http://www.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه

شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا (الکترونیکی): ۶۵۰۷ – ۲۳۴۵

جلد ۷، شماره ۱ (۱۴۰۱)، صص. ۹۳-۱۰۴

http://math-sci.ui.ac.ir

حدس اوسلندر–ریتن برای حلقه‌های گرنشتاین از بعد کرول حداقل ۲

حسین اشراقی

چکیده. حدس اوسلندر–ریتن یکی از حدس‌های قدیمی و مهم در نظریه نمایش جبرها است که با بسیاری از حدس های هومولوژیک دیگر نیز مرتبط است. اثبات درستی این حدس می‌تواند زمینه اثبات چندین حدس هومولوژیک دیگر را فراهم آورد. اخیراً صورت دوگانی از این حدس مورد مطالعه قرار گرفته که قوی‌تر از صورت اصلی آن می‌باشد و در برخی حالات، ممکن است بررسی درستی آن ساده‌تر باشد. مقاله حاضر، به بررسی این‌صورت دوگان در مورد جبرهای نوتری گرنشتاین روی حلقه‌های با بعد کرول حداقل ۲ می‌پردازد. در ابتدا نشان داده می‌شود که به‌منظور بررسی این حدس روی چنین جبرهایی، کافی است تنها حالتی را در نظر بگیریم که بعد کرول حلقه زمینه دقیقاً ۲ باشد. سپس توجه خود را تنها به چنین جبرهایی معطوف کرده و درستی حدس مذکور را برای مدول‌های با طول متناهی نشان می‌دهیم.

۱. مقدمه

یکی از حدس‌های مهم و بسیار قدیمی در نظریه نمایش جبرهای متناهی‌البعد (یا به‌طور عام‌تر، جبرهای آرتینی[1] [۵]) حدس اوسلندر[2]–ریتن[3] می‌باشد که به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

(ح.ا.ر) فرض کنیم Γ یک جبر آرتینی و M یک Γ–مدول با تولید متناهی باشد. اگر به‌ازای هر $i \geq ۱$، $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(M, M\oplus\Gamma) = ۰$ آن‌گاه M تصویری است.

این حدس اولین بار در [۴] توسط اوسلندر و ریتن به‌عنوان یک شرط معادل برای حدس معروف دیگری موسوم به حدس تعمیم‌یافته ناکایاما[4] [۱۶] ارائه گردید. به سرعت مشخص شد که این حدس با بسیاری از حدس‌های مهم دیگر در نظریه نمایش جبرها ارتباط تنگاتنگی دارد که از این میان، می‌توان به حدس مشهور بعد نهایی [۱۳] و حدس تاشیکاوا[5] [۱۹] اشاره کرد. حدس اوسلندر–ریتن تاکنون برای انواع خاصی از جبرهای آرتینی به اثبات رسیده که مهمترین آن‌ها، جبرهای دارای نوع نمایش متناهی هستند [۴]. جبر آرتینی Γ دارای نوع نمایش متناهی نامیده می‌شود هرگاه تنها تعداد متناهی کلاس یکریختی از Γ– مدول‌های تجزیه‌ناپذیر با تولید متناهی موجود باشد [۵]. به‌علاوه، این حدس در مورد حلقه‌های جابجایی و نوتری نیز مورد توجه قرار گرفته است [۱، ۸، ۱۴، ۱۸].

به تازگی در مرجع [۱۲] صورت دوگانی از (ح.ا.ر) مورد توجه قرار گرفته که به صورت ذیل بیان می‌شود:

عبارات و کلمات کلیدی: (دوگان) حدس اوسلندر–ریتن، جبر نوتری، مدول گرنشتاین.

دبیرتخصصی رابط: جواد اسدالهی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۲۶

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516 .

[1]Artin [2]Auslander [3]Reiten [4]Nakayama [5]Tachikawa

(د.ح.ا.ر) فرض کنیم Λ یک جبرنوتری روی حلقه جابجایی R و M یک Λ−مدول آرتینی، چنان باشد که به ازای هر Λ−مدول تزریقی I و هر $i \geq ۱$، $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(I \oplus M, M) = ۰$. در این‌صورت M تزریقی است.

لازم به ذکر است که اگر جبر آرتینی Γ (جبر نوتری Λ) گرنشتاین[۶] باشد آن‌گاه شرط $\mathrm{Ext}^i_\Gamma(M, \Gamma) = ۰$ برای هر $i \geq ۱$ در (ح.ا.ر) ($\mathrm{Ext}^i_\Lambda(I, M) = ۰$ به ازای $i \geq ۱$ و هر مدول تزریقی I در (د.ح.ا.ر)) را می‌توان با گرنشتاین تصویری بودن (گرنشتاین تزریقی بودن) M جایگزین کرد. از این رو، در مقاله حاضر، با صورتی از (د.ح.ا.ر) سروکار خواهیم داشت که مستلزم مدول‌های گرنشتاین تزریقی است. حدس اخیر در مقاله [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته و به‌ویژه نشان داده شده که برای جبرهای نوتری بر حلقه موضعی گرنشتاین R، برقراری (د.ح.ا.ر)، درستی (ح.ا.ر) را ایجاب می‌کند. همچنین در حالاتی که Λ یک جبر آرتینی یا یک جبر نوتری بر حلقه گرنشتاین تام R باشد، این دو حدس منطقاً هم‌ارز هستند. در [۱۲، قضیه ۲.۱۰] ثابت شده که افزودن شرط ذیل به مفروضات (د.ح.ا.ر)، برقراری آن را ایجاب می‌کند:

حلقه R موضعی و گرنشتاین از بعد کرول[۷] دست‌کم ۲ باشد و برای هر ایده‌آل اول نابیشین $\mathfrak{p}$ از R، $\Lambda_\mathfrak{p}$−مدول $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_\mathfrak{p}, M)$ دارای بعد تزریقی متناهی است.

