http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷ — ۲۳۴۵
جلد ۷، شماره ۱ (۱۴۰۱)، صص. ۸۵-۹۲

http://www.ui.ac.ir

چند جمله‌ای‌های هال برای جبرهای ۲ــ ناکایاما

علیرضا نصراصفهانی

چکیده. در این مقاله نشان می‌دهیم برای جبرهای متناهی بعد ۲ــ ناکایامای راست، چند جمله‌ای‌های هال وجود دارند. این مطلب حدس رینگل را برای جبرهای ۲ــ ناکایامای راست اثبات می‌کند.

۱. مقدمه

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر شرکت پذیر یکدار متناهی بعد روی میدان متناهی k باشد. $\mathcal{A}$ــ مدول‌های M، N و R را در نظر می‌گیریم. مجموعه همه دنباله‌های دقیق کوتاه $0 \longrightarrow M \longrightarrow R \longrightarrow N \longrightarrow 0$ را با $\mathcal{P}^R_{M,N}$ و عدد اصلی این مجموعه را با $\mathbf{p}^R_{M,N} = |\mathcal{P}^R_{M,N}|$ نشان می‌دهیم. چون بنا به فرض $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N,R)$ و $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(R,M)$ متناهی هستند، پس $\mathbf{p}^R_{M,N}$ نیز متناهی است. برای هر $\mathcal{A}$ــ مدول M عدد اصلی $\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(M)$ را با a_M نشان می‌دهیم. همچنین تعریف می‌کنیم $\mathcal{F}^E_{MN} := \{U \leq E : E/U \cong M, U \cong N\}$ و عدد اصلی این مجموعه را با $F^E_{MN} := |\mathcal{F}^E_{MN}|$ نشان می‌دهیم و F^E_{MN} را عدد هال [1] می‌نامیم.

گروه آبلی آزاد با پایه $u_{[X]}$ها که توسط رده‌ی ایزومورفیسم $\mathcal{A}$ــ مدول‌های متناهی بعد پارامتری شده، به همراه ضرب

$$u_{[M]}u_{[N]} = \sum_{[E]} F^E_{MN} u_{[E]} = \sum_{[E]} \frac{1}{a_M a_N} \mathbf{P}^E_{M,N} u_{[E]}$$

تشکیل یک جبر می‌دهد که آن را جبر رینگل‌ــ هال [2] گویند و با $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهند. رینگل [3] در [۱۱] نشان داده است که $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ یک جبر شرکت‌پذیر و یکدار است که یک آن عضو $u_{[0]}$ متناظر با مدول 0 می‌باشد. زیر جبر $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ از جبر $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ تولید شده توسط رده‌ی ایزومورفیسم $\mathcal{A}$ــ مدول‌های ساده، جبر ترکیبی [4] نامیده می‌شود. زیر جبر $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ از جبر $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ تولید شده توسط رده‌ی ایزومورفیسم $\mathcal{A}$ــ مدول‌های نیم‌ساده را، جبر لوی [5] می‌نامند.

فرض کنیم $\triangle$ یک ماتریس تعمیم‌یافته کارتان متقارن شدنی (از دیدگاه کز[6]) باشد. جبر متناهی بعد موروثی $\mathcal{A}$ از نوع $\triangle$ روی میدان متناهی k با q عضو را درنظر بگیرید. q را به عنوان پارامتر کوانتومی در نظر بگیرید. بنابه [۱۳،۸]

عبارات و کلمات کلیدی: جبرهای رینگل‌ــ هال، جبرهای نمایش متناهی، جبرهای ۲ــ ناکایاما، چندجمله‌ای‌های هال
دبیرتخصصی رابط: جواد اسدالهی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۹
. http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134443.1515

[1]Hall number [2]Ringel-Hall algebra [3]Ringel [4]composition algebra [5]Loewy algebra [6]Kac

