

یافتن مجموعه پایدار وزن دار یک گراف با وزن های غیر قطعی

مهدی جهانگیری

چکیده. ویژگی ذاتی داده های دنیای واقعی عدم قطعیت و نامعین بودن است. اگر داده ها در آزمایش های معتبر یا گردآوری های استاندارد تولید شوند، نظریه احتمال یا نظریه فازی ابزاری قوی برای تحلیل و واکاوی در شرایط عدم قطعیت است. اما همیشه داده ها قابل اعتماد و اتکا نیستند به ویژه زمانی که امکان انجام دادن چندین باره یک آزمایش یا گردآوری مطمئن داده ها وجود نداشته باشد. در این شرایط، رجوع به باور خبرگان حوزه مورد بحث یک رویکرد جایگزین است و نظریه عدم قطعیت ابزاری است که می توان توسط آن، باور متخصصان را به صورت ریاضی وارد ساختار حل مسئله کرد. عدم قطعیت به طور معمول در مدل مسئله های کاربردی مانند مسایل بهینه سازی ترکیبیاتی دیده می شود. از این نوع مسایل می توان به یافتن مجموعه پایدار یک گراف اشاره کرد. مجموعه پایدار دارای طیف گسترده ای از کاربردها در بسیاری از زمینه ها است، در حالی که در اغلب موارد، مسئله های مربوط به آن بدون داده های قابل اعتماد هستند. در این مقاله به بررسی یافتن مجموعه پایدار وزن دار با وزن های غیر قطعی می پردازیم. این وزن ها دارای توزیع غیر قطعی هستند که بر اساس درجه باور کارشناس حوزه به دست آمده اند. برای این منظور، دو روش را ارائه می دهیم. در روش اول، با معرفی مفهوم قید شانس، به یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ضرایب قطعی می رسم. روش دوم نیز بر پایه مفهوم امید غیر قطعی استوار است. در آخر نیز یک مثال عددی برای این دو روش ارائه شده است.

۱. مقدمه

در کاربردهای دنیای واقعی، وقتی صحبت از پدیده های طبیعی می شود، با انواع عدم قطعیت^۱ مواجه می شویم که ما را به مطالعه آن ها ترغیب می کند. رویدادهای تصادفی اولین موردی است که بر اساس نظریه احتمال به صورت ریاضی تحلیل می شوند. نظریه فازی یکی دیگر از انواع اساسی عدم قطعیت است که توسط زاده^۲ ارائه شده و اندازه مقبولیت^۳ توسط لیو^۴ و لیو [۹] برای اندازه گیری یک رویداد فازی معرفی شده است. با وجود کاربرد نظریه های فازی و احتمالات و مسائل متعددی که به کمک آن ها مدل سازی شده اند، ممکن است نتوان برخی از مسائل را با استفاده از آنها بیان و حل کرد. این نوع مسائل معمولاً زمانی ظاهر می شوند که مدل سازی مسئله مبتنی بر داده های جمع آوری شده باشد. در مواردی که حجم اطلاعات کم باشد یا اطلاعات موجود قابل اعتماد نباشند و یا

عبارات و کلمات کلیدی: مجموعه پایدار، نظریه عدم قطعیت، برنامه ریزی عدد صحیح.

دبیر تخصصی رابط: صغری نوبختیان

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۳۱

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133001.1498>

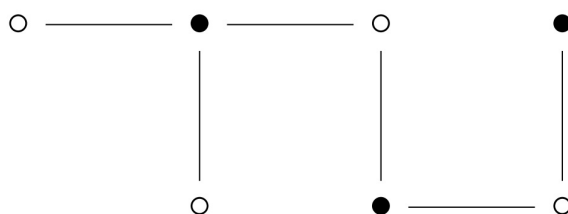
¹Uncertainty ²Zadeh ³Credibility ⁴Liu

برخی از موضوعات را نتوان در قالب مسأله فازی بررسی کرد، این نقیصه دیده می‌شود. به عنوان مثال، در موضوع تجزیه، تحلیل و برآورد خسارت زلزله در یک منطقه، یا به صورت کلی اطلاعاتی راجع به وقوع زلزله در آن منطقه به علت رخ ندادن زلزله یا عدم ثبت آن وجود ندارد و یا اگر هم وجود داشته باشد، به علت پیشرفت در ساخت و سازها و سایر موارد، اطلاعات زلزله قبلی زیاد قابل اتکا نخواهد بود. در چنین شرایطی، درخواست نظرات کارشناسان حوزه در زمینه موضوع مورد نظر می‌تواند سودمند باشد. اما برای استفاده از این نظرات، باید یک چهارچوب ریاضی وجود داشته باشد که بتوان از آنها در مدل‌سازی استفاده کرد. این رویکرد توسط لئو [۱۰] به عنوان نظریه عدم قطعیت چهارچوب‌بندی شده و در سال ۲۰۰۹ توسط همین شخص اصلاح شده است [۱۱]. از آن زمان کارهای قابل توجهی بر اساس نظریه عدم قطعیت انجام شده است. پایه ریاضی محکم و ویژگی‌های نظریه عدم قطعیت، محققان بسیاری را برانگیخت تا آن را در زمینه‌های دیگری مانند دانش مالی [۱۳]، کنترل بهینه [۲۰] و تحلیل ریسک [۱۲] بیاورند.