این موضوع، یکی از انگیزه‌های اصلی نگارش مقاله حاضر است که در آن به مطالعه مدول‌های به فرم $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_\mathfrak{p}, M)$ پرداخته می‌شود. در این مقاله، به طور ویژه، توجه خود را معطوف به حالتی می‌کنیم که حلقه R دارای بعد کرول ۲ است، زیرا، همان‌طور که نشان خواهیم داد، درستی (د.ح.ا.ر) در این حالت، درستی آن در سایر حالات را ایجاب می‌کند.

از سوی دیگر، در مرجع [۶] نقش مدول‌های با طول متناهی در مطالعه (ح.ا.ر) مورد توجه قرار گرفته و نشان داده شده که به‌منظور برقراری این حدس روی حلقه‌های کوهن[۸] −مکالی[۹] ، کافی است مدول‌های دارای طول متناهی را مورد توجه قرار داد.

آن‌چه تا کنون گفتیم، انگیزه‌ی نگارش این مقاله شد. در ادامه، R همواره نشان‌دهنده یک حلقه جابجایی، موضعی و گرنشتاین با بعد کرول $d \geq ۲$ و ایده‌آل بیشین $\mathfrak{m}$ است. همچنین Λ یک R−جبر نوتری فرض می‌شود؛ پس با الهام از تعریف جبرهای آرتینی [۵]، همریختی حلقه‌ای $\varphi : R \to \Lambda$ یافت می‌شود که نگاره آن مشمول در مرکز حلقه یکدار Λ بوده و Λ را تبدیل به یک R− مدول با تولید متناهی می‌کند. به علاوه، Λ با این ساختار R−مدولی، کوهن−مکالی بیشین فرض می‌شود. برای مطالعه مفاهیم اساسی مربوط به چنین حلقه‌هایی، خواننده می‌تواند به مراجع [۲] و [۷] مراجعه کند.

در سراسر این مقاله، منظور از یک مدول، یک مدول چپ M بر حلقه مشخص Γ می‌باشد که در صورت لزوم آن را با نماد $_\Gamma M$ نشان می‌دهیم؛ مدول‌های راست به صراحت مشخص شده و در صورت لزوم با نماد M_Γ نشان داده می‌شوند. نمادهای $\mathrm{pd}_\Gamma(M)$ و $\mathrm{id}_\Gamma(M)$ به ترتیب برای نشان دادن ابعاد تصویری و تزریقی Γ−مدول M به‌کار خواهند رفت که خواننده می‌تواند تعاریف آن‌ها را در [۱۷] بیابد. نماد Ker برای نشان دادن هسته یک همریختی به‌کار گرفته می‌شود.

نتیجه اصلی مقاله حاضر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۱.۱. با قراردادهای فوق، هر R− جبر نوتری گرنشتاین Λ در (د.ح.ا.ر) روی مدول‌های با طول متناهی صدق می‌کند.

۲. نتایج اصلی

این بخش را با یادآوری مفهوم مدول‌های گرنشتاین آغاز می‌کنیم. یک مرجع مناسب برای مطالعه مبسوط این مفهوم و مطالب مرتبط با آن، کتاب [۱۱] می‌باشد.

[6]Gorenstein [7]Krull [8]Cohen [9]Macaulay

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

تعریف ۱.۲. فرض کنیم M یک Λ–مدول است. گوییم M گرنشتاین تزریقی است هرگاه همبافت دقیق

$$\cdots \longrightarrow I^{-1} \longrightarrow I^{0} \longrightarrow I^{1} \longrightarrow \cdots$$

از Λ–مدول‌های تزریقی چنان یافت شود که $M = \operatorname{Ker}(I^{0} \longrightarrow I^{1})$ و این همبافت تحت تأثیر تابعگر $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(J, -)$، برای هر Λ–مدول تزریقی J، دقیق باقی بماند.