و [۲] قسمت مثبت U^+ از جبر پیچشی کوانتیده شده درینفلد_جیمبو [۷] $U = U^- \otimes U^\circ \otimes U^+$ از نوع $\triangle$ در جبر رینگل_ هال $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ نشانده می‌شود. این نشاندن، مولدهای U^+ را به $\mathcal{A}$_ مدول‌های ساده می‌برد و تصویر آن دقیقاً جبر ترکیبی $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ می‌باشد. همچنین سونهانت [۸] و وان دنبرگ [۹] در [۱۵] نشان دادند که جبر رینگل_ هال از جبر مسیری kQ که در آن Q یک کوییور بدون دور است، با قسمت مثبت جبر پیچشی کوانتیده از جبر کز_ مودی تعمیم یافته [۱۰] برابر است. نتایج رینگل، گرین، [۱۱] سونهانت و وان دنبرگ نشان می‌دهد که جبرهای رینگل_ هال در مطالعه گروه‌های کوانتوم از اهمیت خاصی برخوردارند. استفاده از جبرهای رینگل_ هال در مطالعه گروه‌های کوانتوم دارای دو مزیت اساسی است: اول این‌که از این روش علاوه بر جبرهای پیچشی کوانتیده متناظر با ماتریس‌های تعمیم یافته کارتان متقارن، می‌توان در مطالعه جبرهای پیچشی کوانتیده متناظر با ماتریس‌های تعمیم یافته کارتان متقارن شدنی نیز استفاده کرد. دوم این‌که اگر نمایش M عضوی از U^+ باشد، ویژه‌گی‌های خاصی از M به عنوان یک نمایش به U^+ انتقال می‌یابد، برای مثال می‌توان از نظریه اسلندر_ ریتن [۱۲] استفاده کرد. همچنین دیده می‌شود نمایش‌هایی که در U^+ هستند، دارای ویژه‌گی‌هایی هستند که در نظریه نمایش از اهمیت خاصی برخوردارند.

فرض کنیم E توسیعی از میدان k باشد. برای هر k_ فضای برداری V، E_ فضای برداری $V \otimes_k E$ را با V^E نشان می‌دهیم. اگر برای هر $\mathcal{A}$_ مدول تجزیه ناپذیر M، $\operatorname{End} M/(\operatorname{rad}(\operatorname{End} M))^E$ میدان باشد، توسیع E را توسیع محافظه کار [۱۳] برای جبر $\mathcal{A}$ گویند [۱۳]. تحت یکریختی میدان‌ها قرار می‌دهیم

$$\Omega = \{E | \text{است } \mathcal{A} \text{ توسیع محافظه کار برای جبر } E \text{ است و } k \text{ توسیعی از میدان متناهی } E\}.$$

اگر $\mathcal{A}$ جبری از نوع نمایش متناهی باشد آنگاه Ω مجموعه ای نامتناهی است [۱۳]. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد با Ωی نامتناهی باشد. اگر برای هر $X, Y, Z \in \operatorname{mod} \mathcal{A}$ چندجمله‌ای $\varphi^Y_{ZX} \in \mathbb{Z}[T]$ ، که چندجمله‌ای هال نامیده می‌شود، وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $E \in \Omega$، $\varphi^Y_{ZX}(|E|) = F^{Y^E}_{Z^E X^E}$ آنگاه گویند $\mathcal{A}$ دارای چندجمله‌ای‌های هال است [۱۳]. چند جمله‌ای های هال در محاسبه ضرایب ساختاری در جبرهای لی و گروه‌های کوانتوم متناظر اهمیت زیادی دارند. رینگل در [۱۲] اثبات کرده که هر جبر موروثی نمایش متناهی دارای چندجمله‌ای‌های هال است. همچنین او حدس زد که هر جبر نمایش متناهی دارای چندجمله‌ای‌های هال است. حدس رینگل هنوز باز است و محققان زیادی درستی این حدس را در حالت‌های خاصی بررسی کرده‌اند (مراجع [۳،۵،۶،۱۲،۱۴،۱۶] را ببینید). هوبری [۱۴] در [۳] چندجمله‌ای‌های هال را برای کوییورهای آفین مطالعه کرده است. نویسنده در [۵،۶] نشان داده است که جبرهای ناکایاما و جبرهای خوشه ای اریب نمایش متناهی دارای چندجمله‌ای‌های هال هستند. نویسنده و شکری جبرهای n_ ناکایامای راست را در [۷] معرفی و مطالعه کرده اند. جبرهای n_ ناکایامای راست یک تقسیم بندی برای جبرهای نمایش_ متناهی می دهد. نویسنده و شکری در [۷] اثبات کرده‌اند که جبر متناهی بعد $\mathcal{A}$ نمایش_ متناهی است اگر و فقط اگر عدد طبیعی n موجود باشد که $\mathcal{A}$ یک جبر n_ ناکایامای راست است. یادآوری می‌کنیم که جبر ۱_ ناکایاما راست همان جبر ناکایاما است.

