http://www.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷ – ۲۳۴۵
جلد ۶، شماره ۴ (۱۴۰۰)، صص. ۵۹-۷۰

http://math-sci.ui.ac.ir

مشتق ریمان–لیوویل اصلاح شده(جوماری)؛ مزایا و معایب

محمدحسین اکرمی

چکیده. در این مقاله، مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده (جوماری) را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های آن را اثبات می‌کنیم. در ادامه با ارائه چند مثال نقض نشان می‌دهیم که برخی از خواصی که جوماری در مقالات خود ادعا کرده است، برقرار نیستند. در پایان اشکالی که در اثبات‌های جوماری وجود دارد را مشخص کرده و فرمول‌های صحیح را پیشنهاد می‌کنیم.

۱. مقدمه

حسابان کسری موضوعی است که بیش از سه قرن قدمت دارد. اما این حوزه در چند دهه اخیر به سرعت در حال توسعه بوده و در حال حاضر در بسیاری از زمینه‌های علمی کاربرد دارد. تا اوایل قرن بیستم، سه تعریف مهم از مشتق کسری به نام‌های گرانوالد–لتنیکف، ریمان–لیوویل و کاپوتو در مقالات و کتاب‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفتند [۱۱]. با وجود این‌که تعریف های فوق یک گام بزرگ در زمینه حسابان کسری به‌شمار می‌رود ولی کاستی‌هایی نیز دارند، برای مثال آن‌ها همه خواص مشتق کلاسیک را ندارند. از این رو به منظور رفع چنین کاستی‌هایی، برخی افراد تعریف جدیدی از مشتق کسری ارائه کردند و یا سعی کردند تا تعریف‌های قبلی را بهبود ببخشند. جوماری[1] در سال ۲۰۰۶ تعریف جدیدی براساس مشتق کسری ریمان–لیوویل ارائه داد که مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح‌شده نامیده می‌شود [۳]. تعریف جوماری خواص تعریف ریمان–لیوویل را دارد یعنی برای هر تابع پیوسته (مشتق‌ناپذیر) تعریف می‌شود. علاوه‌براین در تعریف جوماری، مشتق عدد ثابت صفر است درصورتی که مشتق ریمان–لیوویل تابع ثابت صفرنیست. جوماری پس از ارائه تعریف مشتق کسری، مقالات متعددی نوشت و ویژگی‌هایی برای مشتق خود به‌دست آورد که تعاریف قبلی این ویژگی‌ها را نداشتند. به عنوان مثال وی اثبات کرد که برای مشتق ریمان–لیوویل اصلاح‌شده (جوماری) قاعده لایب‌نیتز و مشتق زنجیره‌ای مشابه مشتق کلاسیک برقرار است. پس از آن افراد زیادی از این تعریف استفاده کرده و با استفاده از ویژگی‌های جدید مقالاتی را در زمینه‌های مختلف منتشر کردند [۱، ۱۰]. لیو در سال ۲۰۱۵ و ۲۰۱۸ در دو مقاله به ارائه مثال‌های نقضی پرداخت که نشان داد خواص ذکر شده برقرار نیستند. البته لیو تنها به ارائه مثال نقض پرداخت و به این‌که چرا این خواص برقرار نیستند، اشاره‌ای نکرد [۶، ۷].

عبارات و کلمات کلیدي: حسابان کسری، مشتق کسری جوماری، ریمان–لیوویل اصلاح شده.
دبیرتخصصی رابط: علیرضا امینی هرندی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۱۵
. http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

[1] Jumarie

در این مقاله، نخست تعریف جوماری و خواص آن را با جزئیات کامل اثبات کرده، سپس مثال‌های نقض لیو را بیان می‌کنیم. در پایان اشکال اثبات جوماری را بیان کرده و صورت صحیح قاعده لایب‌نیتز و مشتق زنجیره‌ای برای مشتق جوماری را ارائه می‌کنیم.