مفهوم مدول‌های گرنشتاین تصویری به صورت دوگان تعریف می‌شود. همچنین Λ–مدول N را گرنشتاین یکدست نامیم هرگاه به ازای همبافت دقیق

$$\cdots \longrightarrow F^{-1} \longrightarrow F^{0} \longrightarrow F^{1} \longrightarrow \cdots$$

از Λ–مدول‌های یکدست که تحت تأثیر تابعگر $I \otimes_{\Lambda} -$ به ازای هر Λ–مدول راست تزریقی I دقیق باقی می‌ماند، داشته باشیم $N = \operatorname{Ker}(F^{0} \longrightarrow F^{1})$.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که ارائه و مطالعه مدول‌های گرنشتاین، در ابتدا با معرفی مدول‌های گرنشتاین تصویری توسط ایناکس[10] و ژندا[11] آغاز گردید. این گونه از مدول‌ها به عنوان تعمیم طبیعی مدول‌های دارای G–بعد صفر که توسط اوسلندر و بریدگر[12] در [۳] و تنها روی حلقه‌های جابجایی و موضعی مورد مطالعه قرار گرفته بودند، ارائه شدند. خواننده می‌تواند مراجع [۹] و [۱۰] را برای کسب اطلاعات بیشتر ببیند.

تعریف ۲.۲. حلقه Λ را گرنشتاین نامیم هرگاه Λ به عنوان Λ–مدول چپ و Λ–مدول راست دارای بعد تزریقی متناهی باشد؛ یعنی $\operatorname{id}(\Lambda_{\Lambda}) < \infty$ و $\operatorname{id}({}_{\Lambda}\Lambda) < \infty$.

حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و حلقه چندجمله‌ای‌های n–متغیره $K[x_1, \cdots, x_n]$ بر میدان K، نمونه‌هایی از حلقه‌های گرنشتاین هستند. یکی از خواص اساسی حلقه‌های گرنشتاین، که بارها مورد استفاده خواهد بود، این است که بنابر [۱۱، قضیه ۹.۱.۱۰]، برای مدول M بر چنین حلقه Λ، $\operatorname{pd}_{\Lambda}(M) < \infty$ اگر و تنها اگر $\operatorname{id}_{\Lambda}(M) < \infty$.

مشخص‌سازی‌هایی برای مدول‌های گرنشتاین بر حلقه‌های گرنشتاین در لم ذیل ارائه شده است:

لم ۳.۲. فرض کنیم M یک Λ–مدول است.

(۱) اگر M گرنشتاین تزریقی باشد آن‌گاه برای هر Λ–مدول N با بعد تزریقی متناهی و هر $i \geq 1$، $\operatorname{Ext}^{i}_{\Lambda}(N, M) = 0$. به‌علاوه، اگر Λ گرنشتاین باشد آن‌گاه این خاصیت، مدول‌های گرنشتاین تزریقی را مشخص می‌سازد.

(۲) اگر M گرنشتاین یکدست باشد آن‌گاه برای هر Λ–مدول راست N با بعد تزریقی متناهی و هر $i \geq 1$، $\operatorname{Tor}^{\Lambda}_{i}(N, M) = 0$. به‌علاوه، اگر Λ گرنشتاین باشد آن‌گاه این خاصیت، مدول‌های گرنشتاین یکدست را مشخص می‌سازد.

اثبات. قسمت‌های (۱) و (۲) به ترتیب در [۱۱، نتیجه ۱۱.۲.۲] و [۱۱، قضیه ۱۰.۳.۸] نشان داده شده‌اند. □

شایان ذکر است که گزاره مشابهی در مورد مدول‌های گرنشتاین تصویری موجود است که در اینجا از ذکر آن خودداری کرده و خواننده را به [۱۱] ارجاع می‌دهیم.

[10]Enochs [11]Jenda [12]Bridger

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

تعریف ۴.۲. فرض کنیم M یک Λ−مدول است و $x \in \Lambda$. گوییم x عضوی M−منظم است هرگاه به ازای هر $m \in M$، از $xm = 0$ نتیجه شود $m = 0$.

به بیان دیگر، عضو M−منظم، عضوی است که روی M مقسوم علیه صفر نباشد. در ادامه این مقاله، برای Λ−مدول دلخواه M، $_xM \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda}, M)$ زیرمدول پوچ شده از M توسط عضو دلخواه x از Λ را نشان می‌دهد.

لم ۵.۲. فرض کنیم $x \in \Lambda$ یک عضو مرکزی Λ−منظم، A یک Λ−مدول و B یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$−مدول باشد.

(۱) اگر A تصویری نباشد و $A = xA$ آنگاه $\mathrm{pd}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(_xA) = \mathrm{pd}_\Lambda(A) - 1$.

(۲) اگر x، A−منظم نیز باشد آنگاه برای هر $n \geq 1$،

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(B, A) \simeq \mathrm{Ext}^{n-1}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(B, \frac{A}{xA}).$$

(۳) اگر $A = xA$ آنگاه برای هر $n \geq 1$،

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B) \simeq \mathrm{Ext}^{n-1}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(_xA, B),$$

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(B, A) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(B, _xA).$$

اثبات. قسمت‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب در تمرینات ۱، ۲ و ۴ صفحه ۱۵۵ از مرجع [۱۵] ارائه شده‌اند. □

یادآوری می‌گردد برای عضو Λ− منظم x و Λ− مدول تزریقی M، همواره رابطه $M = xM$ برقرار است. گزاره ذیل این موضوع را به مدول‌های گرنشتاین تزریقی بر حلقه‌های گرنشتاین تعمیم می‌دهد.

گزاره ۶.۲. فرض کنیم جبر نوتری Λ گرنشتاین و $x \in \Lambda$ یک عضو مرکزی Λ−منظم باشد.