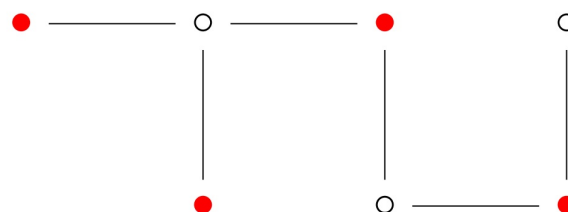
بهینه‌سازی یکی از ابزارهای قدرتمند ریاضی است که در حل مسایلی که در عمل به وجود می‌آیند، به کار بسته می‌شود. این شاخه از علم ریاضی با استفاده از داده‌هایی که به عنوان ضرایب و پارامترها در مدل‌بندی مسأله دیده می‌شوند، در صورت وجود، حداقل یک جواب بهینه برای مسأله مزبور ارایه می‌دهد. این داده‌ها می‌توانند قطعی یا غیرقطعی باشند و اگر در یک مدلی، داده غیرقطعی وجود داشته باشد، مسأله بهینه‌سازی مرتبط با آن، یک مسأله برنامه‌ریزی غیرقطعی نامیده می‌شود. علاوه بر مسایل بهینه‌سازی پیوسته، در بسیاری از مسائل گسسته مانند بهینه‌سازی ترکیبیاتی نیز عدم قطعیت بررسی شده است. از جمله این مسایل می‌توان به مسأله‌های پوشش رأسی [۳]، مجموعه احاطه‌گر [۴، ۷]، کوتاه‌ترین مسیر [۵] و بیشترین جریان [۸] اشاره کرد. در این مقاله، یافتن یکی دیگر از پارامترهای گراف که به یک مسأله بهینه‌سازی ترکیبیاتی منجر می‌شود، مسأله مجموعه پایدار وزن‌دار، بررسی خواهد شد که در آن وزن‌ها دارای توزیع غیرقطعی هستند. برای این منظور، ابتدا تعریف ریاضی مجموعه پایدار یک گراف در ادامه بیان می‌شود.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت باشد که V و E به ترتیب نشان دهنده مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های آن است. زیر مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه پایدار^۵ از گراف G نامیده می‌شود هرگاه اعضای S به صورت دو به دو غیرمجاور باشند؛ به عبارت دیگر، بین هر دو عضو از S یالی موجود نباشد. هرگاه S یک مجموعه پایدار باشد، آن‌گاه هر زیر مجموعه آن نیز یک مجموعه پایدار است. در نتیجه، مجموعه پایدار یک گراف، یک مجموعه منحصر به فرد نیست و می‌توان موضوع یافتن مجموعه پایدار با بیشینه تعداد عضو را مطرح کرد. برای این منظور، ابتدا مجموعه پایدار ماکسیمال تعریف می‌شود. مجموعه پایدار S که زیرمجموعه محض هیچ مجموعه پایدار دیگری نباشد، مجموعه پایدار ماکسیمال گفته می‌شود. اکنون با در نظر گرفتن همه مجموعه‌های پایدار ماکسیمال یک گراف، می‌توان مجموعه پایدار با بیشترین تعداد عضو را به صورت یک تعریف ریاضی بیان نمود. S را مجموعه پایدار ماکزیم یک گراف نامند هرگاه دارای بیشترین تعداد عضو در بین همه مجموعه‌های پایدار ماکسیمال آن گراف باشد. حال اگر هر رأس وزن‌دار باشد، در این صورت هدف، یافتن مجموعه پایدار S است که مجموع وزن‌های اعضای آن بیشترین باشد. در این مقاله، منظور از مسأله مجموعه پایدار، یافتن آن با بیشترین وزن است. در شکل ۱، مجموعه رأس‌های مشکی یک مجموعه پایدار ماکسیمال و در شکل ۲، مجموعه رأس‌های قرمز یک مجموعه پایدار ماکزیم را نشان می‌دهند.