در این مقاله با استفاده از خواص جبرهای ۲_ ناکایامای راست نشان می‌دهیم هر جبر ۲_ ناکایامای راست دارای چندجمله‌ای‌های هال است و حدس رینگل را برای این جبرها اثبات می‌کنیم.

[7] Drinfeld-Jimbo [8] Sevenhant [9] Van den Bergh [10] generalized kac-moody algebra [11] Green [12] Auslander-Reiten
[13] conservative [14] Hubery

۲. مفاهیم مقدماتی لازم از جبرهای ۲ـ ناکایاما و چندجمله‌ای‌های هال

فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک kـ جبر متناهی بعد با مجموعه کامل $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ از خودتوان‌های متعامد و ابتدایی باشد. جبر $\mathcal{A}$ را اساسی گویند اگر برای هر $i \neq j$، $\mathcal{A}$ـ مدول‌های راست $e_i\mathcal{A}$ و $e_j\mathcal{A}$ یکریخت نباشند. جبر $\mathcal{A}$ را همبند (یا تجزیه‌ناپذیر) گویند اگر $\mathcal{A}$ ضرب مستقیم دو جبر نباشد یا به طور معادل ۰ و ۱ تنها خودتوان‌های مرکزی $\mathcal{A}$ باشند. در این مقاله همواره $\mathcal{A}$ را یک kـ جبر متناهی بعد اساسی و همبند در نظر می‌گیریم.
رسته $\mathcal{A}$ـ مدول‌های راست متناهی بعد را با $\operatorname{mod} \mathcal{A}$ نشان می‌دهیم و مجموعه همه $\mathcal{A}$ـ مدول‌های راست متناهی بعد تجزیه ناپذیر غیریکریخت را با $\operatorname{ind} \mathcal{A}$ نشان می‌دهیم. بنا به قضیه گابریل [15] [۱، فصل دوم ـ قضیه ۳.۷] کوییور متناهی و همبند Q و ایده‌ال پذیرفتنی I از جبر مسیری kQ موجود است که $\mathcal{A} \cong kQ/I$.
فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد و M یک $\mathcal{A}$ـ مدول متناهی بعد باشد. مدول M را تک زنجیری [16] گویند اگر فقط یک سری ترکیبی داشته باشد. جبر $\mathcal{A}$ را ناکایاما [17] گویند اگر هر $\mathcal{A}$ـ مدول راست تجزیه‌ناپذیر تصویری و هر $\mathcal{A}$- مدول راست تجزیه ناپذیر تزریقی، تک‌زنجیری باشد. به سادگی دیده می‌شود که جبر $\mathcal{A}$ ناکایاما است اگر و فقط اگر هر $\mathcal{A}$ـ مدول راست تجزیه ناپذیر تک‌زنجیری باشد. برای مطالعه خواص جبرهای ناکایاما به بخش سوم از فصل پنجم کتاب [۱] مراجعه کنید.

فرض کنیم M یک $\mathcal{A}$ـ مدول متناهی بعد باشد. سری $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M$ از زیر مدول‌های M به‌طوری‌که برای هر $0 \leq j \leq m-1$، M_{j+1}/M_j یک $\mathcal{A}$ـ مدول ساده باشد را یک سری ترکیبی برای مدول M گویند. عدد m را طول مدول M گویند و با $l(M)$ نشان می‌دهند.

اشتراک زیر مدول‌های بیشین مدول M را رادیکال مدول M گویند و با $\operatorname{rad}(M)$ نشان می‌دهند. تعریف می‌کنیم $\operatorname{rad}^0(M) := M$ و $\operatorname{rad}^n(M) := \operatorname{rad}(\operatorname{rad}^{n-1}(M))$، برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$.

