

زیررده‌های توابع ستاره‌گون و محدب مرتبط با دامنه محدود به نفروئید

ولی سلطانی مسیح

چکیده. یکی از مباحث بسیار مهم و جذاب در نظریه توابع هندسی، رده‌های توابع ستاره‌گون و محدب ما-میندا بر قرص واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ می‌باشند که به کمک رابطه تبعیت تعریف شده‌اند. فرض می‌کنیم A رده توابع تحلیلی بر قرص واحد $\mathbb{D}$ در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ که با $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ نرمالیزه شده و رده‌های $ST_N(s)$ و $CV_N(s)$ نمایش خانواده‌ای از توابع ستاره‌گون و محدب ما-میندا A باشد $f \in A$ باشند به طوری که برای هر $z \in \mathbb{D}$ کمیت‌های $zf'(z)/f(z)$ و $zf''(z)/f'(z) + 1$ در داخل دامنه کران‌دار به ناحیه نفروئید

$$\left[(u-1)^2 + v^2 - 4s^2 \right]^3 = 108s^4 v^2, \quad 0 < s \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

باشند. در این مقاله، برخی خواص و ویژگی‌های رده‌های $ST_N(s)$ و $CV_N(s)$ تعریف‌شده از نوع ما-میندا، مانند ساختار توابع در این رده‌ها، توابع اکستریمال، قضیه رشد، دگرشکلی و قضیه دوران را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. مقدمه

فرض کنیم $\mathbb{C}$ صفحه مختلط، $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ قرص واحد باز و مجموعه $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ مرز قرص واحد باز باشد. رده توابع تحلیلی $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ را با نماد $\mathcal{H}$ نمایش می‌دهیم. رده توابع تحلیلی $f \in \mathcal{H}$ ، که با $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ نرمالیزه شده باشند، را با A نمایش می‌دهیم. اگر $f \in A$ ، آن‌گاه

$$(1.1) \quad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

تابع تحلیلی f را یک‌به‌یک گویند، هرگاه، برای هر $w_0 \in \mathbb{C}$ ، معادله $w_0 = f(z)$ دارای حداکثر یک جواب در $\mathbb{D}$ باشد. همچنین تابع $f \in A$ به فرم (۱.۱) را تکارز گوئیم هرگاه یک‌به‌یک باشد. رده توابع تکارز در مجموعه A را با نماد S نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. نگاشت $f \in \mathcal{H}$ را همدیس [۲۳] گوئیم، هرگاه مشتق آن در هیچ نقطه از دامنه صفر نشود. نگاشت همدیس وقتی نقطه تقاطع دو منحنی را از دامنه انتقال می‌دهد، زاویه بین دو منحنی را به همان اندازه به برد انتقال داده و جهت مثلثاتی آن را نیز به همان صورت حفظ می‌کند. بنابراین نگاشت همدیس حافظ زاویه و جهت می‌باشد. نگاشت $z \rightarrow \exp z$ در هر نقطه $z \in \mathbb{C}$ همدیس است.

عبارات و کلمات کلیدی: توابع تکارز، توابع ستاره‌گون و محدب، تبعیت، دامنه محدود به نفروئید.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوریایولی

نوع مقاله: ترویجی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۰۶

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.134111.1511

تعریف ۲.۱. [۳] نگاشت $p \in \mathcal{H}$ را کاراتئودوری^۱ گویند هرگاه $p(0) = 1$ و جزء حقیقی آن، $\Re\{p(z)\}$ ، برای هر $z \in \mathbb{D}$ مثبت باشد. رده توابع کاراتئودوری را با $\mathcal{P}$ نمایش می‌دهیم و داریم

$$\mathcal{P} = \left\{ p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots, \Re\{p(z)\} > 0, z \in \mathbb{D} \right\}.$$

تعریف ۳.۱. [۳] تابع f را مطیع^۲ تابع g گوئیم (یا تابع f از تابع g تبعیت می‌کند) و می‌نویسیم $f \prec g$ ، اگر تابع تحلیلی w روی $\mathbb{D}$ چنان وجود داشته باشد به طوری که $w(0) = 0$ و برای هر $z \in \mathbb{D}$ داشته باشیم $|\omega(z)| < 1$ و $f(z) = g(\omega(z))$. اگر تابع g تک‌ارز باشد، تابع f مطیع تابع g است، اگر و تنها اگر $f(0) = g(0)$ و $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$.

نظریه توابع هندسی شاخه‌ای از آنالیز مختلط است، که خواص هندسی نگاره تابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهد. به عبارت دیگر خواص هندسی مجموعه $f(\mathbb{D})$ را مورد شرح و توصیف قرار می‌دهد. نظریه توابع هندسی در طیف وسیعی بیشتر با ویژگی‌های هندسی توابع تک‌ارز سروکار دارد. لذا چندین رده مرتبط با توابع کاراتئودوری به طور خاص در جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله رده‌های معروف و مشهور، رده‌های توابع ستاره‌گون و محدب می‌باشند که توسط روبرتسون در [۱۶] معرفی و مورد بررسی قرار گرفته‌اند که در ادامه تعریف آن‌ها بیان شده است. همچنین قضیه معروف الکساندر^۳، [۳] که رابطه میان رده‌های CV و ST را بیان می‌کند، نیز آورده شده است.

تعریف ۴.۱. [۳] تابع $f \in \mathcal{A}$ را ستاره‌گون نسبت به نقطه $z_0 = f(z_0)$ می‌نامیم، هرگاه برد آن یعنی $f(\mathbb{D})$ ، نسبت به w_0 ستاره‌گون باشد. از نظر هندسی، هر نقطه از برد تابع f را می‌توان با پاره‌خطی به w_0 وصل نمود به طوری که تمام پاره‌خط در برد واقع شود. زیررده تمام توابع ستاره‌گون نسبت به 0 در S را با ST نشان می‌دهیم. زیررده $ST(\alpha)$ از ST شامل توابع ستاره‌گون از مرتبه α توسط روبرتسون^۴ در [۱۶] معرفی شد. برای $0 \leq \alpha < 1$ ، تابع $f \in \mathcal{A}$ را ستاره‌گون از مرتبه α می‌نامیم هرگاه

$$f \in ST(\alpha) \iff \Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

ستاره‌گونی خاصیت ارثی برای نگاشت‌های همدیس است. یعنی اگر f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک‌ارز با $f(0) = 0$ و $\mathbb{D}$ را به ناحیه ستاره‌گونی بنگارد، آن‌گاه نگاره هر زیرقرص $|z| < r < 1$ نیز ستاره‌گون است [۲۳].