^۵Stable Set



شکل ۱. مجموعه پایدار ماکسیمال



شکل ۲. مجموعه پایدار ماکزیم

مسأله یافتن مجموعه پایدار نه تنها از لحاظ نظری مورد توجه است، بلکه در زمینه های مختلف مانند نظریه کدگذاری، شناسایی الگو، بیوانفورماتیک و شیمی کاربرد دارد [۱]. بنابراین، جای تعجب نیست که با وجود NP -سخت بودن مسأله [۶]، تعداد زیادی از رویکردهای دقیق و یا فراابتکاری برای حل این مسأله وجود دارد [۲، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹]. در این مقاله برای پیدا کردن مجموعه پایدار گراف هایی وزن دار با وزن های غیرقطعی، یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح ارائه می شود. مشکل اصلی در حل این مدل، نامعلوم و غیرقطعی بودن تابع هدف است. برای غلبه بر این مشکل، با استفاده از قضیه هایی از نظریه عدم قطعیت، دو روش بیان می شوند. در روش اول، با استفاده از مفهوم قید شانس، یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ضرایب قطعی نوشته می شود و در روش دوم نیز به کمک مفهوم امید غیرقطعی به یک مدل دیگر از نوع برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ضرایب قطعی می رسمیم. یک مثال عددی نیز برای این دو روش ارائه شده است.

۲. مفاهیمی از نظریه عدم قطعیت

همانطور که در بخش ۱ گفته شد، نظریه عدم قطعیت می تواند ابزاری بالقوه برای استفاده از نظر کارشناسان باشد. در این بخش به چند مفهوم مهم و ویژگی های نظریه عدم قطعیت اشاره می کنیم. برای جزئیات بیشتر، خواننده را به کتاب نظریه عدم قطعیت که توسط لیو به نگارش درآمده است، ارجاع می دهیم [۱۴]. فرض کنیم Γ یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{L}$ یک σ -جبر روی آن باشد. در این صورت $(\Gamma, \mathcal{L})$ یک فضای اندازه پذیر و هر $\Lambda \in \mathcal{L}$ یک مجموعه اندازه پذیر یا یک رویداد نامیده می شوند. فضای اندازه پذیر $(\Gamma, \mathcal{L})$ به همراه اندازه غیرقطعی $\mathcal{M}$ که در ادامه معرفی خواهد شد، فضای اندازه پذیر غیرقطعی نامیده شده و به صورت $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱.۲. تابع مجموعه ای $\mathcal{M}$ به روی $\mathcal{L}$ یک اندازه غیرقطعی نامیده می شود هرگاه در چهار شرطی که در ادامه آمده اند، صدق کند.

$$(۱) \mathcal{M}(\Gamma) = ۱$$

$$(۲) \text{ برای هر } \Lambda \in \mathcal{L} \text{ داشته باشیم } \mathcal{M}(\Lambda) + \mathcal{M}(\Lambda^c) = ۱$$

$$(۳) \text{ برای هر دنباله شمارا از رویدادهای } \Lambda_۱, \Lambda_۲, \dots \text{ داشته باشیم}$$

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\},$$

(۴) فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ برای $k = ۱, ۲, \dots$ فضاهای اندازه‌پذیر غیرقطعی باشند. در این صورت، اندازه غیرقطعی ضرب، اندازه‌ای است که چنین تعریف می‌شود:

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\},$$

که در آن Λ_k یک رویداد دلخواه از $\mathcal{L}_k$ و $\bigwedge$ نشان دهنده مینیمم است.

تابع $f: (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمجموعه بورل B از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$f^{-1}(B) = \{\gamma | f(\gamma) \in B\} \in \mathcal{L}.$$

همچنین متغیر غیرقطعی ξ ، تابعی اندازه‌پذیر از فضای غیرقطعی $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ به $\mathbb{R}$ است به طوری که

$$(۱.۲) \quad \{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma | \xi(\gamma) \in B\},$$

یک رویداد برای هر مجموعه بورل از اعداد حقیقی است. با توجه به رابطه (۱.۲) مشخص می‌شود که $\{\xi \in B\}$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع Γ است. بنابراین، برای هر متغیر غیرقطعی ξ مقدار $\mathcal{M}\{\xi = a\}$ ، که به طور کوتاه با $\mathcal{M}\{\xi\}$ نشان داده خواهد شد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathcal{M}\{\xi = a\} = \mathcal{M}\{\gamma | \xi(\gamma) = a\}.$$

همچنین متغیر غیرقطعی ξ را نامنفی گویند هرگاه $\mathcal{M}\{\xi < ۰\} = ۰$ و مثبت نامند هرگاه $\mathcal{M}\{\xi \leq ۰\} = ۰$.

قضیه ۲.۲. [۱۴]. فرض کنیم $\xi_۱, \xi_۲, \dots$ و ξ_n متغیرهای غیرقطعی باشند و f یک تابع حقیقی اندازه‌پذیر باشد. آنگاه، $f(\xi_۱, \xi_۲, \dots, \xi_n)$ یک متغیر غیرقطعی است.