تعریف ۱.۲. [۷، تعاریف ۱.۲ و ۲.۲] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد و M یک $\mathcal{A}$ـ مدول راست با طول l باشد.*
۱) *مدول M را ۱ـ بخش زنجیری گویند اگر M تک‌زنجیری باشد.*
۲) *عدد طبیعی $1 < n \leq l$ را در نظر بگیرید. مدول M را nـ بخش زنجیری [18] گویند اگر مدول $\frac{M}{\operatorname{rad}^{l-n}(M)}$ تک‌زنجیری باشد و مدول $\frac{M}{\operatorname{rad}^{l-n+1}(M)}$ تک‌زنجیری نباشد.*
۳) *$\mathcal{A}$ را یک جبر nـ ناکایاما راست گویند اگر هر $\mathcal{A}$ـ مدول راست تجزیه‌ناپذیر به ازای یک عدد طبیعی $1 \leq i \leq n$، iـ بخش زنجیری باشد و حداقل یک $\mathcal{A}$ـ مدول راست تجزیه‌ناپذیر nـ بخش زنجیری وجود داشته باشد.*

مثال ۲.۲. *فرض کنیم $\mathcal{A} = KQ$ که Q کوییور زیر می‌باشد:*

$$2 \leftarrow 3 \rightarrow 1$$

کوییور اسلندرـ ریتن جبر $\mathcal{A}$ کوییور زیر است:

$$\begin{tikzcd}
100 \arrow[dr] & & 011 \arrow[dr] & \\
& 111 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 010 \\
001 \arrow[ur] & & 110 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

[15] Gabriel [16] uniserial [17] Nakayama [18] n-factor serial

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134443.1515

$\mathcal{A}$ــ مدول‌های راست ۰۰۱ , ۰۱۰ , ۰۱۱ , ۱۰۰ و ۱۱۰ تک‌زنجیری هستند و به سادگی دیده می‌شود که Λــ مدول راست ۱۱۱ ۲ــ بخش زنجیری است. لذا $\mathcal{A}$ یک‌جبر ۲ــ ناکایامای راست است.

برای مطالعه خواص جبرهای nــ ناکایاما و دیدن مثال‌های بیشتری از این جبرها به [۷] مراجعه کنید.

تعریف ۳.۲. *طول لوی [۱۹] مدول M را به صورت کوچکترین عدد صحیح مثبت n که $\mathrm{rad}^n(M) = 0$ تعریف می‌کنند و با $ll(M)$ نشان می‌دهند.*

مدول‌های تجزیه ناپذیر، دنباله‌های تقریبا شکافتنی و کویور و روابط جبرهای ۲ــ ناکایاما در [۷] مطالعه و رده‌بندی شده اند. در این قسمت مطالب و قضایایی از [۷] را که در این مقاله به آنها نیاز داریم بدون اثبات بیان می‌کنیم.
فرض کنیم M یک $\mathcal{A}$ــ مدول متناهی بعد باشد. زیر مدول تولید شده توسط تمام زیر مدول‌های ساده مدول M را ساکل مدول M گویند و با $\mathrm{soc}(M)$ نشان می‌دهند.

گزاره ۴.۲. [۷، لم.۲ .۵ و گزاره ۵.۵] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر ۲ــ ناکایاما راست و M یک $\mathcal{A}$ــ مدول راست تجزیه ناپذیر ۲ــ بخش زنجیری باشد. آن‌گاه M مدولی تصویری است که $l(M) = 3$، $ll(M) = 2$، $\mathrm{soc}(M) = S_1 \oplus S_2$ و $\mathrm{rad}(M) = \mathrm{soc}(M)$ که S_1 و S_2 زیر مدول‌های ساده M هستند.*

قضیه ۵.۲. [۷، قضیه ۵.۸] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد غیر ناکایاما باشد. $\mathcal{A}$ یک جبر ۲ــ ناکایاما راست است اگر و فقط اگر هر $\mathcal{A}$ــ مدول راست تجزیه‌ناپذیر غیرتصویری، تک‌زنجیری باشد.*

نتیجه ۶.۲. [۷، نتیجه ۵.۹] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد باشد. اگر هر $\mathcal{A}$ــ مدول راست تجزیه‌ناپذیر غیرتصویری، تک‌زنجیری باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}$ یک جبر ناکایاما یا یک جبر ۲ــ ناکایاما راست است.*

در این قسمت مطالب و قضایایی را که در این مقاله برای محاسبه چندجمله‌ای‌های هال به آنها نیاز داریم بدون اثبات بیان می‌کنیم.