تعریف ۵.۱. [۳] تابع $f \in \mathcal{A}$ را محدب می‌نامیم، هرگاه برد آن یعنی $f(\mathbb{D})$ ، محدب باشد. از نظر هندسی، هر دو نقطه از برد تابع f را می‌توان با پاره‌خطی به هم وصل نمود به طوری که تمام پاره‌خط در برد واقع شود. زیررده تمام توابع محدب در S را با CV نشان می‌دهیم. زیررده $CV(\alpha)$ از CV شامل توابع محدب از مرتبه α توسط روبرتسون در [۱۶] معرفی شد. برای $0 \leq \alpha < 1$ ، تابع $f \in \mathcal{A}$ را محدب از مرتبه α می‌نامیم هرگاه

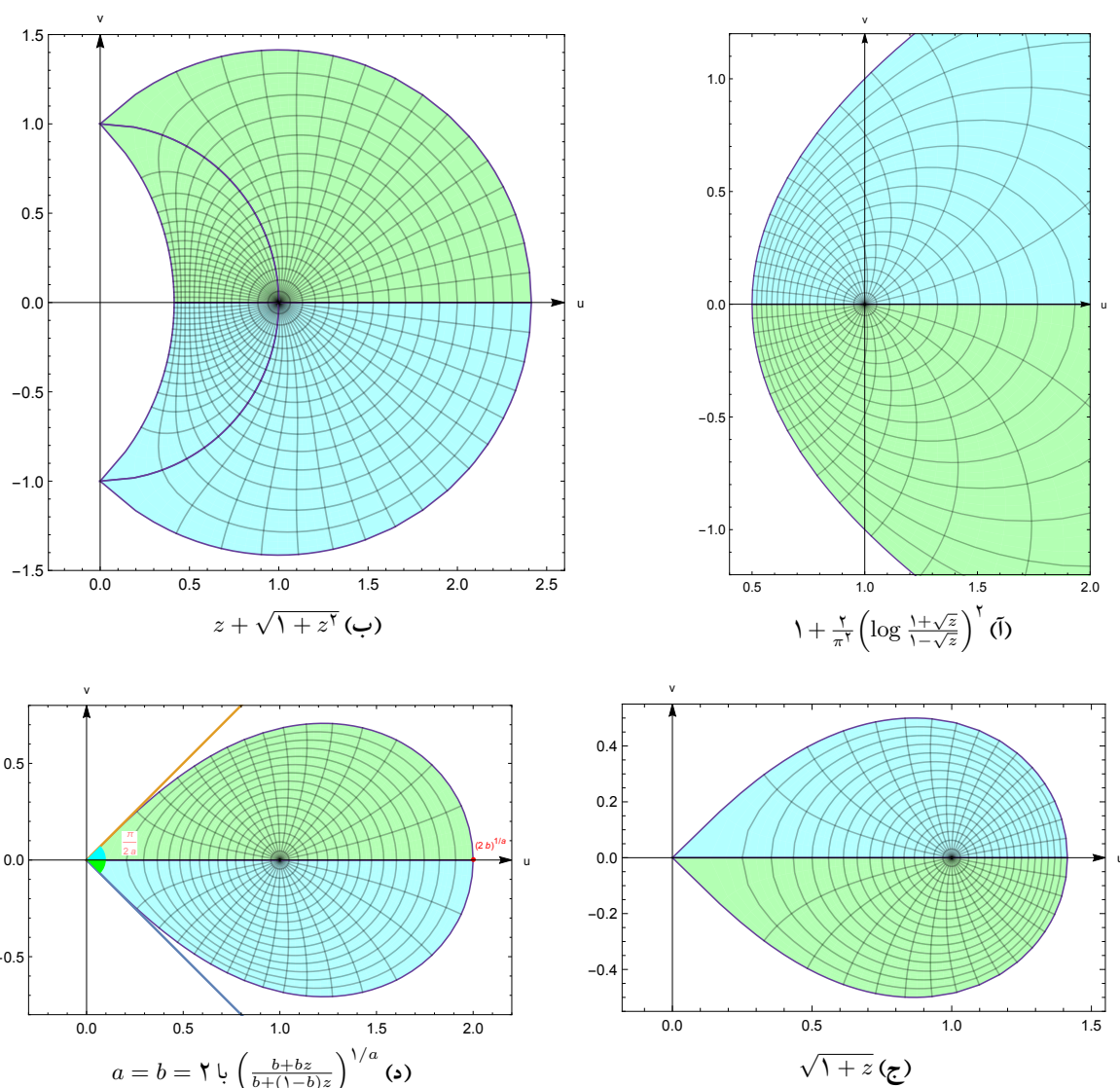
$$f \in CV(\alpha) \iff \Re \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

همانند ستاره‌گونی، تحدبی نیز خاصیت ارثی برای نگاشت‌های همدیس است. یعنی اگر f در $\mathbb{D}$ تحلیلی و تک‌ارز با $f(0) = 0$ و $\mathbb{D}$ را به ناحیه محدب بنگارد، آن‌گاه نگاره هر زیرقرص $|z| < r < 1$ نیز محدب است [۲۳].

قضیه ۶.۱. (الکساندر [۳]) فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$. در این صورت $f \in CV$ ، اگر و تنها اگر برای هر $z \in \mathbb{D}$ $zf'(z) \in ST$.

در سال‌های اخیر بیشتر تمرکز و توجه محققین به رده‌های مرتبط با دامنه‌های مخروطی (شکل ۱^۵)، لمینسکات برنولی^۵، ماه مانند

^۱Carathéodory ^۲Subordinate ^۳Alexander ^۴Robertson ^۵Lemniscate of Bernoulli



شکل ۱. نگاره $\mathbb{D}$ تحت نگاشت‌های مختلف

(شکل ۱ ب)، شبه‌برگ (شکل‌های ۱ ج و ۱ د) و غیره که در نیم‌صفحه راست صفحه مختلط و به کمک تبعیت تعریف شده باشند، جلب شده است. رجوع شود به [۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۲].

ما-میندا^۶ [۱۴] نمایش یکپارچه کردن برخی از زیررده‌های ستاره‌گون و محدب را با اصل تبعیت به‌دست آوردند. بدین صورت که فرض می‌کنیم φ تابع تحلیلی تک‌ارز با جزء حقیقی مثبت $(\Re\{\varphi(z)\} > 0)$ باشد که با شرایط $\varphi(0) = 1$ و $\varphi'(0) > 0$ نرمال شده و نگاشت φ قرص $\mathbb{D}$ را به ناحیه‌ای ستاره‌گون نسبت به $\varphi(0) = 1$ و متقارن نسبت به محور طول‌ها بنگارد. در نتیجه آن نگاشت φ عضوی از رده‌ی توابع کاراتئودوری است و داریم $0 < \varphi'(0) \leq 2$. این رده از توابع ما-میندا را با نماد Ξ نمایش

^۶Ma-Minda

می‌دهیم. ما-میندا زیررده‌های توابع ستاره‌گون و محدب را به صورت زیر معرفی نمودند:

$$ST(\varphi) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z), z \in \mathbb{D} \right\},$$

$$CV(\varphi) := \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z), z \in \mathbb{D} \right\}.$$