(۱) برای هر Λ−مدول گرنشتاین تزریقی M، $xM = M$.

(۲) حلقه $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$ گرنشتاین است.

اثبات. (۱). چون x یک عضو Λ−منظم است، دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{.x} \Lambda \longrightarrow \frac{\Lambda}{x\Lambda} \longrightarrow 0$ از Λ−مدول‌ها موجود است که $.x$ معرف همریختی ضربی توسط x است. این دنباله بویژه نشان می‌دهد که $\mathrm{pd}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda}) \leq 1$ و چون Λ گرنشتاین است، $\mathrm{id}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda}) < \infty$. حال با اعمال تابعگر $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ بر دنباله دقیق فوق و به کار بستن لم ۳.۲ دنباله دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda}, M) \longrightarrow M \xrightarrow{.x} M \longrightarrow 0$$

به دست می‌آید. توجه کنید که چون $_xM \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda}, M)$، دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow {}_xM \longrightarrow M \xrightarrow{.x} M \longrightarrow 0$ از Λ−مدول‌ها را در اختیار داریم. این دنباله به ویژه نشان می‌دهد که همریختی $.x$ پوشا است. از این رو، $M = xM$.

(۲). فرض کنیم B یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$−مدول دلخواه باشد. بنابر قسمت (۲) از لم ۵.۲، برای هر $i \geq 1$ یکریختی

$$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(B, \Lambda) \simeq \mathrm{Ext}^{i-1}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(B, \frac{\Lambda}{x\Lambda})$$

موجود است. از آنجا که B یک Λ–مدول نیز هست، فرض لم ایجاب می‌کند که به ازای i به اندازه کافی بزرگ و هر $j \geq i$، $\mathrm{Ext}^j_\Lambda(B,A)=0$. از این رو، به ازای هر چنین j، $\mathrm{Ext}^{j-1}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(B,\frac{\Lambda}{x\Lambda})=0$ که نتیجه می‌دهد $\mathrm{id}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(\frac{\Lambda}{x\Lambda})<\infty$. □

تبصره ۷.۲. به‌سادگی دیده می‌شود که حلقه یکدار Λ یک جبر نوتری است هرگاه مرکز Λ حلقه‌ای نوتری بوده و Λ به عنوان مدولی بر این حلقه، با تولید متناهی باشد. با لحاظ کردن این موضوع، هر عضو مرکزی Λ–منظم x روی R–جبر نوتری Λ را می‌توان به عنوان عضوی که همزمان Λ–منظم و R–منظم است، انگاشت. این مطلب در ادامه مقاله، مهم خواهد بود.

تعریف ۸.۲. فرض کنیم M یک Λ–مدول است. گوییم M خود–متعامد است هرگاه به ازای هر $i \geq 1$، $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M)=0$.

گزاره ذیل، اهمیت مطالعه جبرهای نوتری بر حلقه‌های با بعد کرول ۲ را روشن می‌کند. در ادامه نشان خواهیم داد که گزاره ذیل، به‌همراه [۱۲، گزاره ۱۰.۲] استقراء به کارگرفته شده در قضیه ۱۳.۲ را پایه‌گذاری می‌کند.

گزاره ۹.۲. فرض می‌کنیم هر R–جبر نوتری گرنشتاین Λ با $d=2$، در (د.ح.۱.ر) صدق کند. آن‌گاه هر R–جبر نوتری گرنشتاین با $d \geq 2$ نیز در (د.ح.۱.ر) صدق می‌کند.

اثبات. از استقراء بر $d \geq 2$ استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم Λ یک R–جبر نوتری گرنشتاین باشد، $d>2$، و M یک Λ–مدول گرنشتاین تزریقی، آرتینی و خود–متعامد باشد. بنابر تعریف جبر نوتری، عضو مرکزی Λ–منظم $x \in \Lambda$ یافت می‌شود و گزاره ۶.۲ نشان می‌دهد برای چنین M و x، $M=xM$. اکنون B را یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول از بعد تزریقی متناهی در نظر می‌گیریم و ادعا می‌کنیم که B به عنوان Λ–مدول نیز دارای بعد تزریقی متناهی است. برای اثبات ادعا، نخست توجه می‌کنیم که بنابر گزاره ۶.۲، $\mathrm{pd}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(B)<\infty$ و لذا تحلیل تصویری

$$0 \longrightarrow Q_n \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

توسط $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول‌ها برای B موجود می‌باشد. برای هر $0 \leq i \leq n$، $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول آزاد F_i چنان موجود است که Q_i جمعوند مستقیمی از F_i باشد. از سوی دیگر، دنباله دقیق $0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{.x} \Lambda \longrightarrow \frac{\Lambda}{x\Lambda} \longrightarrow 0$ از Λ–مدول‌ها نشان می‌دهد که $\mathrm{pd}_\Lambda(\frac{\Lambda}{x\Lambda}) \leq 1$. از اینجا به‌دست می‌آوریم که برای هر $0 \leq i \leq n$، $\mathrm{pd}_\Lambda(F_i) \leq 1$ و لذا $\mathrm{pd}_\Lambda(Q_i) \leq 1$. اکنون دنباله $(*)$ را به‌کار بسته و به‌دست می‌آوریم $\mathrm{pd}_\Lambda(B)<\infty$. اما Λ یک حلقه گرنشتاین است؛ پس $\mathrm{id}_\Lambda(B)<\infty$ و ادعای فوق تأیید می‌گردد.