در ادامه، توزیع غیرقطعی یک متغیر غیرقطعی تعریف می‌شود. با این‌که توزیع غیرقطعی توصیف کاملی از متغیر غیرقطعی به دست نمی‌دهد اما در بسیاری از مسایل دانستن آن به جای خود متغیر، کافی است. توزیع غیرقطعی Φ از متغیر غیرقطعی ξ به صورت $\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}$ برای هر عدد حقیقی x تعریف می‌شود. انواع متفاوتی از متغیرهای غیرقطعی تعریف شده‌اند که به فراخور آنچه که قرار است در این مقاله استفاده شود، تعدادی از آن‌ها تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۲. متغیر غیرقطعی ξ را خطی گویند هرگاه دارای توزیع غیرقطعی به صورت

$$\Phi(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{اگر } a \leq x \leq b \\ ۱, & \text{اگر } x \geq b \end{cases}$$

باشد که با $\mathcal{L}(a, b)$ نشان داده شده و در آن a و b اعداد حقیقی هستند و $a < b$.

مثال ۴.۲. اگر شخصی فکر کند که اندازه قطعه‌ای بین ۱۰ و ۱۲ سانتی‌متر است، در این صورت از نظر آن شخص، اندازه آن قطعه یک متغیر غیرقطعی خطی $\mathcal{L}(10, 12)$ با توزیع غیرقطعی

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \leq 10 \\ \frac{x-10}{2}, & \text{اگر } 10 \leq x \leq 12 \\ 1, & \text{اگر } x \geq 12 \end{cases}$$

است.

تعریف ۵.۲. متغیر غیرقطعی ξ را زیگزاگ نامند اگر توزیع غیرقطعی زیگزاگ به صورت زیر داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \leq a \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & \text{اگر } a \leq x \leq b \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & \text{اگر } b \leq x \leq c \\ 1, & \text{اگر } x \geq c \end{cases}$$

این متغیر را با $\mathcal{Z}(a, b, c)$ نشان می‌دهند که در آن اعداد حقیقی a, b, c در رابطه $a < b < c$ صدق می‌کنند.

تعریف ۶.۲. متغیر غیرقطعی ξ را نرمال گویند هرگاه توزیع غیرقطعی آن به صورت

$$\Phi(x) = (1 + \exp(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\omega}))^{-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

باشد. این متغیر با $\mathcal{N}(e, \omega)$ نشان داده می‌شود که $e > 0$ و ω اعداد حقیقی هستند. توزیع نرمال غیرقطعی، استاندارد نامیده می‌شود هرگاه $e = 0$ و $\omega = 1$.

در مسایل بهینه‌سازی که قسمتی از پارامترهای مسأله به صورت متغیرهای غیرقطعی هستند، تابع توزیع این متغیرها توسط کارشناسان استخراج و ارائه می‌شوند. از طرفی، الگوریتم‌های بهینه‌سازی برای مسایل با پارامترهای معین و ثابت طراحی شده‌اند. بنابراین باید راهی یافته شود تا این مسأله‌های غیرقطعی معادل با یک مسأله با پارامترهای قطعی و ثابت شوند. در ادامه، چندین تعریف و قضیه برای این منظور بیان می‌شوند.

تعریف ۷.۲. توزیع غیرقطعی $\Phi(x)$ را منظم گویند هرگاه نسبت به x یک تابع پیوسته و صعودی باشد به طوری که $0 < \Phi(x) < 1$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

بنابراین اگر $\Phi(x)$ منظم باشد، با توجه به تعریف، باید در بازه $(0, 1)$ معکوس پذیر باشد. این معکوس؛ که توزیع غیرقطعی معکوس نامیده می‌شود؛ را با $\Phi^{-1}(\alpha)$ نشان خواهیم داد و می‌توان آن را به بازه $[0, 1]$ به صورت

$$\Phi^{-1}(0) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \Phi^{-1}(\alpha), \quad \Phi^{-1}(1) = \lim_{\alpha \uparrow 1} \Phi^{-1}(\alpha),$$

تعمیم داد. با محاسباتی ساده می‌توان توزیع غیرقطعی معکوس توزیع‌هایی که اشاره شده‌اند را به دست آورد. فرض کنیم ξ متغیر غیرقطعی با توزیع خطی $\mathcal{L}(a, b)$ باشد. در این صورت، توزیع غیرقطعی معکوس آن به شکل $\Phi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a + \alpha b$ است. همچنین اگر ξ دارای توزیع زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ باشد، آنگاه توزیع غیرقطعی معکوس آن به صورت

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2ab, & \alpha < 0.5 \\ (2 - 2\alpha)b + (2\alpha - 1)c, & \alpha \geq 0.5 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

به دست می‌آید و اگر ξ متغیر نرمال باشد آنگاه $\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\omega\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}$ توزیع غیرقطعی معکوس آن است. در ادامه، به مفهوم استقلال متغیرهای غیرقطعی خواهیم پرداخت.

تعریف ۸.۲. متغیرهای غیرقطعی $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ را مستقل گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^n (\xi_i \in B_i)\right\} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\},$$

که در آن $B_1, B_2, \dots, B_n$ زیرمجموعه‌های بول از اعداد حقیقی هستند.