رده $ST(\varphi)$ را رده توابع ستاره‌گون ما-میندا و $CV(\varphi)$ را رده توابع محدب ما-میندا می‌نامیم. رابطه الکساندر برای رده‌های توابع ستاره‌گون و محدب ما-میندا برقرار است. یعنی $f \in CV(\varphi)$ اگر و تنها اگر $zf' \in ST(\varphi)$. برای نگاشت φ رده $\mathcal{P}(\varphi)$ ، شامل توابع تحلیلی $p \in \mathcal{H}$ با شرط $p(\circ) = 1$ و $p(\mathbb{D}) \subset \varphi(\mathbb{D})$ (یا برحسب تبعیت، $p \prec \varphi$) تعریف می‌کنیم. رده توابع ستاره‌گون و محدب ما-میندا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$f \in ST(\varphi) \iff \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}(\varphi), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

$$f \in CV(\varphi) \iff 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}(\varphi), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

برای انتخاب‌های خاص $\varphi \in \Xi$ ، زیررده‌های شناخته‌شده از توابع ستاره‌گون و محدب که توسط محققین و پژوهش‌گرها مورد بررسی قرار گرفته است، نگاشت تحلیلی φ تک‌ارز می‌باشد. در اکثر موارد نام مربوط به رده‌های $ST(\varphi)$ و $CV(\varphi)$ به نگاره هندسی قرص واحد باز $\mathbb{D}$ تحت کمیت $zf'(z)/f(z)$ و $1 + zf''(z)/f'(z)$ برمی‌گردد.

برای این منظور تلاش می‌کنیم با تعریف زیرمجموعه جدید $\mathcal{P}$ مربوط به دامنه‌های محدود شده توسط یک نفروئید^۷

$$\partial N(s) = \left\{ u + iv : [(u-1)^2 + v^2 - 4s^2]^3 = 108s^4v^2, 0 < s \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \right\},$$

که متناظر با نگاره هندسی $\varphi(\mathbb{D})$ (نگاشتی که در ادامه تعریف خواهد شد) می‌باشد، رده‌های توابع ستاره‌گون و محدب را مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم. به عبارت دیگر رده‌های توابع شامل $f \in \mathcal{A}$ که برای هر $z \in \mathbb{D}$ ، کمیت‌های $zf'(z)/f(z)$ و $1 + zf''(z)/f'(z)$ در درون ناحیه نفروئید $\partial N(s)$ قرار دارند، را معرفی می‌کنیم.

در ادامه می‌خواهیم یک تابع تحلیلی پیدا کنیم که قرص واحد باز $\mathbb{D}$ را بر روی یک دامنه محدود شده توسط نفروئید $\partial N(s)$ بنگارد و زیرخانواده‌ای از $\mathcal{P}$ وابسته به این دامنه را تعریف و مورد بررسی قرار دهیم. به عنوان یک گسترش طبیعی از این تحقیق و بررسی، ما زیرخانواده‌های $ST_N(s)$ از توابع ستاره‌گون و $CV_N(s)$ از توابع محدب محدود شده توسط نفروئید $\partial N(s)$ را تعریف می‌کنیم و تلاش می‌کنیم شرط کافی برای اینکه نگاشت $f \in \mathcal{A}$ عضوی از رده‌های $ST_N(s)$ و $CV_N(s)$ باشد را ارائه بدهیم. همچنین به دست آوردن توابع اکسترمال^۸ این رده‌ها نیز از اهمیت زیادی برخوردار است.

۲. رده $\mathcal{P}(\mathcal{N}_s)$ و خواص آن

در این بخش شرح مفصلی از یک نگاشت تحلیلی ارائه شده است که قرص واحد $\mathbb{D}$ را روی یک دامنه محدود شده توسط $\partial N(s)$ که در نیم صفحه راست قرار دارد، می‌نگارد. فرض کنیم

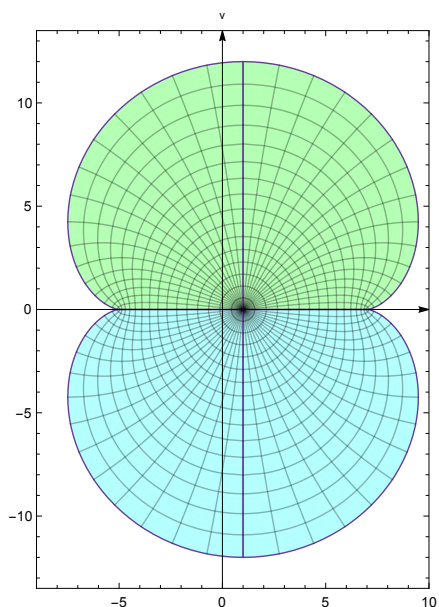
$$(1.2) \quad \mathcal{N}_s(z) = 1 + 3sz - sz^3 \quad (s > 0, z \in \mathbb{D}).$$

⁷Nephroid ⁸Extremal

طبق [۲۱]، تابع

$$\frac{\mathcal{N}_s(z) - 1}{3s} = z - \frac{1}{3}s^3 z^3 \quad (z \in \mathbb{D}),$$

بر قرص یکه‌ی $\mathbb{D}$ ستاره‌گون است. بنابراین تابع $\mathcal{N}_s(z)$ با توجه به مثبت بودن s در $\mathbb{D}$ ستاره‌گون و به تبع آن تک‌ارز می‌باشد. ذکر این نکته لازم است که برای مقدار $s = 1/3$ ، تابع $\mathcal{N}_{1/3}$ در مقاله [۲۱] به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که نگاشت $\mathcal{N}_s(z)$ دایره واحد $\mathbb{T}$ را بروی $\partial\mathbb{N}(s)$ می‌نگارد (شکل ۲).



شکل ۲. نگاره $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $\mathcal{N}_s(z)$ برای $s = 3$.

در واقع با قرار دادن $z = e^{i\theta}$ که در آن $0 \leq \theta < 2\pi$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_s(e^{i\theta}) &= 1 + 3se^{i\theta} - se^{3i\theta} \\ &= 1 + 3s \cos \theta - s \cos 3\theta + i(s \sin \theta - s \sin 3\theta). \end{aligned}$$

مشابه [۲۱، قضیه ۱.۱]، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} u &:= \Re \left\{ \mathcal{N}_s(e^{i\theta}) \right\} = 1 + 3s \cos \theta - s \cos 3\theta, \\ v &:= \Im \left\{ \mathcal{N}_s(e^{i\theta}) \right\} = 3s \sin \theta - s \sin 3\theta = 4s \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