۲. مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده (جوماری)

از قدیمی‌ترین تعریف‌های مشتق کسری، تعریف ریمان–لیوویل تابع f است که برای مرتبهٔ دلخواه α $(n-1 \leq \alpha < n)$ به‌صورت

$$ {}^{RL}_{\ a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{۱.۲} $$

تعریف می‌شود. اگر چه معرفی این مفهوم به عنوان تعمیمی از مشتق کلاسیک (مرتبه صحیح) با استقبال مواجه شد، ولی در به‌کارگیری آن دو مشکل عمده وجود داشت. یکی این‌که مشتق کسری (مرتبه α) از تابع ثابت K برابر است با $\frac{Kx^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$، پس خاصیت مشتق کلاسیک برای توابع ثابت برقرار نیست. مشکل دیگر حل معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری ریمان–لیوویل بود که برای حل به شرایط اولیه با مشتق کسری نیاز داشت و چون این شرایط تعبیر فیزیکی مناسب نداشتند در مسائل کاربردی مورد استقبال قرار نگرفت [۹]. از این‌رو در سال ۱۹۷۶ شخصی به نام کاپوتو مشتق کسری جدیدی را به صورت

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n, \tag{۲.۲} $$

معرفی کرد که به نام خودش معروف شد و این دو مشکل را حل کرد. هر چند کاپوتو در معرفی مشتق کسری بسیار موفق عمل کرد و تاکنون مقالات بسیار زیادی بر اساس این مشتق نوشته شده‌اند اما این تعریف برای توابع مشتق‌پذیر مناسب است و اگر تابعی مشتق‌پذیر نباشد نمی‌توان از تعریف کاپوتو برای آن استفاده کرد [۹].

به‌منظور رفع مشکلات فوق یک تعریف جدید به‌صورت زیر توسط جوماری در سال ۲۰۰۶ [۳] پیشنهاد شد که آن را مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده نامید و پس از آن در برخی مقالات به‌نام جوماری نیز نامیده شد. در حقیقت جوماری تعریف ریمان–لیوویل را اصلاح کرد تا برای توابع مشتق‌ناپذیر تعریف شود و مشتق تابع ثابت نیز صفر شود.

تعریف ۱.۲. مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

(۱) فرض کنید که $f(x) = k$ یک تابع ثابت باشد. در این‌صورت مشتق و انتگرال کسری از مرتبه α آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$ D^{\alpha} k = \begin{cases} \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}, & \alpha \leq 0, \\ 0, & \alpha > 0. \end{cases} \tag{۳.۲} $$

(۲) هرگاه $f(x)$ تابع ثابت نباشد. در این‌صورت انتگرال کسری آن توسط عبارت زیر:

$$ f^{(\alpha)}(x) := D^{\alpha}_{x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha-1} (f(\xi) - f(0)) d\xi, \quad \alpha < 0, \tag{۴.۲} $$

و مشتق کسری برای $\alpha > 0$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ \begin{aligned} f^{(\alpha)}(x) &= (f^{(\alpha-1)}(x))', \quad 0 < \alpha < 1, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} (f(\xi) - f(0)) d\xi, \end{aligned} \tag{۵.۲} $$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

علاوه براین برای $n \leq \alpha < n+1$، $n \geq 1$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{(\alpha)}(x) := (f^{(n)}(x))^{(\alpha-n)}. \tag{۶.۲}$$

در ادامه این بخش نشان می‌دهیم که با استفاده از تفاضل کسری نیز می‌توانیم مشتق کسری را بنویسیم.

تعریف ۲.۲. [۳] فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع (نه لزوماً مشتق‌پذیر) و $h>0$ یک اندازه ثابت گسسته‌ساز باشد. عملگر پیشرو $FW(h)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$FW(h)f(x) := f(x+h). \tag{۷.۲}$$

تعریف ۳.۲. [۳] تفاضل کسری مرتبه α از تابع $f(x)$ برای $0<\alpha<1$ به‌صورت زیر:

$$\Delta^{\alpha} f(x) := (FW(h)-1)^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f[x+(\alpha-k)h], \tag{۸.۲}$$

و مشتق کسری از مرتبه α با حد زیر تعریف می‌شود:

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^{\alpha}\Big(f(x)-f(0)\Big)}{h^{\alpha}} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^{\alpha} f(x)}{h^{\alpha}}. \tag{۹.۲}$$

رابطه (۹.۲) برای $0<\alpha<1$ به تعریف مشتق کلاسیک شبیه است و با مشتق جوماری معادل است [۴]. دقت شود که عملگر Δ^{α} که در رابطه (۸.۲) تعریف شده، از بی‌نهایت نقطه استفاده می‌کند (پس عملگر موضعی نیست) و زمانی که $h\to 0$ تعداد زیربازه‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و شبیه تعریف انتگرال ریمان به انتگرال کسری تبدیل می‌شود.