حال قسمت (۳) از لم ۵.۲ یکریختی

$$\mathrm{Ext}^1_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(B, {}_xM) \simeq \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B,M)$$

از گروه‌های آبلی را فراهم می‌کند که به همراه لم ۳.۲ ایجاب می‌کند $\mathrm{Ext}^1_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}(B, {}_xM)=0$. استفاده مجدد از لم ۳.۲ و گزاره ۶.۲ مؤید این است که ${}_xM$ یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول گرنشتاین تزریقی است.

از سوی دیگر، به منظور اثبات این‌که ${}_xM$ یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول خود–متعامد است، دنباله دقیق $0 \longrightarrow {}_xM \longrightarrow M \xrightarrow{.x} M \longrightarrow 0$ از Λ– مدول‌ها که موجودیت آن پیش‌تر مشخص شد را در نظر بگیرید. با اعمال تابعگر $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,-)$ بر این دنباله، دنباله دقیق

$$\cdots \longrightarrow 0=\mathrm{Ext}^{i-1}_\Lambda(M,M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M, {}_xM) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M)=0 \longrightarrow \cdots$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

حاصل می‌گردد که مستلزم $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, {}_xM) = 0$ به ازای $i \geq 2$ می‌باشد. به علاوه، قسمت (۳) از لم ۵.۲ یکریختی

$$\operatorname{Ext}^i_\Lambda(M, {}_xM) \simeq \operatorname{Ext}^{i-1}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}({}_xM, {}_xM)$$

از گروه‌های آبلی را به دست می‌دهد که منجر به $\operatorname{Ext}^{i-1}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}({}_xM, {}_xM) = 0$ به ازای $i \geq 2$ می‌گردد. لذا $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول ${}_xM$ خود–متعامد است.

همچنین، آرتینی بودن M به عنوان یک Λ–مدول به وضوح متضمّن آرتینی بودن ${}_xM$ به عنوان یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول است. توجه کنید که بنابر گزاره $A.4$ از [۷] و تبصره ۷.۲ بعد کرول حلقه $\frac{R}{xR}$ برابر با $d-1$ است و $0 < d-1 < d$. از این رو، بنابر فرض استقراء، ${}_xM$ یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$–مدول تزریقی خواهد بود. چون $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$ مطابق گزاره ۶.۲ گرنشتاین است، $\operatorname{pd}_{\frac{\Lambda}{x\Lambda}}({}_xM) < \infty$. بنابراین قسمت (۱) از لم ۵.۲ ایجاب می‌کند $\operatorname{pd}_\Lambda(M) < \infty$ و لذا $\operatorname{id}_\Lambda(M) < \infty$. اما بنابر [۱۱، گزاره ۱۰.۱.۲] هر Λ–مدول گرنشتاین تزریقی دارای بعد تزریقی متناهی، تزریقی است و برهان کامل است. $\square$

اکنون که اهمیت مطالعه R–جبرهای نوتری گرنشتاین برای تعیین درستی و یا نادرستی (د.ح.ا.ر) در حالت $d = 2$ روشن گردید، ادامه مقاله حاضر را به بررسی چنین جبرهایی اختصاص می‌دهیم.

لم ۱۰.۲. فرض کنیم جبر نوتری Λ گرنشتاین است. در این صورت برای R–مدول I با بعد تزریقی متناهی، $\operatorname{id}_\Lambda(\Lambda \otimes_R I) < \infty$.

اثبات. از آنجا که R گرنشتاین است، داریم $\operatorname{pd}_R(I) < \infty$ و لذا یک تحلیل تصویری متناهی به صورت

$$0 \longrightarrow q_t \longrightarrow q_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

برای I موجود است. مطابق مفروضات، Λ یک R–مدول کوهن–مکالی بیشین و لذا بنابر [۱۱، نتیجه ۱۱.۵.۴] یک R–مدول گرنشتاین تصویری است. به علاوه، هر R–مدول گرنشتاین تصویری، به لطف [۱۱، نتیجه ۱۰.۳.۱۰]، گرنشتاین یکدست نیز هست. از این رو، Λ یک R–مدول گرنشتاین یکدست خواهد بود و بەویژه، مطابق لم ۳.۲، تابعگر $\operatorname{Tor}^R_i(\Lambda, -)$ به ازای $i \geq 1$ و به ازای R–مدول‌های دارای بعد تزریقی متناهی، پوچ می‌شود. با درنظر گرفتن این موضوع که هر q_j، $0 \leq j \leq t$، دارای بعد تزریقی متناهی است، با اعمال تابعگر $\Lambda \otimes_R -$ بر دنباله فوق‌الذکر، دنباله دقیق

$$0 \longrightarrow \Lambda \otimes_R q_t \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda \otimes_R q_0 \longrightarrow \Lambda \otimes_R I \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

از Λ– مدول‌ها تولید می‌شود.