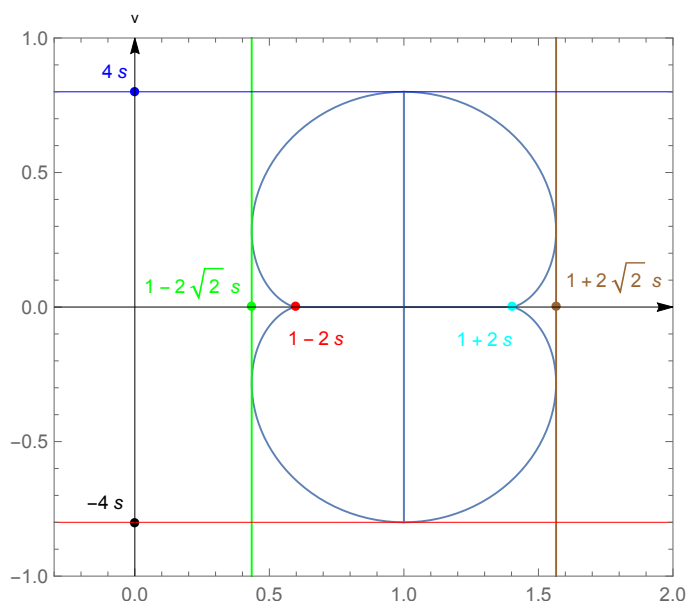
با استفاده از معادلات اخیر داریم

$$\begin{aligned} (u-1)^2 + v^2 &= 10s^2 - 6s^2 \cos 2\theta = 4s^2 - 12s^2 \sin^2 \theta \\ &= 4s^2 - 12s^2 \left(\frac{v}{4s} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

در نهایت می‌توان نوشت

$$\left[(u-1)^2 + v^2 - 4s^2 \right]^3 = 108s^4 v^2.$$

نگاشت $\Re \{ \mathcal{N}_s(e^{i\theta}) \}$ بیشترین مقدار خود $1 + 2\sqrt{2}s$ را در نقاط $\pi/4$ و $7\pi/4$ می‌گیرد و کمترین مقدار خود $1 - 2\sqrt{2}s$ را در نقاط $3\pi/4$ و $5\pi/4$ اختیار می‌کند. (شکل ۳).



شکل ۳. موقعیت بیشترین و کمترین مقادیر نگاشت‌های $\Re\{\mathcal{N}_s(e^{i\theta})\}$ و $\Im\{\mathcal{N}_s(e^{i\theta})\}$ برای $s = 0$.

نتایج به‌دست آمده بالا را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد.

قضیه ۱.۲. [۲۱] برای نگاشت $\mathcal{N}_s$ تعریف‌شده با رابطه (۱.۲) داریم:

$$1 - 2\sqrt{2}s < \Re\{\mathcal{N}_s(z)\} < 1 + 2\sqrt{2}s, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$-4s < \Im\{\mathcal{N}_s(z)\} < 4s, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$\mathcal{N}(s) := \mathcal{N}_s(\mathbb{D}) = \left\{ u + iv : \left[(u-1)^2 + v^2 - 4s^2 \right]^3 < 16s^4 v^2, s > 0 \right\}.$$

از قضیه ۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت در صورتی نگاشت $\mathcal{N}_s$ در رده $\mathcal{P}$ قرار دارد که $0 < s \leq \sqrt{2}/4$. با قرار دادن $g(z) := (N_s(z) - 1)/(3s)$ برای هر $z \in \mathbb{D}$ نتیجه می‌گیریم

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{3 - 3z^2}{3 - z^2} =: w.$$

محاسبات همانند مقاله [۲۱، صفحه ۴]، نشان می‌دهد که برای عبارت $z^2 = (1-w)/(1-(1/3)w)$ داریم $\Re\{w\} > 0$. بنابراین $g \in ST$ و نگاشت $\mathcal{N}_s$ ستاره‌گون نسبت به نقطه ۱ است.

چون برای $0 < s \leq \sqrt{2}/4$ نگاشت $\mathcal{N}_s$ در $\mathbb{D}$ تک‌ارز و ستاره‌گون نسبت به ۱ و $\mathcal{N}_s(0) = 1$ دارای جزء حقیقی مثبت است و همچنین دامنه $\mathcal{N}(s) = \mathcal{N}_s(\mathbb{D})$ متقارن نسبت به محور حقیقی است و در شرط نرمالیزه $\mathcal{N}_s(0) = 1$ و $\mathcal{N}'_s(0) = 3s > 0$ صدق می‌کند، بنابراین $ST(\mathcal{N}_s)$ و $\mathcal{CV}(\mathcal{N}_s)$ رده‌های از توابع ستاره‌گون و محدب از نوع ما-میندا وابسته به تابع کاراتئودوری $\mathcal{N}_s$ خوش‌تعریف هستند.

تعریف ۲.۲. رده توابع $\mathcal{H}$ که $p(0) = 1$ و برای هر $z \in \mathbb{D}$ $p(z) \prec \mathcal{N}_s(z)$ را با نماد $\mathcal{P}(\mathcal{N}_s)$ نمایش می‌دهیم و داریم

$$\mathcal{P}(\mathcal{N}_s) = \{p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots, p(z) \prec \mathcal{N}_s(z), z \in \mathbb{D}\} \subset \mathcal{P}.$$

قضیه ۳.۲. [۲۱] نگاشت $\mathcal{N}_s(z)$ قرص $|z| < 1/\sqrt{3}$ را بر دامنه محدب می‌نگارد. همچنین نگاشت $\mathcal{N}_s$ در $\mathbb{D}$ محدب نیست.

اثبات. قرار می‌دهیم $g(z) := (\mathcal{N}_s(z) - 1)/(3s)$. حال با استفاده از [۲۱، لم ۱.۲] حکم برقرار است. طبق [۱۴، قضیه ۲]، نتیجه می‌شود که

$$(2.2) \quad \mathcal{N}_s(-r) \leq |\mathcal{N}_s(z)| \leq \mathcal{N}_s(r) \quad \left(|z| = r < \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

برای $z_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ عبارت

$$1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)} = \frac{1 - 3z^2}{1 - z^2}$$

□

برابر صفر است و لذا نگاشت $\mathcal{N}_s$ در $\mathbb{D}$ محدب نیست.

۳. رده‌های $ST_N(s)$ و $CV_N(s)$

در این بخش مفهوم ستاره‌گون و محدب بودن مربوط به دامنه‌های محدود شده توسط نفروئید $\partial N(s)$ را معرفی و بررسی می‌کنیم. ما نشان می‌دهیم که چگونه خواص دامنه‌های معرفی شده توسط $N(s)$ (مانند ستاره‌گون و محدب) و رده‌های $\mathcal{P}(\mathcal{N}_s)$ بر ویژگی‌های آن تأثیر می‌گذارند.

تعریف ۱.۳. قرار می‌دهیم $ST_N(s)$ ، نمایش خانواده‌ای از رده‌های S شامل توابع f که در شرط

$$(1.3) \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \mathcal{N}_s(z), \quad \left(0 < s \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, z \in \mathbb{D} \right)$$

و $CV_N(s)$ رده‌های توابع تحلیلی مانند f باشند به‌طوری‌که در شرط

$$(2.3) \quad 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \mathcal{N}_s(z), \quad \left(0 < s \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, z \in \mathbb{D} \right).$$

صدق کنند.