قضیه ۲.۲. مشاهده شد که اگر $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای غیرقطعی و f تابع اندازه پذیر باشد، آنگاه $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ یک متغیر غیرقطعی است. با این وجود، پیدا کردن تابع توزیع Φ برای متغیر ξ بسیار سخت و اکثراً غیر ممکن است. در قضیه بعد از ویژگی‌های اصول موضوعه نظریه عدم قطعیت استفاده شده و روشی بسیار سراسر برای محاسبه توزیع غیرقطعی معکوس Φ^{-1} ارائه می‌شود.

قضیه ۹.۲. [۱۴] فرض کنیم $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای غیرقطعی مستقل با به ترتیب با توزیع‌های منظم $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ و Φ_n هستند. اگر f یک تابع صعودی اکید باشد آنگاه توزیع معکوس $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ برابر است با

$$\Phi^{-1}(\alpha) = f(\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(\alpha)).$$

نتیجه ۱۰.۲. با مفروضات قضیه ۹.۲، توزیع معکوس متغیر $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ برابر است با

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \dots + \Phi_n^{-1}(\alpha).$$

نتیجه ۱۱.۲. علاوه بر مفروضات قضیه ۹.۲، فرض کنیم ξ_i ها مثبت باشند. توزیع معکوس متغیر $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_n$ برابر است با $\Phi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) \times \Phi_2^{-1}(\alpha) \times \dots \times \Phi_n^{-1}(\alpha)$.

در بعضی از مسایل، بعد از مدل‌بندی با قیدهایی مانند $g_j(\mathbf{x}, \xi) \leq 0$ مواجه می‌شویم که دارای متغیرهایی از دو نوع قطعی و غیرقطعی هستند. در این حالت، ناحیه شدنی مسأله به صورت واضحی مشخص نمی‌شود و عملاً امکان استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی وجود ندارد. برای رفع این مشکل، برقراری این قیدها را با سطح اطمینان α_j مد نظر قرار می‌دهیم. بنابراین برای قید مورد نظر، قید شانس $\mathcal{M}\{g_j(\mathbf{x}, \xi) \leq 0\} \geq \alpha_j$ را داریم. حال مسأله اینجاست که قید شانس مذکور نیز به صورت مشخص ناحیه‌ای شدنی را توصیف نمی‌کند اما با استفاده از قضیه بعد، می‌توان از قید شانس به یک ناحیه شدنی معلوم رسید.

قضیه ۱۲.۲. [۱۴] فرض کنیم تابع $g(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ نسبت به $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ صعودی اکید و نسبت به $\xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n$ نزولی اکید باشد. علاوه بر این، متغیرهای غیرقطعی مستقل $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ را با توزیع‌های غیرقطعی

به ترتیب $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ در نظر بگیرید. در این صورت قید شانس $\mathcal{M}\{g(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq 0\} \geq \alpha$ برقرار است اگر و تنها اگر

$$g\left(x, \Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)\right) \leq 0.$$

همانند مبحث آمار ریاضی، مفهوم امید یا مقدار مورد انتظار در نظریه عدم قطعیت نقش پررنگی دارد. در بیشتر مواقع، کار با مقدار مورد انتظار بسیار آسان تر از کار با خود متغیرهای غیرقطعی است، هرچند تفسیرهای متفاوت دارند.

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید ξ یک متغیر غیرقطعی باشد. در این صورت امید غیرقطعی این متغیر به صورت

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq x\} dx,$$

تعریف می شود با این شرط که حداقل یکی از انتگرال ها متناهی باشند.

قضیه بعد، راهی را برای محاسبه امید غیرقطعی تابع f تحت شرایط خاص ارائه می دهد.

قضیه ۱۴.۲. [۱۴] فرض کنیم تابع f و متغیرهای غیرقطعی $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ در شرایط قضیه ۱۲.۲ صدق کنند. آنگاه،

$$E[f(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)] = \int_0^1 f(x, \Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_k^{-1}(\alpha), \Phi_{k+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)) d\alpha.$$

۳. فرمول بندی مسأله مجموعه پایدار

در این بخش، ابتدا مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح را برای مسأله مجموعه پایدار توضیح می دهیم. فرض کنیم G یک گراف ساده بدون جهت و $V = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه رأس ها و E مجموعه یال های آن باشند. برای فرمول بندی مسأله، به ازای هر رأس $i \in V$ ، متغیر x_i را با توجه به عضویت یا عدم عضویت در $S \subseteq V$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر } i \in S \\ 0, & \text{اگر } i \notin S \end{cases}$$

مطابق تعریف مجموعه پایدار، اگر بین دو رأس i و j از گراف G ، یال وجود داشته باشد، آنگاه حداکثر یکی از این دو رأس می تواند در مجموعه پایدار قرار گیرد. بنابراین، یک نامساوی معتبر برای هر یال $\{i, j\} \in E$ به صورت

$$(۱.۳) \quad x_i + x_j \leq 1,$$

خواهیم داشت. علاوه بر این؛ چون هدف ما یافتن مجموعه پایدار با بیشترین تعداد عضو ممکن برای گراف G است؛ پس به دنبال بیشینه کردن تابع $\sum_{i \in V} x_i$ خواهیم بود. بنابراین مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح برای مسأله مجموعه پایدار چنین است:

$$(۲.۳) \quad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

و در حالت وزن دار، مدل به صورت

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} w_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

خواهد بود. لازم به ذکر است که w_i ها، اعداد مثبت هستند.