لم ۷.۲. ([۱۲] همچنین ببینید [۱۶، لم ۲.۴]) *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد و S یک $\mathcal{A}$ــ مدول ساده باشد. در این‌صورت برای هر $M, N \in \mathrm{mod}\,\mathcal{A}$ چندجمله‌ای‌های هال φ^M_{SN} و φ^M_{NS} وجود دارند.*

لم ۸.۲. (فرمول ریدتمان [۲۰]) [۹، گزاره ۵] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد باشد و $X, M, N \in \mathrm{mod}\,\mathcal{A}$. آن‌گاه*

$$F^X_{MN} = \frac{|\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,N)_X\,|\, a_X}{|\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)\,|\, a_M a_N}$$

که در آن $|\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,N)_X\,|$ عدد اصلی زیرمجموعه‌ی $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,N)_X \subseteq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,N)$ شامل دنباله‌های دقیق کوتاه در $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,N)$ است که جمله‌ی وسط آن‌ها با X یکریخت است و $a_M := |\,\mathrm{Aut}_{\mathcal{A}}(X)\,|$.

لم ۹.۲. [۶، لم ۲.۱] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد باشد و در $\mathcal{H}(\mathcal{A})$، $[M] = [M_1] + [M_2]$. آن‌گاه برای هر $L, N \in \mathrm{mod}\,\mathcal{A}$، $F^L_{MN} = F^L_{M_1N} + F^L_{M_2N}$.*

---
[19] Loewy length [20] Riedtmann

لم ۲.۱۰. [[۱۰](#)، لم صفحه ۴۴۱] *فرض کنیم $\varphi, \psi \in \mathbb{Z}[T]$ که در آن $\mathbb{Z}[T]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب صحیح است و ضریب پیش‌رو ψ یک باشد. آن‌گاه ψ، φ را می‌شمارد اگر و فقط اگر برای تعداد نامتناهی $q \in \mathbb{Z}$، $\psi(q)$، $\varphi(q)$ را بشمارد.*

لم ۲.۱۱. ([[۱۲](#)]همچنین ببینید [[۱۶](#)، لم ۲.۳]) *فرض کنیم* $M, N \in \operatorname{mod} \mathcal{A}$، $d(M,N) = \dim_k(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N))$ و $f_{MN} = T^{d(M,N)} \in \mathbb{Z}[T]$. *در این‌صورت برای هر* $E \in \Omega$، $f_{MN}(\mid E \mid) = \mid \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^E}(M^E, N^E) \mid$.

قضیه ۲.۱۲. [[۶](#)، قضیه ۲.۹] *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر متناهی بعد نمایش متناهی روی میدان متناهی k باشد. آن‌گاه $\mathcal{A}$ دارای چندجمله‌ای‌های هال است اگر و فقط اگر برای هر $X, Z \in \operatorname{mod} \mathcal{A}$ و $Y \in \operatorname{ind} \mathcal{A}$ چندجمله‌ای هال φ^X_{YZ} موجود باشد.*

۳. چندجمله‌ای‌های هال برای جبرهای ۲ــ ناکایاما

در این بخش قضیه اصلی این مقاله را اثبات می‌کنیم و نشان می‌دهیم جبرهای ۲ــ ناکایامای راست دارای چندجمله‌ای‌های هال هستند.

قضیه ۳.۱. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر ۲ــ ناکایامای راست و M یک $\mathcal{A}$ــ مدول تک‌زنجیری باشد. آن‌گاه برای هر $X, Z \in \operatorname{mod} \mathcal{A}$ چندجمله‌ای هال φ^X_{MZ} موجود است.*