از نظر هندسی، شرایط (۱.۳) و (۲.۳) به این معنی هستند که کمیت‌های $zf'(z)/f(z)$ و $1 + zf''(z)/f'(z)$ در دامنه نفروئید $N(s)$ قرار دارند. چون $\mathcal{N}_s(\mathbb{D}) = N(s)$ در نیم‌صفحه راست صفحه قرار دارند لذا $ST_N(s)$ و $CV_N(s)$ زیرمجموعه‌های محض رده‌های توابع ستاره‌گون ST و محدب CV هستند (شکل ۴). علاوه بر این، خواص $N(s)$ بیان‌شده در بخش ۲ ایجاب می‌کند:

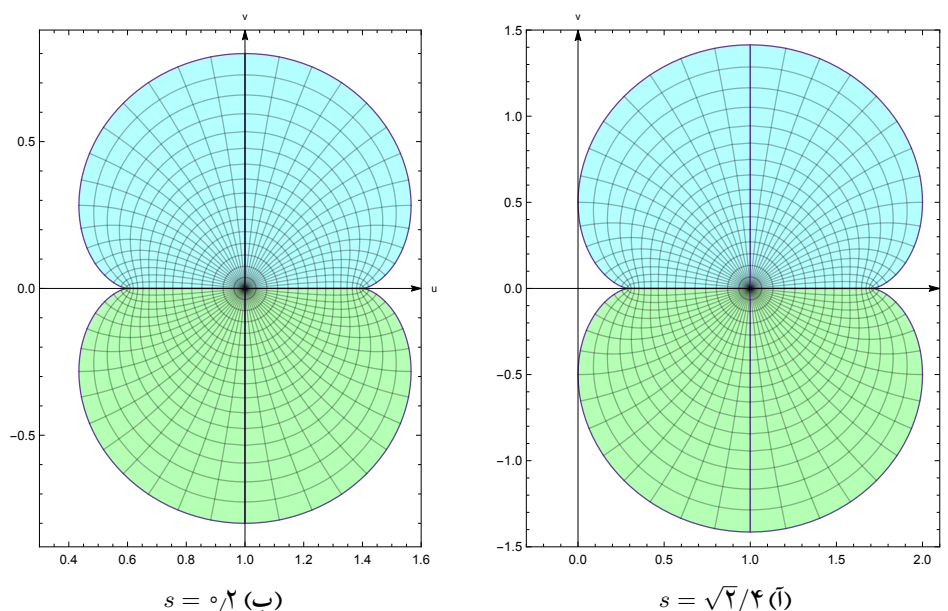
$$ST_N(s) \subset ST(\beta), \quad CV_N(s) \subset CV(\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 1 - 2\sqrt{2}s.$$

با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم (شکل ۳) نگاشت‌های $\Re\{\mathcal{N}_s(e^{i\theta})\}$ و $\Im\{\mathcal{N}_s(e^{i\theta})\}$ کوچکترین و بزرگترین قرص به مرکز $(1, 0)$ که مشمول و شامل دامنه نفروئید $\mathcal{N}_s(\mathbb{D})$ باشند، قرص‌های با شعاع‌های $2s$ و $4s$ می‌باشند (شکل ۵)، به عبارت دیگر

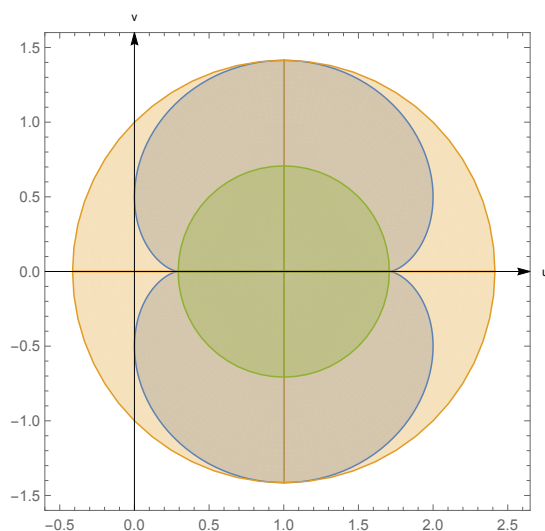
$$(3.3) \quad \mathcal{N}_s(\mathbb{D}) \supset \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 2s\},$$

$$(4.3) \quad \mathcal{N}_s(\mathbb{D}) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 4s\}.$$

برای $s = 1/3$ ، مقاله [۲۱، تبصره ۱] را ملاحظه نمایید. با داشتن فرم کلی از توابعی مانند $p \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_s)$ و به کمک انتگرال، نمایشی از توابع در رده‌های توابع ستاره‌گون $ST_N(s)$ و محدب $CV_N(s)$ به دست می‌آوریم.



شکل ۴. نگاره $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $\mathcal{N}_s(z)$ برای مقادیر مختلف.



شکل ۵. نگاره $\mathbb{D}$ تحت نگاشت‌های $w = 2sz + 1$ ، $w = 4sz + 1$ و $s = \frac{\sqrt{2}}{4}$ برای $\mathcal{N}_s(z)$.

قضیه ۲.۳. [۲۱، قضیه ۱.۲] فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$. در این صورت نگاشت f در رده $ST_N(s)$ قرار دارد اگر و تنها اگر نگاشت $p \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_s)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$(5.3) \quad f(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{p(t) - 1}{t} dt\right) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

اثبات. فرض کنیم $f \in ST_N(s)$. قرار می‌دهیم

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad \psi(z) = \frac{f(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

در این صورت $p(\circ) = 1$, $\Re\{p(z)\} > 0$ و $p(z) \prec \mathcal{N}_s(z)$. با توجه به تک‌ارز بودن نگاشت f در $\mathbb{D}$ ، نگاشت $\psi(z)$ برای هر $z \in \mathbb{D}$ ناصفر است. حال با مشتق‌گیری لگاریتمی از نگاشت ψ نسبت به متغیر z داریم

$$\frac{z\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \quad \text{یا} \quad \frac{p(z) - 1}{z} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

□

بنابراین با انتگرال‌گیری از معادله اخیر از $\circ$ تا z ، رابطه (۵.۳) را به دست می‌آوریم.