۳. سری تیلور برای مرتبه کسری

برای توابع مشتق‌ناپذیر، بسط تیلور تعمیم یافته از مرتبه کسری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۳. [۴](سری تیلور از مرتبه کسری) فرض می‌کنیم برای تابع پیوسته $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق کسری از مرتبه $k\alpha$ موجود باشد. در این‌صورت برای هرعدد صحیح مثبت k و هر $0<\alpha\leq 1$، تعریف می‌کنیم:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{\alpha k}}{(\alpha k)!} f^{(\alpha k)}(x), \quad 0<\alpha\leq 1. \tag{۱.۳}$$

که در آن $f^{(\alpha k)}$ مشتق از مرتبه αk، از تابع $f(x)$ است و همچنین

$$(\alpha k)! := \Gamma(1+\alpha k). \tag{۲.۳}$$

این سری را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$f(x+h) = E_{\alpha}(h^{\alpha} D_x^{\alpha}) f(x), \tag{۳.۳}$$

که در آن D_x^{α} عملگر مشتق جوماری نسبت به x است. توجه کنید این سری کسری تیلور با مشتق استاندارد ریمان–لیوویل مطابقت ندارد و برای توابع مشتق‌ناپذیر تعریف می‌شود.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

حال بنا به (۱.۳) و (۹.۲) ، داریم

$$f(x+h) \cong f(x) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f^{(\alpha)}(x), \tag{۴.۳}$$

$$\Gamma(\alpha+1)\frac{f(x+h)-f(x)}{h^\alpha} \cong f^{(\alpha)}(x) \cong \frac{\Delta^\alpha f(x)}{h^\alpha}. \tag{۵.۳}$$

به‌عبارت دیگر برای $0 < \alpha < 1$ داریم: $\Gamma(\alpha+1)\Delta f \cong \Delta^\alpha f$ و همچنین با استدلال مشابه رابطه دیفرانسیلی زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\Gamma(\alpha+1)df \cong d^\alpha f, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{۶.۳}$$

نکته‌ای که لازم است در اینجا ذکر کنیم این است که مشتق کسری جوماری تمام خواص مشتق ریمان لیویل مانند خطی بودن را دارد. همچنین جوماری با استفاده از رابطه (۶.۳) خواصی را به‌دست آورد که سایر مشتق‌های کسری نداشتند. در ادامه به‌بیان برخی خواص مهم و اثباتی که جوماری انجام داده، می‌پردازیم.

۱.۳. مشتق چندجمله‌ای. مشتق کسری از چندجمله‌ای مشابه فرمول مربوط ریمان–لیویل کلاسیک به‌دست می‌آید. لم زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

لم ۲.۳. [۴] اگر $0 < \alpha < 1$، آن‌گاه

$$D_x^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} x^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > 0, \tag{۷.۳}$$

همچنین اگر $\alpha = n+\theta$، که $n \in \mathbb{N}$ و $0 < \theta < 1$، آن‌گاه:

$$D_x^{n+\theta} x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-n-\theta)} x^{\gamma-n-\theta}. \tag{۸.۳}$$

۲.۳. انتگرال گیری نسبت به $(dx)^\alpha$. انتگرال نسبت به $(dx)^\alpha$ به‌صورت جواب معادله دیفرانسیل کسری زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} &d^\alpha y = f(x)(dx)^\alpha, \quad x \geq 0, 0 < \alpha < 1, \\ &y(0) = 0, \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

که با استفاده از نتایج زیر حاصل می‌شود.

لم ۳.۳. [۴] فرض می‌کنیم $f(x)$ یک تابع پیوسته باشد. در این‌صورت جواب معادله (۹.۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y = \int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha = \alpha \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{۱۰.۳}$$

اثبات. می‌توانیم معادله دیفرانسیل کسری

$$y^\alpha(x) = f(x), \tag{۱۱.۳}$$

را به‌فرم دیفرانسیل زیر بنویسیم:

$$d^\alpha y = f(x)(dx)^\alpha, \tag{۱۲.۳}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

اگر از عملگر انتگرال کسری در (۱۱.۳) استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$y(x) = D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \tag{۱۳.۳}$$

و همچنین با به‌کارگیری تساوی $d^\alpha y = \Gamma(1+\alpha)dy$ در (۱۲.۳) داریم:

$$\Gamma(1+\alpha)dy = f(x)(dx)^\alpha \Rightarrow dy = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} f(x)(dx)^\alpha, \tag{۱۴.۳}$$

با انتگرال گیری از رابطه (۱۴.۳)، داریم:

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha, \tag{۱۵.۳}$$

حال بنا به (۱۴.۳) و (۱۵.۳)،

$$\int_0^x f(\xi)(d\xi)^\alpha = \alpha \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \tag{۱۶.۳}$$

