱۳۹۸ به مرتبه دانشیاری ارتقا یافت. زمینه تحقیقاتی ایشان هندسه دیفرانسیل با رویکرد هندسه شبه ریمانی است.

یداله آریانژاد
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
y.aryanejad@pnu.ac.ir

یداله آریانژاد در مهر ماه سال ۱۳۵۸ در شهر سنندج متولد شد. وی تحصیلات دانشگاهی خود را در سال ۷۷ از دانشگاه کردستان شروع کرد و پس‌از آن در دانشگاه صنعتی امیرکبیر و مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور به تحصیل ادامه داد. ایشان در سال ۱۳۹۴ موفق به اخذ مدرک دکتری شد و به‌عنوان استادیار در دانشگاه پیام‌نور شروع به کار نمود. زمینه تحقیقاتی ایشان هندسه دیفرانسیل می‌باشد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

مختار قیطاسی
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
mghmgh2023@gmail.com

مختار قیطاسی در سال ۱۳۵۷ در شهر ایلام متولد شد. وی مدرک کارشناسی ریاضی محض خود را درسال ۱۳۷۹ از دانشگاه لرستان و کارشناسی ارشد آنالیز ریاضی را در سال ۱۳۸۴ از دانشگاه پیام نور مشهد دریافت کرد. ایشان هم اکنون دانشجوی دکتری در گرایش هندسه در مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور تهران است. همچنین در حال حاضر به دبیری آموزش و پرورش با سابقه ۲۶ سال خدمت در شهر ایلام اشتغال دارد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518

On Some Conformally Einstein Manifolds Of Dimension Four

Amirhesam Zaeim*, Yadollah AryaNejad and Mokhtar Gheitasi

Abstract: We study an important family of four-dimensional pseudo-Riemannian manifolds, i.e. generalized symmetric spaces, in terms of conformal geometry. Generalized symmetric spaces were introduced by geometers as an extension of symmetric spaces, and a detailed classification of them was presented in low dimensions, i.e. up to four dimensions. Today, many studies have been done on this family of (pseudo)-Riemannian manifolds.

Due to its relationship with the inherent geometry of space, conformal geometry has always been in focus of researchers. Therefore, many geometric features can be studied, which are established in the conformal class of space. One of these properties that is also important in physics is the property of being Einstein.

As a result of this study, a general classification of conformally Einstein metrics in generalized symmetric spaces of dimension four is presented.

Keywords: generalized symmetric spaces, Einstein metric, conformal geometry.

Amirhesam Zaeim
Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P. O. Box 19395-4697, Tehran, Iran.
Email: zaeim@pnu.ac.ir

Yadollah Arya Nejad
Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P. O. Box 19395-4697, Tehran, Iran.
Email: y.aryanejad@pnu.ac.ir

Mokhtar Gheitasi
Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P. O. Box 19395-4697, Tehran, Iran.
Email: mghmgh2023@gmail.com

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.
Article Type: Research Paper.
Received: 25/07/2022, Accepted: 10/10/2022.
*Corresponding author.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134518.1518