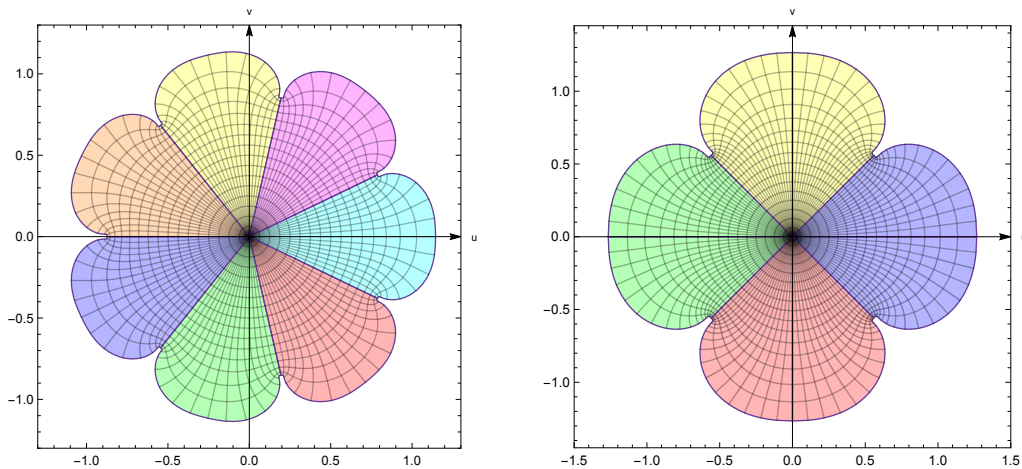
اگر $f \in ST_N(s)$ داشته باشیم

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \mathcal{N}_s(z),$$

آن‌گاه نگاشت f برای رده $ST_N(s)$ اکستریمال است. برای هر $n = 1, 2, \dots$ چون $\mathcal{N}_s(z^n)$ مطیع $\mathcal{N}_s(z)$ است

$$(\mathcal{N}_s(z^n) \prec \mathcal{N}_s(z) \text{ یعنی})$$

لذا نگاشت‌های $\Phi_{s,n}$ (شکل ۶)



شکل ۶. نگاره $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $\Phi_{s,n}(z)$ برای $s = \sqrt[4]{1}$ و $n = 4, 7$.

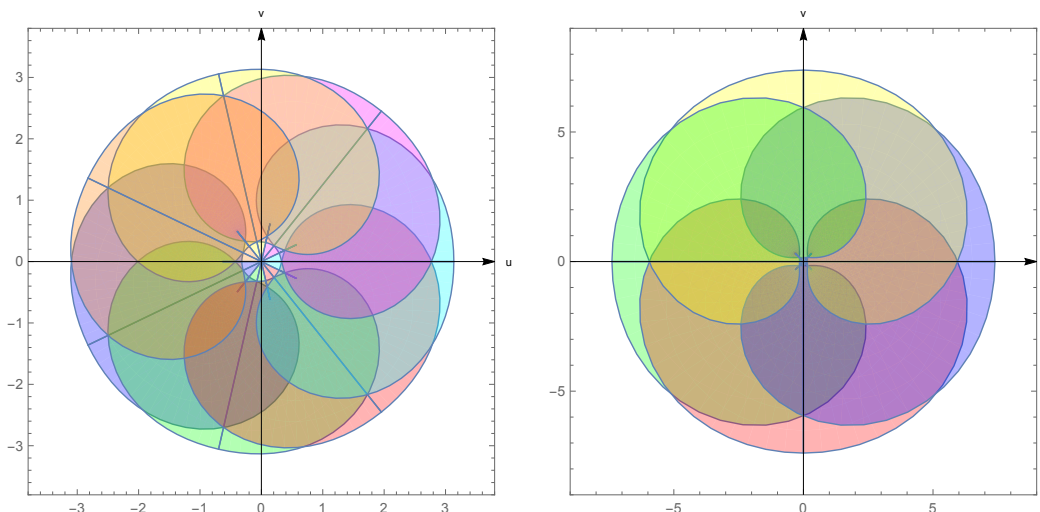
با تعریف

$$\begin{aligned} \Phi_{s,n}(z) &= z \exp\left(\int_0^z \frac{\mathcal{N}_s(t^n) - 1}{t} dt\right) = z \exp\left(\frac{s}{n} z^n - \frac{s}{n} z^n\right) \\ &= z + \frac{s}{n} z^{n+1} + \frac{n s + n^2 s^2}{2 n^2} z^{n+1} + \dots, \end{aligned}$$

توابع اکسترمال برای رده $ST_N(s)$ هستند. به‌ویژه برای $n = 1$ داریم

$$\begin{aligned}\Phi_s(z) &:= \Phi_{s,1}(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{\mathcal{N}_s(t) - 1}{t} dt\right) \\ &= z \exp\left(\Im s z - \frac{s}{3} z^3\right) = z + \Im s z^2 + \dots\end{aligned}$$

در شکل ۷، نگاره نگاشت‌های $\Phi_{s,n}(z)$ برای $s > \sqrt{2}/4$ رسم شده است. همچنان که مشاهده می‌شود، این نگاشت‌ها تکرارز نیستند.



شکل ۷. نگاره $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $\Phi_{s,n}(z)$ برای $s = 3$ و $n = 4, 7$.

قضیه ۳.۳. [۲۱، نتیجه ۱.۲] فرض کنیم $f \in \mathcal{A}$. در این صورت نگاشت f در رده $\mathcal{CV}_N(s)$ قرار دارد اگر و تنها اگر نگاشت $p \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_s)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$f(z) = \int_0^z w \exp\left(\int_0^w \frac{p(t) - 1}{t} dt\right) dw \quad (z \in \mathbb{D}).$$

اثبات. فرض کنیم $f \in \mathcal{CV}_N(s)$. در این صورت طبق قضیه الکساندر ۶.۱، نگاشت $zf' \in ST_N(s)$. حال بنا به قضیه ۲.۳ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

اگر $f \in \mathcal{CV}_N(s)$ داشته باشیم

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \mathcal{N}_s(z),$$

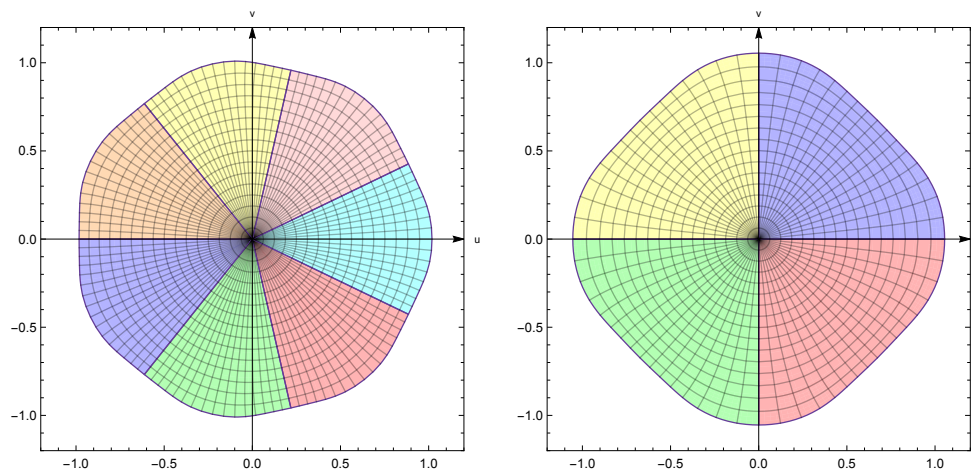
آنگاه نگاشت f برای رده $\mathcal{CV}_N(s)$ اکسترمال است. برای هر $n = 1, 2, \dots$ چون $\mathcal{N}_s(z^n)$ مطیع $\mathcal{N}_s(z)$ است لذا نگاشت‌های $K_{s,n}$ با تعریف

$$\begin{aligned}K_{s,n}(z) &= \int_0^z w \exp\left(\int_0^w \frac{\mathcal{N}_s(t^n) - 1}{t} dt\right) dw \\ &= \int_0^z \exp\left(\frac{\Im s}{n} t^n - \frac{s}{3n} t^{3n}\right) dt = z + \frac{\Im s}{n(n+1)} z^{n+1} + \dots\end{aligned}$$