□

از (۱۰.۳)، بی‌درنگ برابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_0^x f(\xi)(dy)^{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha} \int_0^x (x-\xi)^\beta f(\xi)(d\xi)^\alpha \, , 0 < \alpha+\beta < 1, \tag{۱۷.۳}$$

$$\int_a^b f(\xi)(d\xi)^\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_{j-1}}^{a_j} (\frac{b-\xi}{a_j-\xi})^{\alpha-1} f(\xi)(d\xi)^\alpha, \quad a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_N. \tag{۱۸.۳}$$

۳.۳. مشتق حاصلضرب و قاعده زنجیره‌ای. قاعده لایب‌نیتز برای مشتق حاصلضرب، برای مشتقات کسری ریمان–لیوویل و کاپوتو برقرار نیست [۹]، اما جوماری در [۵] نشان داد که مشتق حاصلضرب و مشتق تابع مرکب برای ریمان–لیوویل اصلاح شده برقرار است. اثبات دقیق خواص را در لم زیر بیان می‌کنیم.

لم ۴.۳. [۴] فرض می‌کنیم $\alpha > 0$، آن‌گاه

(آ) اگر $u(x)$ و $v(x)$ توابع مشتق‌ناپذیر باشند آن‌گاه

$$(u(x)v(x))^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}(x)v(x) + u(x)v^{(\alpha)}(x), \tag{۱۹.۳}$$

(ب) اگر $u(x)$ مشتق‌پذیر و $f(x)$ مشتق‌ناپذیر باشند آن‌گاه

$$(f[u(x)])^{(\alpha)} = f_u^{(\alpha)}(u'(x))^\alpha \tag{۲۰.۳}$$

(پ) اگر $f(x)$ مشتق‌پذیر و $u(x)$ مشتق‌ناپذیر باشند آن‌گاه

$$(f[u(x)])^{(\alpha)} = f'_u(u)u^{(\alpha)}(x). \tag{۲۱.۳}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

اثبات. (آ) نخست فرض می‌کنیم $u(x)$ و $v(x)$ دو تابع (مشتق‌ناپذیر) باشند، طبق تعریف

$$(u(x)v(x))^{\alpha} = \frac{d^{\alpha}}{(dx)^{\alpha}}(u(x)v(x))$$

با استفاده از رابطه (۶.۳) در سمت راست معادله فوق داریم:

$$\begin{aligned}\frac{d^{\alpha}(u(x)v(x))}{(dx)^{\alpha}} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)d(u(x)v(x))}{(dx)^{\alpha}} = \frac{v(x)\Gamma(\alpha+1)du(x)+u(x)\Gamma(\alpha+1)dv(x)}{(dx)^{\alpha}}\\ &= v(x)\frac{\Gamma(\alpha+1)du(x)}{(dx)^{\alpha}} + u(x)\frac{\Gamma(\alpha+1)dv(x)}{(dx)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

بنابراین درستی رابطه (۱۹.۳) نتیجه می‌شود.

(ب) فرض می‌کنیم $u(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. در این‌صورت داریم:

$$\frac{d^{\alpha}f(u(x))}{du^{\alpha}} = \frac{d^{\alpha}f(u)}{du^{\alpha}}\frac{du^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = f_u^{(\alpha)}(u'(x))^{\alpha}.$$

(پ) حال فرض می‌کنیم $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه طبق قاعده زنجیره‌ای برای مشتق کلاسیک داریم:

$$\begin{aligned}&\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}, \Longrightarrow \frac{df}{(dx)^{\alpha}} = \frac{df}{du}\frac{du}{(dx)^{\alpha}},\\ &\Longrightarrow \Gamma(\alpha+1)\frac{df}{(dx)^{\alpha}} = \frac{df}{du}\Gamma(\alpha+1)\frac{du}{(dx)^{\alpha}},\\ &\Longrightarrow \frac{d^{\alpha}f}{(dx)^{\alpha}} = \frac{df}{du}\frac{du^{\alpha}}{(dx)^{\alpha}},\end{aligned}$$

□

۴. مثال‌های نقض در مورد برخی خواص مشتق کسری جوماری

همان‌طور که در بخش قبل بیان کردیم، جوماری تعریف مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده را ارائه کرد و خواص گوناگونی از آن، مانند قانون لایبنتز و قاعده زنجیره‌ای را بیان کرد، که در آن لازم است u و v پیوسته و مشتق‌ناپذیر باشند. اما لیو در سال ۲۰۱۵ با چند مثال نقض در مقاله خود نشان داد که قانون لایبنتز و قاعده زنجیره‌ای برای مشتق جوماری برقرار نیست [۶]. در ادامه مثال‌های لیو را ارائه می‌کنیم.