حال نشان می‌دهیم برای $0 \leq j \leq t$، $\Lambda \otimes_R q_j$ یک Λ–مدول تصویری است. با به‌کارگیری یکریختی الحاقی، هم‌ارزی

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_R q_j, -) &\simeq \operatorname{Hom}_R\Big(q_j, \operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda, -)\Big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_R(q_j, -) \end{aligned}$$

از تابعگرها ایجاد می‌گردد. از آنجا که q_j یک R–مدول تصویری است، تابعگر $\operatorname{Hom}_R(q_j, -)$، و بنابر هم‌ارزی فوق، تابعگر $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_R q_j, -)$ دقیق است که معادل با تصویری بودن Λ–مدول $\Lambda \otimes_R q_j$ می‌باشد.

لذا برای $0 \leq j \leq t$، Λ– مدول $\Lambda \otimes_R q_j$ با توجه به گرنشتاین بودن Λ، دارای بعد تزریقی متناهی می‌باشد. اکنون دنباله دقیق $(*)$ حکم را ثابت می‌کند.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

□

اکنون می‌توانیم یکی از نتایج اصلی این مقاله را ارائه دهیم. یادآوری می‌گردد که نماد $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ نشان‌دهنده ارتفاع ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از حلقه R است. همچنین $R_{\mathfrak{p}}$ را موضعی شده حلقه R در ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ گرفته و قرارداد می‌کنیم $\Lambda_{\mathfrak{p}} := \Lambda \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$.

گزاره ۲.۱۱. فرض کنیم Λ یک R–جبر نوتری گرنشتاین باشد و $d = ۲$. همچنین فرض کنیم Λ چنان است که Λ–مدول‌های گرنشتاین تزریقی با تولید متناهی یافت می‌شوند. در این صورت به ازای هر چنین مدول M و هر ایده‌آل اول نابیشین $\mathfrak{p}$ از R، $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda_{\mathfrak{p}}, M) = ۰$.

اثبات. نخست توجه کنید که بنابر یکریختی الحاقی،

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda_{\mathfrak{p}}, M) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda \otimes_R R_{\mathfrak{p}}, M)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_R\Big(R_{\mathfrak{p}}, \mathrm{Hom}_{\Lambda}(\Lambda, M)\Big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, M).\end{aligned}$$

پس کافی است نشان داده شود $\mathrm{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, M) = ۰$. چون R گرنشتاین است، یکی از قضایای کلاسیک در جبر جابجایی [۷، قضیه ۳.۳.۱۰] تحلیل تزریقی کمینه R را به صورت

$$۰ \longrightarrow R \longrightarrow I^{۰} \longrightarrow I^{۱} \longrightarrow \mathrm{E}(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow ۰ \qquad (*)$$

توصیف می‌کند که $I^{۰} = \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=۰} \mathrm{E}(R/\mathfrak{q})$ و $I^{۱} = \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=۱} \mathrm{E}(R/\mathfrak{q})$ و $\mathrm{E}(R/\mathfrak{q})$ معرف پوش تزریقی R–مدول $R/\mathfrak{q}$ است. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R را چنان بگیرید که $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = ۰$. آن‌گاه بنا به [۱۱، قضیه ۳.۳.۸]، به‌ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{q}$ با ارتفاع ۱، $\mathrm{E}(R/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}} = ۰$. همچنین اگر $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از R باشد که $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = ۰$ آن‌گاه هیچ یک از شمول‌های $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ یا $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ برقرار نخواهد بود، پس $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}')_{\mathfrak{p}} = ۰$. به‌طور مشابه، $\mathrm{E}(R/\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}} = ۰$. از این رو، با موضعی سازی دنباله $(*)$ در ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ و استفاده دوباره از [۱۱، قضیه ۳.۳.۸]، یکریختی R–مدولی $R_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$ به دست می‌آید. این یکریختی بیان می‌کند که $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$ یک R–مدول یکدست نیز هست. حال شمول $R/\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})$ را درنظر بگیرید. چون $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$ یک R–مدول یکدست است داریم

$$\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}) \otimes_R R/\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{E}(R/\mathfrak{p}) \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{m}).$$

اما بنا به [۱۱، لم ۹.۴.۵]، $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}) \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{m}) = ۰$ و درنتیجه $\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}) \otimes_R R/\mathfrak{m} = ۰$. همچنین

$$R/\mathfrak{m} \simeq \mathrm{Hom}_R\Big(R/\mathfrak{m}, \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})\Big),$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

و بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, R/\mathfrak{m}) &\simeq \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}), R/\mathfrak{m}\Big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{E}(R/\mathfrak{p}), \mathrm{Hom}_R\Big(R/\mathfrak{m}, \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})\Big)\Big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{E}(R/\mathfrak{p})\otimes_R R/\mathfrak{m}, \mathrm{E}(R/\mathfrak{m})\Big)\\ &= ۰.\end{aligned}$$

اما M یک Λ–مدول گرنشتاین تزریقی و با تولید متناهی است. چنین مدولی بنابر [۹، لم ۴.۱۰] دارای طول متناهی بر Λ و بنابراین مطابق [۲، گزاره ۴.۲] دارای طول متناهی بر R می‌باشد. بنابراین سری ترکیبی

$$۰ = M_۰ \subsetneqq M_۱ \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_{t-۱} \subsetneqq M_t = M$$