توابع اکستریمال (شکل ۸) برای رده $\mathcal{CV}_N(s)$ هستند. به ویژه برای $n = 1$ داریم

$$K_s(z) := K_{s,1}(z) = \int_0^z w \exp\left(\int_0^w \frac{\mathcal{N}_s(t) - 1}{t} dt\right) dw$$

$$= \int_0^z \exp\left(\mathcal{V}st - \frac{s}{\mathcal{V}}t^{\mathcal{V}}\right) dt = z + \frac{\mathcal{V}s}{\mathcal{V}}z^{\mathcal{V}} + \dots$$



شکل ۸. نگاره $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $K_{s,n}(z)$ برای $s = \frac{1}{4}$ و $n = 4, 7$.

به کمک رابطه (۳.۳) می توان استنتاج کرد، اگر $f \in \mathcal{A}$ در شرط

$$(۶.۳) \quad \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < L \leq \mathcal{V}s \quad (z \in \mathbb{D})$$

صدق کند، آنگاه $f \in \mathcal{ST}_N(s)$. حال با توجه به رابطه اخیر و فرض اینکه $f \in \mathcal{ST}_N(s)$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathcal{CV}_N(s)$ می توان گزاره زیر را نتیجه گرفت.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم $0 < s \leq \sqrt{\mathcal{V}}/4$. در این صورت رده های $\mathcal{ST}_N(s)$ و $\mathcal{CV}_N(s)$ ناتهی هستند. نگاشت های زیر مثال های از این رده ها هستند.

(۱) برای $n = 2, 3, \dots$ فرض کنیم $a_n \in \mathbb{C}$. در نتیجه

$$f(z) = z + a_n z^n \in \mathcal{ST}_N(s) \iff |a_n| \leq \frac{\mathcal{V}s}{n-1+\mathcal{V}s}.$$

با اعمال $s = 1/3$ ، قضیه ۳.۴ و نتیجه ۳.۴ [۲۱]، ملاحظه شود.

(۲) برای $n = 2, 3, \dots$ فرض کنیم $a_n \in \mathbb{C}$. در این صورت

$$f(z) = z + a_n z^n \in \mathcal{CV}_N(s) \iff n|a_n| \leq \frac{\mathcal{V}s}{n-1+\mathcal{V}s}.$$

(۳) فرض کنیم $A \in \mathbb{C}$ در این صورت

$$\begin{cases} \frac{z}{(1-Az)^2} \in \mathcal{ST}_N(s) \\ \frac{z}{1-Az} \in \mathcal{CV}_N(s) \end{cases} \iff |A| \leq \frac{s}{1+s},$$

$$\begin{cases} \frac{z}{1-Az} \in \mathcal{ST}_N(s) \\ -\frac{\ln(1-Az)}{A} \in \mathcal{CV}_N(s) \end{cases} \iff |A| \leq \frac{2s}{1+2s}$$

$$\begin{cases} z \exp(Az) \in \mathcal{ST}_N(s) \\ \frac{\exp(Az) - 1}{A} \in \mathcal{CV}_N(s) \end{cases} \iff \begin{cases} |A| \leq 2s, \\ 0 < |A| \leq 2s. \end{cases}$$

اثبات. (۱) برای $|a_n| \leq 1/n$ نگاشت $f(z) = z + a_n z^n$ در $\mathbb{D}$ تک‌ارز است. مشتق لگاریتمی از تابع غیرصفر $f(z)/z = 1 + a_n z^{n-1}$ نسبت به متغیر $z \in \mathbb{D}$ ایجاب می‌کند

$$(۷.۳) \quad W(z) := \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \frac{(n-1)a_n z^{n-1}}{1 + a_n z^{n-1}}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

برای اثبات این که $f \in \mathcal{ST}_N(s)$ کافی است با استفاده از اصل تبعیت، نشان دهیم $W(z) \prec \mathcal{N}_s(z)$ ، یا به‌طور معادل $W(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}_s(\mathbb{D})$. زیرا تابع $\mathcal{N}_s$ تک‌ارز است. چون $\mathcal{ST}_N(s) \subset \mathcal{ST}$. بنابراین نتیجه می‌گیریم $|a_n| \leq 1/n$. از رابطه (۷.۳) داریم

$$(۸.۳) \quad \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < \frac{(n-1)|a_n|}{1-|a_n|}.$$

حال از روابط (۶.۳) و (۸.۳) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{(n-1)|a_n|}{1-|a_n|} \leq 2s$$

و این حکم را ثابت می‌کند.

(۲) فرض کنید $f(z) = z + a_n z^n \in \mathcal{CV}_N(s)$ در این صورت داریم $zf'(z) = z + na_n z^n \in \mathcal{ST}_N(s)$. با اعمال نتیجه قسمت (۱) حکم حاصل می‌شود.

□

(۳) برهان قسمت‌های دیگر شبیه برهان قسمت‌های (۱) و (۲) هستند.

با توجه به اینکه برای هر $s \leq \sqrt{2}/4$ ، $0 < s \leq \sqrt{2}/4$ و همچنین به کمک قضیه ۳.۲ و قضیه‌های مرجع [۱۴]، می‌توانیم گزاره‌های زیر را نتیجه بگیریم.

گزاره ۵.۳. [۲۱، قضیه ۲.۲] فرض کنید $f \in \mathcal{ST}_N(s)$ و $|z| = r < 1$ در این صورت

(۱) قضیه‌های تبعیت:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{z\Phi'_s(z)}{\Phi_s(z)}, \quad \frac{f(z)}{z} \prec \frac{\Phi_s(z)}{z} = \exp\left(3sz - \frac{s}{3}z^3\right).$$

(۲) قضیه دگرشکلی: با توجه به رابطه (۲.۲)، داریم

$$\Phi'_s(-r) \leq |f'(z)| \leq \Phi'_s(r), \quad |z| = r \leq 1/\sqrt{3}.$$

(۳) قضیه رشد: $-\Phi_s(-r) \leq |f(z)| \leq \Phi_s(r)$

(۴) قضیه دوران:

$$\left| \arg \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\} \right| \leq \max_{|z|=r} \arg \left\{ \exp \left(3sz - \frac{s}{3} z^3 \right) \right\} \leq 3rs + \frac{sr^3}{3}.$$

در حالت‌های (۲) و (۳) برای یک $z \neq 0$ تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دورانی از تابع Φ_s باشد، یعنی تابع

$$\bar{\lambda} \Phi_s(\lambda z) = z \exp \left(3s\lambda z - \frac{s}{3} \lambda^3 z^3 \right) \quad (z \in \mathbb{D}),$$

که λ عدد ثابت مختلط با قدر مطلق یک می‌باشد.