ابتدا سه تابع $f(t)=t$، $g(t)=\sqrt{t}$ و $h(t)=t^{۲}$ را در نظر بگیرید. چون در همه توابع ذکر شده $f(۰)=۰$ پس مشتق کسری جوماری با مشتق ریمان–لیوویل آنها باهم برابر است. بنا به (۷.۳) و با انتخاب $\alpha=\frac{۱}{۲}$، داریم:

$$\begin{aligned}D_t^{\frac{۱}{۲}}t &= t^{(\frac{۱}{۲})} = ۲\sqrt{\frac{t}{\pi}},\\ D_t^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{t} &= \sqrt{t}^{(\frac{۱}{۲})} = \frac{\sqrt{\pi}}{۲},\\ D_t^{\frac{۱}{۲}}t^{۲} &= (t^{۲})^{(\frac{۱}{۲})} = \frac{۸t^{\frac{۳}{۲}}}{۳\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

۱.۴. مثال نقض ۱. فرض کنید $u(t)=v(t)=\sqrt{t}$ و $\alpha=\frac{1}{2}$. حال داریم:

$$(u(t)v(t))^{(\frac{1}{2})}=t^{(\frac{1}{2})}=2\sqrt{\frac{t}{\pi}},$$
$$u(t)^{(\frac{1}{2})}v(t)+u(t)v(t)^{(\frac{1}{2})}=2\sqrt{t}\sqrt{t}^{(\frac{1}{2})}=\sqrt{\pi t}.$$

در نتیجه

$$(u(t)v(t))^{(\frac{1}{2})}\neq u(t)^{(\frac{1}{2})}v(t)+u(t)v(t)^{(\frac{1}{2})}.$$

بنابراین قاعده لایب‌نیتز یا همان رابطه (۱۹.۳) برقرار نیست.

۲.۴. مثال نقض ۲. فرض کنید $u(t)=t^2$، $f(u)=\sqrt{u}$ و $\alpha=\frac{1}{2}$. حال داریم:

$$f\left(u(t)\right)^{(\frac{1}{2})}=t^{(\frac{1}{2})}=2\sqrt{\frac{t}{\pi}},$$
$$f_u^{(\frac{1}{2})}(u'(x))^{\frac{1}{2}}=\sqrt{u}^{(\frac{1}{2})}\sqrt{(t^2)'}=\sqrt{\frac{\pi t}{2}},$$
$$f'_u.u(t)^{(\frac{1}{2})}=\frac{1}{2\sqrt{u}}(t^2)^{(\frac{1}{2})}=\frac{1}{2t}\frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}=\frac{4t^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{\pi}}.$$

در نتیجه

$$f\left(u(t)\right)^{(\frac{1}{2})}\neq f_u^{(\frac{1}{2})}(u'(x))^{\frac{1}{2}},$$
$$f\left(u(t)\right)^{(\frac{1}{2})}\neq f'_u.u(t)^{(\frac{1}{2})}.$$

بنابر این قاعده مشتق زنجیری یا همان روابط (۲۰.۳) و (۲۱.۳) برقرار نیستند.

در سال ۲۰۱۸ لیو مقاله دیگری در همین رابطه منتشر می‌کند و در مقدمه آن چنین می‌گوید [۷]: « در مقاله پیشین ۳ مثال نقض ارائه کردیم و نشان دادیم که خواص مشتق جوماری برقرار نیستند. اما از آن‌جایی که در [۵] جوماری تاکید می‌کند که این فرمول‌ها فقط در نقاطی که تابع پیوسته، مشتق‌ناپذیر ولی مشتق کسری موجود است، برقرار هستند.» وی همچنین مثال‌هایی طراحی می‌کند که شرایط فوق را داشته باشند ولی روابط جوماری برقرار نباشند. در ادامه برخی از این مثال‌ها را مرور می‌کنیم.

۳.۴. مثال نقض ۳. فرض کنید $\alpha=\frac{1}{2}$ و

$$u(t)=\begin{cases}\sqrt{t}, & 0\leq t\leq 1,\\ \sqrt{t}+t-1, & t>1.\end{cases}\tag{۱.۴}$$

به‌سادگی مشاهده می‌شود که تابع $u(t)$ در $t=1$ پیوسته ومشتق‌ناپذیر است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}H(t)&=\int_0^t(t-x)^{-\alpha}(u(x)-u(0))dx,\\ &=\begin{cases}\int_0^t\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t-x}}dx, & 0\leq t\leq 1,\\ \int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t-x}}dx+\int_1^t\frac{\sqrt{x}+x-1}{\sqrt{t-x}}dx, & t>1.\end{cases}\end{aligned}\tag{۲.۴}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