۴. مسأله مجموعه پایدار با وزن های غیرقطعی

در ادامه، وزن های w_i در مدل (۳.۳)، متغیر غیرقطعی مثبت ξ_i در نظر گرفته خواهند شد و در نتیجه، جواب بهینه مدل ارائه شده، جواب مسأله مجموعه پایدار با حداکثر وزن غیرقطعی خواهد بود. مدل با وزن های غیر قطعی به صورت زیر است:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} \xi_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

به دلیل شکل غیرقطعی تابع هدف مسأله ۱.۴، و با توجه به محدودیت ها نمی توان بیشینه مقدار آن را پیدا کرد. برای غلبه بر این چالش، دو روش در ادامه پیشنهاد خواهند شد. در مورد اول، از ترفند معرفی یک متغیر کمکی استفاده می کنیم که به عنوان کران پایین برای تابع هدف عمل می کند. سپس با استفاده از مفهوم قید شانس، یک مدل قطعی ارائه می دهیم. در روش دیگر، با استفاده از مفهوم امید غیرقطعی، یک مدل با ضرایب قطعی به دست خواهیم آورد.

۱.۴. روش قید شانس. در این روش، متغیر کمکی t ، یک کران پایین برای تابع هدف مدل ۱.۴ در نظر گرفته می شود. بنابراین، با بیشینه کردن مقدار t ، مقدار تابع هدف مسأله ۱.۴ نیز افزایش پیدا خواهد کرد.

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \max \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & t \leq \sum_{i \in V} \xi_i x_i \\ & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

اکنون قید غیرقطعی را با قید شانس جایگذاری می کنیم

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \max \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \mathcal{M}\{t \leq \sum_{i \in V} \xi_i x_i\} \geq \alpha \\ & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

چون ξ_i ها متغیرهای غیرقطعی مثبت مستقل در نظر گرفته شده اند لذا تابع $t - \sum_{i \in V} \xi_i x_i$ نسبت به هر کدام از ξ_i ها نزولی اکید است. بنابراین، بنا به قضیه ۱۲.۲، قید شانس

$$\mathcal{M}\{t - \sum_{i \in V} \xi_i x_i \leq 0\} \geq \alpha,$$

با

$$t - \sum_{i \in V} \Phi_i^{-1}(1 - \alpha)x_i \leq 0,$$

معادل می شود و در نتیجه مدل غیرقطعی زیر را می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \max \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & t \leq \sum_{i \in V} \Phi_i^{-1}(1 - \alpha)x_i \\ & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

و سرانجام در آخرین مرحله، کران پایین t را از مسأله حذف می نماییم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} \Phi_i^{-1}(1 - \alpha)x_i \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

همان گونه که در مسأله ۵.۴ مشاهده می شود، به یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ضرایب قطعی رسیده ایم و می توانیم در صورت وجود، جوابی برای آن بیابیم. در بخش بعد، روش دیگر را که مبتنی بر امید غیرقطعی است ارایه خواهیم داد.

۲.۴. روش امید غیرقطعی. در این بخش، به جای تابع هدف مسأله ۱.۴ از مقدار مورد انتظار آن استفاده خواهیم کرد. بنابراین مسأله ۱.۴ به صورت

$$\begin{aligned} \max \quad & E[\sum_{i \in V} \xi_i x_i] \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.4)$$

تبدیل می‌شود. با قرار دادن $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i \in V} \xi_i x_i$ مشاهده می‌شود که تابع f نسبت به هر کدام از ξ_i ها صعودی اکید است. بنابراین طبق قضیه ۱۴.۲ امید تابع f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E[f(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)] &= E[\sum_{i \in V} \xi_i x_i] \\ &= \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n, \Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(\alpha)) d\alpha \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i \in V} \Phi_i^{-1}(\alpha) x_i \right) d\alpha \\ &= \sum_{i \in V} x_i \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

(۷.۴)

اکنون با استفاده از رابطه ۷.۴ مسأله ۶.۴ به صورت

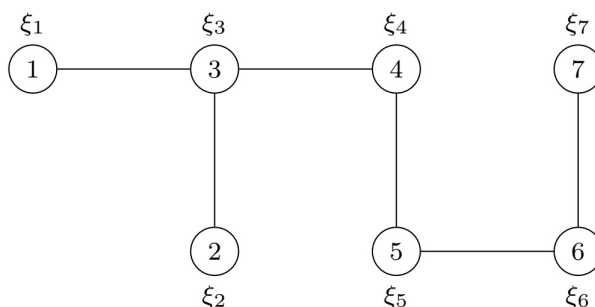
$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha) d\alpha \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in E, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

(۸.۴)

نوشته می‌شود که به وضوح یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ضرایب قطعی است. در بخش بعد، یک مثال عددی با استفاده از این دو روش حل خواهد شد.