اثبات. چون M تک‌زنجیری است، به طور یکتا توسط طول آن $l(M) = l$ و $top(M) := \dfrac{M}{\operatorname{rad}(M)}$ مشخص می‌شود. فرض کنیم $\{S_۱, S_۲, \dots, S_n\}$ مجموعه کامل از $\mathcal{A}$ــ مدول‌های ساده تحت یکریختی باشد، مدول M را با $S_i(l)$ نشان می‌دهیم که در آن $top(M) = S_i$. همچنین اگر N یک $\mathcal{A}$ــ مدول ۲ــ بخش زنجیری و تجزیه ناپذیر باشد، بنابه گزاره [۲.۴](#)، N تصویری است، پس به‌طور یکتا توسط $top(N)$ مشخص می‌شود. فرض کنیم L یک $\mathcal{A}$ــ مدول باشد که جمع مستقیم $\mathcal{A}$ــ مدول‌های تک‌زنجیری باشد. آن‌گاه nــ تایی $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \dots, \alpha_n)$ ، که در آن برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\alpha_i = (\alpha_i^۱, \alpha_i^۲, \dots)$ یک افراز از اعداد صحیح نامنفی است، وجود دارد که $L = \oplus_{i=۱}^n \oplus_j S_i(\alpha_i^j)$، در این‌صورت L را مدول از نوع α گوییم و با $L(\alpha)$ نشان می‌دهیم. هر $\mathcal{A}$ــ مدول که جمع مستقیم $\mathcal{A}$ــ مدول‌های تک‌زنجیری باشد به این‌صورت نمایش داده می‌شود. توجه کنید که چون $\mathcal{A}$ یک جبر ۲ــ ناکایامای راست است هر $\mathcal{A}$ــ مدول متناهی بعد به‌صورت جمع مستقیم مدول‌های تک زنجیری و مدول‌های تصویری می‌باشد.
حال روی مجموعه همه nــ تایی‌ها از افرازها ترتیب جزیی زیر را در نظر می‌گیریم. $\alpha \leq \beta$ اگر و فقط اگر برای هر i, j، $\beta_j^i \leq \alpha_j^i$. فرض کنیم برای هر $۱ \leq i \leq l$ که در آن $l(M) = l$، $_iM = MJ(\mathcal{A})^{i-۱}/(MJ(\mathcal{A})^i)$ فاکتور لوی M باشد. در این‌صورت در جبر رینگل‌ــ هال $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ داریم $[_۱M][_۲M]\cdots[_lM] = \sum_\alpha a_\alpha^M [L(\alpha)]$ که در آن

$$a_\alpha^M = \mid \{N \supseteq {}_۰N \supseteq {}_۱N \supseteq \cdots \supseteq {}_lN = ۰ \mid {}_{i-۱}N/{}_iN \cong {}_iM, \forall i\} \mid .$$

اگر $a_\alpha^M \neq ۰$ آن‌گاه $_{i-۱}NJ(\mathcal{A}) \subseteq {}_iN$ و بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq l$، $NJ(\mathcal{A})^i \subseteq {}_iN$. در نتیجه در $\mathcal{H}(\mathcal{A})$، $[M]$ به‌صورت مجموع (با ضرایب صحیح) مدول‌های ساده $[_۱M], \dots, [_lM]$ نوشته می‌شود. پس با استفاده از لم‌های [۲.۷](#)، [۲.۹](#) به سادگی دیده می‌شود که چندجمله‌ای هال φ^X_{MZ} موجود است. □

حال می‌توانیم قضیه اصلی این مقاله را اثبات کنیم.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134443.1515

قضیه ۲.۳. *فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر ۲ـ ناکایامای راست همبند و اساسی روی میدان متناهی k باشد. آنگاه $\mathcal{A}$ دارای چندجمله‌ای های هال است.*

اثبات. بنابه قضیه ۱۲.۲ کافی است نشان دهیم برای هر $X, Z \in \operatorname{mod} \mathcal{A}$ و $Y \in \operatorname{ind} \mathcal{A}$ چندجمله‌ای هال φ^X_{YZ} موجود است. فرض کنیم $X, Z \in \operatorname{mod} \mathcal{A}$ و $Y \in \operatorname{ind} \mathcal{A}$. بنابه قضیه ۵.۲، Y یک $\mathcal{A}$ـ مدول تک‌زنجیری یا تصویری است. اگر Y یک $\mathcal{A}$ـ مدول تک‌زنجیری باشد بنابه قضیه ۱.۳ چندجمله‌ای هال φ^X_{YZ} موجود است. فرض کنیم Y یک $\mathcal{A}$ـ مدول تجزیه‌ناپذیر تصویری باشد و $E \in \Omega$. بنابه لم ۸.۲،

$$F^{X^E}_{Y^E Z^E} = \frac{|\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}^E}(Y^E, Z^E)_{X^E}|\,|\operatorname{Aut}_{\mathcal{A}^E}(X^E)|}{|\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^E}(Y^E, Z^E)|\,|\operatorname{Aut}_{\mathcal{A}^E}(Y^E)|\,|\operatorname{Aut}_{\mathcal{A}^E}(Z^E)|}.$$