یا به‌عبارت دیگر

$$H(t)=\begin{cases}\int_{\circ}^{t}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t-x}}dx, & \circ\leq t\leq ۱,\\ \int_{\circ}^{t}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t-x}}dx+\int_{۱}^{t}\frac{x-۱}{\sqrt{t-x}}dx, & t>۱.\end{cases} \tag{۳.۴}$$

با تعویض متغیر $t-x=s^{۲}$، دومین انتگرال در ضابطه دوم را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$K(t)=\int_{۱}^{t}\frac{x-۱}{\sqrt{t-x}}dx=۲\int_{\circ}^{\sqrt{t-۱}}(t-۱-s^{۲})ds=\frac{۴}{۳}(t-۱)^{\frac{۳}{۲}}.$$

بنابراین، اگر $\circ\leq t<۱$ باشد آن‌گاه:

$$u^{(\frac{۱}{۲})}(t)=(\sqrt{t})^{(\frac{۱}{۲})}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲},$$

و اگر $t>۱$ باشد:

$$u^{(\frac{۱}{۲})}(t)=(\sqrt{t})^{(\frac{۱}{۲})}+\frac{۱}{\sqrt{\pi}}K'(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}+\frac{۲}{\sqrt{\pi}}(t-۱)^{\frac{۱}{۲}},$$

با استفاده از $\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}$ و در $t=۱$ داریم:

$$u^{(\frac{۱}{۲})}(۱)=\frac{\sqrt{\pi}}{۲},$$

علاوه براین با درنظرگرفتن $v(t)=u(t)$ می‌توان به‌دست آورد.

$$u^{(\frac{۱}{۲})}(۱)v(۱)+u(۱)v^{(\frac{۱}{۲})}(۱)=\sqrt{\pi}. \tag{۴.۴}$$

از طرف دیگر داریم:

$$u(t)v(t)=\begin{cases}t, & \circ\leq t\leq ۱,\\ (\sqrt{t}+t-۱)^{۲}, & t>۱.\end{cases} \tag{۵.۴}$$

بنابراین برای $t<۱$ داریم:

$$(uv)^{(\frac{۱}{۲})}(t)=(t)^{(\frac{۱}{۲})}=۲\sqrt{\frac{t}{\pi}},$$

و اگر $t>۱$ باشد.

$$(uv)^{(\frac{۱}{۲})}(t)=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\{\int_{\circ}^{۱}\frac{x}{\sqrt{t-x}}dx+\int_{۱}^{t}\frac{(\sqrt{x}+x-۱)^{۲}}{\sqrt{t-x}}dx\}.$$

که نتیجه می‌شود:

$$(uv)^{(\frac{۱}{۲})}(t)=(t)^{(\frac{۱}{۲})}+\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{۱}^{t}\frac{۳\sqrt{x}+۲(x-۱)-x^{-\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{t-x}}dx.$$

پس داریم:

$$(uv)^{(\frac{۱}{۲})}(t)=۲\sqrt{\frac{t}{\pi}}+\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\{\frac{۸}{۳}(t-۱)^{\frac{۳}{۲}}+۳\sqrt{t-۱}+۳t(\frac{\pi}{۲}-\arcsin\frac{۱}{\sqrt{t}})+۲\arcsin\frac{۱}{\sqrt{t}}-\pi\}.$$

بنابراین در $t=۱$، $(uv)^{(\frac{۱}{۲})}(t)$ موجود و $(uv)^{(\frac{۱}{۲})}(۱)=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\neq\sqrt{\pi}$، از (۴.۴) نتیجه می‌گیریم.

$$(uv)^{(\frac{۱}{۲})}(۱)\neq u^{(\frac{۱}{۲})}(۱)v(۱)+u(۱)v^{(\frac{۱}{۲})}.$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

در این مثال نشان داده شد که فرمول (۱۹.۳) جوماری برای توابع پیوسته و مشتق‌ناپذیر درست نیست.