برای M موجود است؛ به ویژه برای $۱ \leq i \leq t$،

$$\frac{M_i}{M_{i-۱}} \simeq R/\mathfrak{m}.$$

بنابر آنچه در بند بالا گفته شد، $\mathrm{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, R/\mathfrak{m}) = ۰$. پس با به‌کارگیری چندباره تابعگر $\mathrm{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, -)$ بر دنباله‌های دقیق

$$۰ \longrightarrow M_{i-۱} \longrightarrow M_i \longrightarrow \frac{M_i}{M_{i-۱}} \longrightarrow ۰$$

به ازای $۲ \leq i \leq t$ به دست می‌آوریم $\mathrm{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}, M) = ۰$.

اکنون فرض کنید $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = ۱$. موضعی‌سازی دنباله $(*)$ در $\mathfrak{p}$ به همراه استفاده مجدد از [۱۱، قضیه ۳.۳.۸] منجر به تولید دنباله دقیق

$$۰ \longrightarrow R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}\\ ht(\mathfrak{q})=۰}} \mathrm{E}(R/\mathfrak{q}) \longrightarrow \mathrm{E}(R/\mathfrak{p}) \longrightarrow ۰$$

از R–مدول‌ها می‌گردد. همچنین بنابر آنچه در برهان لم ۱۰.۲ گفته شد، Λ یک R–مدول گرنشتاین یکدست است و لم ۳.۲ نشان می‌دهد که برای $i \geq ۱$، $\mathrm{Tor}_i^R\Big(\Lambda, \mathrm{E}(R/\mathfrak{p})\Big) = ۰$. لذا با اعمال تابعگر $\Lambda \otimes_R -$ بر دنباله اخیر، دنباله دقیق کوتاه

$$۰ \longrightarrow \Lambda_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}\\ ht(\mathfrak{q})=۰}} \Big(\Lambda \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{q})\Big) \longrightarrow \Lambda \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{p}) \longrightarrow ۰ \qquad (\dagger)$$

از Λ–مدول‌ها ایجاد می‌گردد. توجه کنید که برای ایده‌آل اول $\mathfrak{q}$ از R با ارتفاع صفر، بنابر آنچه پیش‌تر گفته شد،

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Lambda\Big(\Lambda\otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{q}), M\Big) &\simeq \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{E}(R/\mathfrak{q}), \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, M)\Big)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{E}(R/\mathfrak{q}), M\Big)\\ &= ۰,\end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

که در اینجا از یکریختی الحاقی نیز استفاده شده است. به علاوه، چون $\Lambda_{\mathfrak{q}}$ یک Λ–مدول یکدست است، گرنشتاین بودن Λ ایجاب می‌کند $\mathrm{id}_\Lambda(\Lambda_{\mathfrak{q}}) < \infty$ و بنابر لم ۳.۲ داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_\Lambda\Big(\Lambda \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{q}), M\Big) &\simeq \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda \otimes_R R_{\mathfrak{q}}, M) \\ &\simeq \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\Lambda_{\mathfrak{q}}, M) \\ &= 0. \end{aligned}$$

از این رو با اعمال تابعگر $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, M)$ بر دنباله $(\dagger)$ و به کار بستن مطالب پاراگراف فوق، یکریختی

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda_{\mathfrak{p}}, M) \simeq \mathrm{Ext}^1_\Lambda\Big(\Lambda \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{p}), M\Big)$$

حاصل می‌گردد. اما بنابر لم ۱۰.۲، Λ–مدول $\Lambda \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{p})$ دارای بعد تزریقی متناهی است. پس با اعمال لم ۳.۲ به دست می‌آوریم $\mathrm{Ext}^1_\Lambda\Big(\Lambda \otimes_R \mathrm{E}(R/\mathfrak{p}), M\Big) = 0$ که نتیجه مطلوب را به دست می‌دهد. □

تبصره ۱۲.۲. به سادگی می‌توان مثال‌هایی از جبرهای نوتری که مدول‌های گرنشتاین تزریقی با تولید متناهی روی آنها یافت می‌شوند، ساخت. به عنوان نمونه، در [۱۲، مثال ۳.۱۵] چنین جبری ارائه شده است.

اکنون می‌توانیم قضیه اصلی مقاله را بیان نماییم و اثبات کنیم.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنیم Λ یک R–جبر نوتری گرنشتاین باشد و $d \geq 2$. آنگاه Λ در (د.ح.ا.ر) برای مدول‌های با طول متناهی صدق می‌کند.