چون Y تصویری است، $|\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}^E}(Y^E, Z^E)^E_X| = 1$. بنابه لم ۱۱.۲، چند جمله‌ای‌های با ضریب پیشرو ۱، $g_{YZ}, a_Y, a_Z, a_X \in \mathbb{Z}[T]$ وجود دارند که برای هر $E \in \Omega$،

$$\begin{aligned}
g_{YZ}(|E|) &= |\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}^E}(Y^E, Z^E)|,\\
a_Y(|E|) &= |\operatorname{Aut}_{\mathcal{A}^E}(Y^E)|,\\
a_Z(|E|) &= |\operatorname{Aut}_{\mathcal{A}^E}(Z^E)|,\\
a_X(|E|) &= |\operatorname{Aut}_{\mathcal{A}^E}(X^E)|.
\end{aligned}$$

پس بنابه لم ۱۰.۲ چندجمله‌ای هال φ^X_{YZ} موجود است. □

تشکر و قدردانی

از داور محترم به‌خاطر مطالعه دقیق و پیشنهادات سازنده ایشان، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مراجع

[1] I. Assem, D. Simson and A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebra, Techniques of representation theory*, **1**, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] J. A. Green, Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups, *Invent. Math.*, **120** (1995) 361–377.

[3] A. Hubery, Hall polynomials for affine quivers, *Represent. Theory*, **14** (2010) 355–378.

[4] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second edition. With contributions by A. Zelevinskyi Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[5] A. Nasr-Isfahani, Hall polynomials and composition algebra of representation finite algebras, *Algebr. Represent. Theory*, **17** (2014) 1155–1161.

[6] A. Nasr-Isfahani, Hall polynomials for Nakayama algebras, *Algebr. Represent. Theory*, **15** (2012) 483–490.

[7] A. Nasr-Isfahani and M. Shekari, Right n-Nakayama algebras and their representations, *Algebr. Represent. Theory*, **23** (2020) 1297–1317.

[8] C. M. Ringel, From representation of quivers via Hall and Loewy algebras to quantum groups, C*ontemp. Math.*, **131** (1992) 381–401.

[9] C. M. Ringel, *Green's theorem on Hall algebras*, Representation theory of algebras and related topics (Mexico City, 1994), **19** (1996) 185–245.

[10] C. M. Ringel, *Hall algebras, in Topics in Algebra, part I*, Banach Centre Publ., PWN, Warsaw, **26** (1990) 433–447.

[11] C. M. Ringel, Hall algebras and quantum groups, *Invent. Math.*, **101** (1990) 583–591.

[12] C. M. Ringel, Hall polynomials for the representation-finite hereditary algebras, *Adv. Math.*, **84** (1990) 137–178.

[13] C. M. Ringel, *Lie algebras arising in representation theory*, in, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, **168** (1992) 284–291.

[14] C. M. Ringel, The Theorem of Bo Chen and Hall polynomials, *Nagoya Math. J.*, **183** (2006) 143–160.

[15] B. Sevenhant and M. Van den Bergh, A relation between a conjecture of Kac and the structure of the Hall algebra, *J. Pure Appl. Algebra*, **160** (2001) 319–332.

[16] S. Zhang, The Hall polynomials for tame quiver algebras, *J. Algebra*, **239** (2001) 606–614.

علیرضا نصراصفهانی
گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران.
nasr_a@sci.ui.ac.ir

علیرضا نصراصفهانی متولد شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۸۸ در مقطع دکتری از دانشگاه تربیت مدرس دانش آموخته شد و در همان سال به عنوان هیات علمی به عضویت گروه ریاضی دانشگاه اصفهان در آمد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134443.1515

Hall Polynomials For 2-Nakayama Algebras

Alireza Nasr-Isfahani

Abstract: In this note we show that Hall polynomials exist for basic connected right 2-Nakayama algebras. This result prove the Ringel's conjecture for right 2-Nakayama algebras.

Keywords: Hall polynomials,Ringel-Hall algebras, 2-Nakayama algebras, representation finite algebra.

Alireza Nasr-Isfahani
Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran.
Email: nasr_a@sci.ui.ac.ir

Communicated by Javad Asadollahi.
Article Type: Research Paper.
Received: 17/07/2022, Accepted: 10/09/2022.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134443.1515