۴.۴. مثال نقض ۴. فرض کنید $\alpha = \frac{1}{2}$ و

$$u(t) = \begin{cases} 1-t, & t<1, \\ t-1, & t>1. \end{cases}$$

به‌سادگی مشاهده می‌شود که $u(t)$ در $t=1$ پیوسته و مشتق‌ناپذیراست. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t (t-x)^{-\alpha}(u(x)-u(0))dx, \\ &= \begin{cases} \int_0^t \frac{-x}{\sqrt{t-x}}dx, & t \le 1, \\ \int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{t-x}}dx + \int_1^t \frac{x-2}{\sqrt{t-x}}dx, & t>1. \end{cases} \end{aligned}$$

از طرفی، اگر $t<1$،

$$u^{(\frac{1}{2})}(t) = -(t)^{(\frac{1}{2})} = -2\sqrt{\frac{t}{\pi}},$$

و اگر $t>1$ باشد:

$$u^{(\frac{1}{2})}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}H'(t) = -2\sqrt{\frac{t}{\pi}} + 4\sqrt{\frac{t-1}{\pi}}.$$

همچنین نتیجه می‌شود:

$$u^{(\frac{1}{2})}(1) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

بنابر این، باتوجه به‌اینکه $u(1)=0$ داریم:

$$2u(1)u^{(\frac{1}{2})}(1) = 0.$$

از طرف دیگر، داریم $u^2(t) = (t-1)^2 = t^2 - 2t + 1$ و با توجه به‌تعریف مشتق جوماری نتیجه می‌شود:

$$(u^2)^{(\frac{1}{2})}(t) = (t^2)^{(\frac{1}{2})} - 2(t)^{(\frac{1}{2})} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}.$$

حال با محاسبه تابع در نقطه $t=1$ داریم:

$$(u^2)^{(\frac{1}{2})}(1) = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \neq 0.$$

در نهایت نتیجه می‌گیریم:

$$(u^2)^{(\frac{1}{2})}(1) \neq 2u(1)u^{(\frac{1}{2})}(1). \tag{۶.۴}$$

در این مثال نشان دادیم که رابطه (۲۱.۳) جوماری برای توابع پیوسته و مشتق‌ناپذیر نیز درست نیست.

لیو چندین مثال دیگر نیز در مقاله خود ([۷]) ارائه می‌کند که به دلیل طولانی شدن بحث از آوردن آنها در اینجا خودداری می‌کنیم.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، نخست ابتدا به معرفی مشتق ریمان–لیوویل اصلاح شده یا مشتق جوماری پرداختیم. در حقیقت جوماری به دنبال ارائه تعریفی از مشتق کسری بود که خواص آن شبیه مشتق کلاسیک باشد و کاستی‌های مشتق‌های ریمان–لیوویل و کاپوتو را نداشته باشد. وی ادعا کرد که تعریف جدید خواصی مانند قاعده مشتق زنجیره‌ای و قاعده لایب‌نیتز را دارد و این خواص را اثبات نمود که در این مقاله اثبات‌ها را با جزئیات آورده‌ایم. اما در بخش قبل مثال‌های نقضی آوردیم که نشان می‌دهد خواص ذکر شده برقرار نیستند. حال سؤال این است که مشکل کجاست؟ لازم به ذکر است که حتی لیو که در دو مقاله مثال‌های نقضی را در رد خواص مشتق جوماری ارائه می‌کند حرفی از دلیل نقض این فرمول‌ها نمی‌زند. اما دلیل اصلی در شروع اثبات‌های جوماری است. در حقیقت جوماری اثبات‌ها را با یک فرض اشتباه شروع می‌کند و در نتیجه نتایج اشتباهی را به‌دست می‌آورد. در حقیقت رابطه تقریبی

$$\Gamma(\alpha+۱)df \cong d^\alpha f, \quad ۰<\alpha<۱. \tag{۱.۵}$$

که با استفاده از دو جمله اول از بسط تیلور کسری به‌دست آمده است را به عنوان تساوی در نظر می‌گیرد. بنابراین دیفرانسیل کسری به‌صورت ضریب عددی از دیفرانسیل معمولی (کلاسیک) در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه خواص دیفرانسیل کسری با استفاده از ضریبی از دیفرانسیل معمولی به‌دست می‌آیند. پس تمام اثبات‌هایی که در آن از رابطه (۱.۵) استفاده شده است اشتباه هستند. برای اثبات روابط باید از تعریف انتگرالی مشتق جوماری استفاده شود. با توجه به‌تعریف مشتق جوماری و ارتباط آن با مشتق ریمان–لیوویل می‌توانیم فرمول صحیح برای قاعده لایب‌نیتز و مشتق زنجیره‌ای به‌دست آوریم. اولدهام[۲] و اسپانیر[۳] در کتاب خود [۸، فصل ۵] فرمول‌های زیر را برای مشتق ریمان–لیوویل اثبات می‌کنند.