(۵) یا f دورانی از Φ_s است، یا

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : |w| \leq -\Phi_s(-1) = \exp \left(-\frac{\lambda s}{3} \right) \right\} \subset f(\mathbb{D}),$$

به‌طوری‌که $-\Phi_s(-1) = \lim_{r \rightarrow 1^-} -\Phi_s(-r)$.

گزاره ۶.۳. [۲۱، قضیه ۳.۲] فرض کنید $f \in \mathcal{CV}_N(s)$ و $|z| = r < 1$. در این صورت

(۱) قضیه‌های تبعیت:

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{zK_s''(z)}{K_s'(z)}, \quad f'(z) \prec K_s'(z).$$

(۲) قضیه دگرشکلی: $K'_s(-r) \leq |f'(z)| \leq K'_s(r)$

(۳) قضیه رشد: $-K_s(-r) \leq |f(z)| \leq K_s(r)$

(۴) قضیه دوران: $|\arg \{f'(z)\}| \leq \max_{|z|=r} \arg \{K'_s(z)\}$

در حالت‌های (۲)-(۴) برای یک $z \neq 0$ تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f دورانی از تابع K_s یعنی $\bar{\lambda} K_s(\lambda z)$

با شرط $|\lambda| = 1$ باشد.

(۵) یا f دورانی از نگاشت K_s است یا $\{w : |w| \leq -K_s(-1)\} \subseteq f(\mathbb{D})$ به‌طوری‌که

$$-K_s(-1) = \lim_{r \rightarrow 1^-} -K_s(-r).$$

مراجع

- [1] M. K. Aouf, J. Dziok and J. Sokół, On a subclass of strongly starlike functions, *Appl. Math. Lett.*, **24** (2011) 27–32.
- [2] D. Brannan and W. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, *J. London Math. Soc.*, (2) (1969) 431–443.
- [3] P. L. Duren, *Univalent functions*, Springer Science & Business Media, **259**, 2001.
- [4] J. Dziok, R. K. Raina and J. Sokół, On α -convex functions related to shell-like functions connected with Fibonacci numbers, *Appl. Math. Comput.*, **218** (2011) 996–1002.

- [5] A. W. Goodman, On uniformly convex functions, *Ann. Polon. Math.*, **56** (1991) 87–92.
 - [6] W. Janowski, Some extremal problems for certain families of analytic functions I, *Ann. Polon. Math.*, **28** (1973) 297–326.
 - [7] W. Janowski, Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families, *Ann. Polon. Math.*, **23** (1970/71) 159–177.
 - [8] S. Kanas, V. S. Masih and A. Ebadian, Relations of a planar domains bounded by hyperbolas with families of holomorphic functions, *J. Inequal. Appl.*, **2019**, 14 pp.
 - [9] S. Kanas and A. Wiśniowska, Conic regions k -uniform convexity, II, *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat.*, no. 22 (1998) 65–78.
 - [10] S. Kanas and A. Wiśniowska, Conic regions and k -uniform convexity, *J. Comput. Appl. Math.*, **105** (1999) 327–336.
 - [11] S. Kanas and A. Wiśniowska, Conic domains and starlike functions, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **45** (2000) 647–658.
 - [12] K. Kuroki and S. Owa, Notes on new class for certain analytic functions (Conditions for Univalence of Functions and Applications), *RIMS Kokyuroku*, **1772** (2011) 21–25.
 - [13] S. Kumar and V. Ravichandran, A Subclass of Starlike Functions Associated With a Rational Function, *Southeast Asian Bull. Math.*, **40** (2016) 996–1002.
 - [14] W. C. Ma and D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions, *Proceeding of the Conference on Complex Analysis*, Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, Int. Press, Cambridge, MA, (1994) 157–169.
 - [15] E. Paprocki and J. Sokół, The extremal problems in some subclass of strongly starlike functions, *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat.*, **20** (1996) 89–94.
 - [16] M. I. S. Robertson, On the theory of univalent functions, *Ann. of Math. (2)*, **37** (1936) 374–408.
 - [17] F. Rønning, Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118** (1993) 189–196.
 - [18] R. K. Raina and J. Sokół, Some properties related to a certain class of starlike functions, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **353** (2015) 973–978.
 - [19] J. Sokół, A certain class of starlike functions, *Comput. Math. with Appl.*, **62** (2011) 611–619.
 - [20] J. Sokół and J. Stankiewicz, Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions, *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat.*, **19** (1996) 101–105.
 - [21] L. A. Wani and A. Swaminathan, Starlike and convex functions associated with a nephroid domain, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **44** (2021) 79–104.
 - [22] Y. Yunus, S. A. Halim and A. B. Akbarally, Subclass of starlike functions associated with a limaçon, *AIP Conf. Proc.*, (2018).
- [۲۳] ه. سیلورمن، متغیرهای مختلط، ترجمه محسن نقشینه ارجمند، جهاد دانشگاهی دانشگاه اصفهان، چاپ دوم، ۱۳۷۴.

ولی سلطانی مسیح

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

v_soltani@pnu.ac.ir

ولی سلطانی مسیح، عضو هیأت علمی و استادیار بخش ریاضی محض، دانشگاه پیام نور، دانش آموخته کارشناسی ریاضی محض، از دانشگاه تبریز و دکترای ریاضی محض گرایش آنالیز مختلط از تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور تبریز است. علائق پژوهشی وی، «نظریه توابع هندسی»، «توابع تک ارز» و «زیررده های توابع تک ارز» است.



Subclass of starlike and convex functions associated to domain bounded by a nephroid

Masih Vali Soltani

Abstract: One of the most important and interesting topics in the geometric function theory is the classes of starlike and convex functions of Ma-Minda type on the unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ which are defined by subordination. Let $\mathcal{A}$ be the class of functions f , analytic in the unit disc $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ on the complex plane $\mathbb{C}$, with the normalization $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, and $\mathcal{ST}_N(s)$ and $\mathcal{CV}_N(s)$ be a family of starlike and convex functions $f \in \mathcal{A}$ so that for each $z \in \mathbb{D}$, such that the quantity $zf'(z)/f(z)$ or $1 + zf''(z)/f'(z)$ respectively are lying in the region bounded by the Nephroid

$$\left[(u-1)^2 + v^2 - 4s^2\right]^3 = 108s^4v^2, \quad 0 < s \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

In this paper, some properties and characteristics of classes $\mathcal{ST}_N(s)$ and $\mathcal{CV}_N(s)$ defined by the Ma-Minda type, like the structure of functions in these classes, we study extreme functions, growth theorem, distortion, and rotation theorem.

Keywords: Univalent functions, Starlike and convex functions, Subordination, domain bounded by Nephroid.

Masih Vali Soltani

Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran

Email: v_soltani@pnu.ac.ir

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Promotional Paper.

Received: 12/01/2022, Accepted: 25/05/2022.