اثبات. از استقراء بر d استفاده می‌کنیم. نخست توجه می‌کنیم که حکم قضیه برای $d = 2$ از گزاره ۱۱.۲ و [۱۲، قضیه ۲.۱۰] به دست می‌آید. پس فرض کنیم Λ یک R– جبر نوتری گرنشتاین باشد و $d > 2$. همچنین M را یک Λ– مدول گرنشتاین تزریقی، آرتینی و خود–متعامد از طول متناهی در نظر بگیرید. همان‌طور که در برهان گزاره ۹.۲ گفته شد، می‌توان عنصر مرکزی Λ– منظم $x \in \Lambda$ را اختیار کرد و نشان داد $_xM$ یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$– مدول گرنشتاین تزریقی، آرتینی، و خود–متعامد است. به علاوه، از آنجا که زیرمدول $_xM$ از Λ– مدول M دارای طول متناهی است، به وضوح به عنوان یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$– مدول نیز دارای طول متناهی می‌باشد. لذا مطابق فرض استقراء، $_xM$ یک $\frac{\Lambda}{x\Lambda}$– مدول تزریقی است. اکنون استدلال ارائه شده در برهان گزاره ۹.۲ را مجدداً به کار بسته و تزریقی بودن M را به‌دست می‌آوریم. □

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، صدق کردن Λ در (د.ح.ا.ر)، موجب برقراری (ح.ا.ر) برای Λ می‌گردد. لذا نتیجه ذیل را می‌توان از قضیه ۱۳.۲ استخراج کرد.

نتیجه ۱۴.۲. فرض می‌کنیم Λ یک R–جبر نوتری گرنشتاین باشد و $d \geq 2$. آنگاه Λ در (ح.ا.ر) برای مدول‌های با طول متناهی صدق می‌کند.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

مراجع

[1] T. Araya, The Auslander-Reiten conjecture for Gorenstein rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009) 1941–1944.

[2] M. Auslander, Functors and morphisms determined by objects, *Representation theory of algebras (Proc. Conf., Temple Univ., Philadelphia, Pa.)*, (1976) 1-244.

[3] M. Auslander and M. Bridger, Stable module theory, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **94**, Providence, R.I., 1969.

[4] M. Auslander and I. Reiten, On a generalized version of the Nakayama conjecture, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **52** (1975) 69–74.

[5] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, in: Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[6] A. Bahlekeh and Sh. Salarian, On the Auslander-Reiten conjecture for Cohen-Macaulay rings and path algebras, *Comm. Alg.*, **45** (2017) 121–129.

[7] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings,* revised edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **39**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[8] O. Celikbas and R. Takahashi, Auslander-Reiten conjectuer and Auslander-Reiten duality, *J. Algebra*, **382** (2013) 100–114.

[9] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, On Gorenstein injective modules, *Comm. Alg.*, **21** (1993) 3489–3501.

[10] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, Gorenstein injective and projective modules, *Math. Z.*, **220** (1995) 611–633.

[11] E. E. Enochs and O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra,* De Gruyter Exp. Math., **30**, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2000.

[12] H. Eshraghi and A. Mahin Fallah, Auslander-Reiten conjecture in a dual vein, *J. Algebras and Representation Theory*, **24** (2021) 1279–1294.

[13] D. Happel, *Homological conjectures in representation theory of fnite dimensional algebras*, Sherbrook Lecture Notes Series, (1991).

[14] C. Huneke and G. J. Leuschke, On a conjecture of Auslander and Reiten, *J. Algebra*, **275** (2004) 781–790.

[15] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Revised edition. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1974.

[16] T. Nakayama, On algebras with complete homology, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **22** (1958) 300–307.

[17] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic press, 1979.

[18] M. Sega, Vanishing of cohomology over Gorenstein rings of small codimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131(8)** (2003) 2313-2323.

[19] H. Tachikawa, *Quasi-Frobenius rings and generalizations. QF-3 and QF-1 rings*, Lecture Notes in Mathematics Series Profile, **351**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, (1973) 172 p.

حسین اشراقی
گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
eshraghi@kashanu.ac.ir

حسین اشراقی متولد سال ۱۳۶۱ است. وی در سال ۱۳۸۶ در مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض از دانشگاه خوارزمی (تربیت معلم تهران) و در سال ۱۳۹۱ در مقطع دکتری رشته ریاضی محض-جبر از دانشگاه اصفهان فارغ‌التحصیل شد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516

Auslander-Reiten Conjecture for Gorenstein rings of Krull dimension at least 2

Hossein Eshraghi

Abstract: Auslander-Reiten Conjecture is one of the most important and long-standing conjectures in representation theory of finite dimensional algebras. It is known to be in close relationship with a string of homological conjectures on top of which lies the well-known Finitistic Dimension Conjecture. Recently, a dual version of Auslander-Reiten conjecture has been posed. This dual statement deserves further study from the point of view that its validity implies the validity of the conjecture itself. This paper is devoted to deal with this Dual Auslander-Reiten Conjecture. We discuss it for Gorenstein rings of Krull dimension at least 2. To this end, we firstly show that it suffices to focus only on the case where the Krull dimension is exactly 2. Then, switching to such rings, we show that this conjecture holds for modules of finite length over Gorenstein rings of Krull dimension at least 2.

Keywords: Auslander-Reiten Conjecture (Dual of), Noetherian Algebra, Gorenstein Module.

Hossein Eshraghi

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran.

Email: eshraghi@kashanu.ac.ir

Communicated by Javad Asadollahi.

Article Type: Resaerhc Paper.

Received: 16/07/2022, Accepted: 12/09/2022.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134465.1516