$$\begin{aligned}
{}^{RL}_{\ a}D^\alpha_x(f(x)g(x)) &= \sum_{k=۰}^{\infty}\binom{\alpha}{k} f^{(k)}(x)\, {}^{RL}_{\ a}D^{\alpha-k}_x g(x),\\
{}^{RL}_{\ a}D^\alpha_x f(g(x)) &= \frac{(x-a)^{-\alpha} f(g(x))}{\Gamma(۱-\alpha)}\\
&\quad + \sum_{k=۱}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\frac{(x-a)^{k-\alpha}k!}{\Gamma(k-\alpha+۱)}\sum_{m=۱}^{j} f^{(m)}(g)\sum\prod_{j=۱}^{k}\frac{۱}{P_j!}\left(\frac{g^{(j)}}{j!}\right)^{P_j}.
\end{aligned}$$

که در آن $\sum$ روی تمام ترکیب‌های نامنفی صحیح مقادیر $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$، P_n تعریف می‌شود به‌طوری‌که $\sum_{k=۱}^{n} kP_k = n$ و $\sum_{k=۱}^{n} P_k = m$. از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(\alpha)} &= {}^{RL}_{\ a}D^\alpha_x(f(x)g(x)) - \left[{}^{RL}_{\ a}D^\alpha_x(f(x)g(x))\right]_{x=۰},\\
(f(g(x)))^{(\alpha)} &= {}^{RL}_{\ a}D^\alpha_x(f(g(x))) - \left[{}^{RL}_{\ a}D^\alpha_x(f(g(x)))\right]_{x=۰}.
\end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از روابط فوق می‌توانیم فرمول‌های صحیح را برای مشتق جوماری به‌دست آوریم.

---
[2] Oldham [3] Spanier

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

مراجع

[1] U. Ghosh, J. Banerjee, S. Sarkar and S. Das, Fractional Klein–Gordon equation composed of Jumarie fractional derivative and its interpretation by a smoothness parameter, *Pramana - J Phys*, **90** (2018).

[2] G. Jumarie, Stochastic differential equations with fractional Brownian motion input, *Internat. J. Systems Sci.*, **24** (1993) 1113–1131.

[3] G. Jumarie, Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results, *Comput. Math. Appl.*, **51** (2006) 1367–1376.

[4] G. Jumarie, Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions, *Appl. Math. Lett.*, **22** (2009) 378–385.

[5] G. Jumarie, The Leibniz rule for fractional derivatives holds with non-differentiable functions, *Math. Stat.*,**1** (2013) 50–52.

[6] C. S. Liu, Counterexamples on Jumarie's two basic fractional calculus formulae, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **22** (2015) 92–94.

[7] C. S. Liu, Counterexamples on Jumarie's three basic fractional calculus formulae for non-differentiable continuous functions, *Chaos Solitons Fractals*, **109** (2018) 219-222.

[8] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Elsevier 1974.

[9] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[10] A new approach for the generalized fractional Casson fluid model with Newtonian heating described by the modified Riemann-Liouville fractional operator, *Math. Methods Appl. Sci.*, **45** (2022) 3574–3588.

[۱۱] م. ح. اکرمی، حسابان کسری از نظریه تا کاربرد، ریاضی و جامعه، ۴ (۱۳۹۶) ۵۶–۶۹.

محمدحسین اکرمی

بخش ریاضی کاربردی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد.

akrami@yazd.ac.ir

محمدحسین اکرمی متولد اردیبهشت ماه ۱۳۶۶ در شهر ابرکوه است. وی در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه صنعتی اصفهان شد و در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی (گرایش سیستم‌های دینامیکی) دانشگاه صنعتی اصفهان شد. سپس در سال ۱۳۹۳ موفق به اخذ مدرک دکترای تخصصی در رشتهٔ ریاضی کاربردی (گرایش معادلات دیفرانسیل) از دانشگاه شیراز شد. وی در حال حاضر، استادیار دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه یزد است..

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503

Modified Riemann-Liouville derivative (Jumarie); Advantages and Disadvantages

Mohammad Hossein Akrami

Abstract: In this paper, we introduce the modified Riemann-Liouville fractional derivative (Jumarie) and prove some of its properties and characteristics. The following are some examples of violations that show that some of the properties that Jumarie claims in his papers are not true. Finally, we identify the problems of Jumarie's proofs and suggest the correct formulas.
Keywords: Fractional calculus, Jumarie fractional derivative, Modified Riemann-Liouville derivative.

Mohammad Hossein Akrami
Department of Mathematics, Yazd University, Yazd, Iran.
Email: akrami@yazd.ac.ir

Communicated by Alireza Amini Harandi.
Article Type: Research Paper.
Received: 03/04/2022, Accepted: 06/09/2022.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133183.1503