۵. یک مثال عددی

در این بخش، گراف شکل (۳) را وزن دار غیرقطعی با وزن های $\xi_1 = \mathcal{L}(2, 7)$ ، $\xi_2 = \mathcal{N}(3, 5)$ ، $\xi_3 = \mathcal{Z}(2, 4, 5)$ ، $\xi_4 = \mathcal{Z}(1, 6, 8)$ ، $\xi_5 = \mathcal{L}(5, 10)$ ، $\xi_6 = \mathcal{N}(4, 6)$ و $\xi_7 = \mathcal{Z}(3, 7, 10)$ در نظر گرفته شده است. در روش قید شانس باید مقادیری برای سطح اطمینان α تخصیص داده شوند که برابر با $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8, 0.99$ خواهند بود.



شکل ۳. گراف وزن دار با وزن های غیر قطعی

برای این که روش قید شانس و مدل (۵.۴) به کار بسته شود، باید برای هر متغیر قطعی ξ_i ، مقادیر $\Phi_i^{-1}(\alpha)$ را به ازای همه α های داده شده محاسبه کرد. این مقادیر در جدول ۱ ارایه شده اند.

جدول ۱. مقادیر $\Phi_i^{-1}(\alpha)$ به ازای $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.99$

ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7
$\Phi_i^{-1}(0.1)$	۲/۵۰۰۰	-۳/۰۵۷۰	۲/۴۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۵/۵۰۰۰	-۳/۲۶۸۴	۳/۸۰۰۰
$\Phi_i^{-1}(0.3)$	۳/۵۰۰۰	۰/۶۶۴۳	۳/۲۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۶/۵۰۰۰	۱/۱۹۷۲	۵/۴۰۰۰
$\Phi_i^{-1}(0.5)$	۴/۵۰۰۰	۳/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۶/۰۰۰۰	۷/۵۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۷/۰۰۰۰
$\Phi_i^{-1}(0.7)$	۵/۵۰۰۰	۵/۳۳۵۷	۴/۴۰۰۰	۶/۸۰۰۰	۸/۵۰۰۰	۶/۸۰۲۸	۸/۲۰۰۰
$\Phi_i^{-1}(0.9)$	۶/۵۰۰۰	۹/۰۵۷۰	۴/۸۰۰۰	۷/۶۰۰۰	۹/۵۰۰۰	۱۱/۲۶۸۴	۹/۴۰۰۰
$\Phi_i^{-1}(0.99)$	۶/۹۵۰۰	۱۵/۶۶۷۱	۴/۹۸۰۰	۷/۹۶۰۰	۹/۹۵۰۰	۱۹/۲۰۰۵	۹/۹۴۰۰

با قرار دادن مقادیر $\Phi_i^{-1}(\alpha)$ به دست آمده در مدل (۵.۴) و حل آن به ازای α های مشخص شده، مجموعه پایدار وزن دار برای گراف شکل ۳ به دست می آید که در جدول ۲ نشان داده شده اند.

جدول ۲. مقادیر $\Phi_i^{-1}(\alpha)$ به ازای $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.99$

α	مجموعه پایدار متناظر	جواب بهینه مدل قید شانس
۰/۱	{۱, ۵, ۷}	(۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۰, ۱)
۰/۳	{۱, ۲, ۵, ۷}	(۱, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۱)
۰/۵	{۱, ۲, ۵, ۷}	(۱, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۱)
۰/۷	{۱, ۲, ۵, ۷}	(۱, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۱)
۰/۹	{۱, ۲, ۵, ۷}	(۱, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۱)
۰/۹۹	{۱, ۲, ۴, ۶}	(۱, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰)

همچنین در روش امید غیر قطعی، توجه به این نکته ضروری است که با محاسبه $\int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha) d\alpha$ یک عدد به دست می آید. بنابراین، این روش به مقدار α بستگی ندارد. در جدول ۳ مقادیر $\int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha) d\alpha$ برای هر وزن غیر قطعی محاسبه شده اند.

جدول ۳. مقادیر $\int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha) d\alpha$ برای ξ_i های داده شده

ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7
$\int_0^1 \Phi_i^{-1}(\alpha) d\alpha$	۴/۵۰۰۰	۳/۰۰۰۰	۳/۷۵۰۰	۵/۲۵۰۰	۷/۵۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۶/۷۵۰۰

با قرار دادن وزن‌های محاسبه شده در جدول ۳ در مدل امید غیرقطعی (۸.۴) و حل این مدل، جواب بهینه $(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ و به طور معادل مجموعه پایای وزن‌دار $\{1, 2, 5, 7\}$ به دست می‌آید.

۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله یافتن مجموعه پایدار وزن‌دار یک گراف با وزن‌های غیرقطعی را روی رأس‌ها در نظر گرفتیم و دو مدل غیرقطعی با تمرکز بر مفهوم نظریه عدم قطعیت معرفی شدند. در روش اول، مفهوم قید شانس معرفی شد و توسط آن به یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح رسیدیم. روش دوم نیز بر پایه مفهوم امید غیرقطعی استوار است. نسخه‌های مختلفی از مسأله مجموعه پایدار وجود دارد و ممکن است عدم قطعیت در داده‌های آنها نیز وجود داشته باشد و در نتیجه می‌توان رویکرد مشابهی را برای آنها در نظر گرفت.

مراجع

- [1] I. M. Bomze, M. Budinich, P. M. Pardalos and M. Pelillo, *The maximum clique problem*, Handbook of combinatorial optimization, Supplement, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, **A** (1999) 1–74.
- [2] S. Burer, R. D. C. Monteiro and Y. Zhang, Maximum stable set formulations and heuristics based on continuous optimization, *Math. Program.*, **94** (2002) 137–166.
- [3] L. Chen, J. Peng, B. Zhang and S. Li, Uncertain programming model for uncertain minimum weight vertex covering problem, *J. Intell. Manuf.*, **28** 2017 625–632.
- [4] M. Djahangiri and A. Ghaffari-Hadigheh, Uncertain weighted dominating set: a prototype application on natural disaster relief management, *Soft Comput.*, **22** (2018) 1003–1012.
- [5] Y. Gao, Shortest path problem with uncertain arc lengths, *Comput. Math. Appl.*, **62** (2011) 2591–2600.
- [6] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.
- [7] A. Ghaffari-Hadigheh, Roman domination problem with uncertain positioning and deployment costs, *Soft Comput.*, **24** (2020) 2637–2645.
- [8] Sh. Han, Z. Peng and S. Wang, The maximum flow problem of uncertain network, *Inform. Sci.*, **265** (2014) 167–175.

- [9] B. Liu and Y. K. Liuan, Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **10** (2002) 445–450.
- [10] B. Liu, *Uncertainty theory*, Second edition. Studies in Fuzziness and Soft Computing, **154**, Springer, Berlin, 2007.
- [11] B. Liu, Some research problems in uncertainty theory, *J. Uncertain Syst.*, **3** (2009) 3–10.
- [12] B. Liu, Uncertain risk analysis and uncertain reliability analysis, *J. Uncertain Syst.*, **4** (2010) 163–170.
- [13] B. Liu, Toward uncertain finance theory, *J. Uncertain. Anal. Appl.*, **1** (2013) 1–5.
- [14] B. Liu, *Uncertainty theory*, **24**, Springer, Berlin, 2015.
- [15] E. Maslov, M. Batsyn and P. M. Pardalos, Speeding up branch and bound algorithms for solving the maximum clique problem, *J. Global Optim.*, **59** (2014) 1–21.
- [16] S. Rebennack, M. Oswald, D. O. Theis, H. Seitz, G. Reinelt and P. M. Pardalos, A branch and cut solver for the maximum stable set problem, *J. Comb. Optim.*, **21** (2011) 434–457.
- [17] F. Rossi and S. Smriglio, A branch-and-cut algorithm for the maximum cardinality stable set problem, *Oper. Res. Lett.*, **28(2)** (2001) 63–74.
- [18] P. San Segundo, D. Rodríguez-Losada and A. Jiménez, An exact bit-parallel algorithm for the maximum clique problem, *Comput. Oper. Res.*, **38** (2011) 571–581.
- [19] E. Tomita and T. Kameda, An efficient branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique with computational experiments, *J. Global Optim.*, **37** (2007) 95–111.
- [20] Y. Zhu, Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model, *Cybern. Syst. Int. J.*, **41** (2010) 535–547.

مهدی جهانگیری

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

djahangiri.mehdi@maragheh.ac.ir

مهدی جهانگیری در سال ۱۳۶۰ در تبریز متولد شد. او سال ۱۳۸۲ در مقطع کارشناسی ریاضی محض دانشگاه شهید مدنی آذربایجان پذیرفته شد. همچنین در همان دانشگاه تحصیلات دوره های ارشد و دکتری خود را در رشته ریاضی کاربردی و گرایش تحقیق در عملیات تحت راهنمایی دکتر علیرضا غفاری حدیقه به اتمام رساند.



Finding the weighted stable set of a graph with uncertain weights

Mehdi Jahangiri

Abstract: The inherent characteristics of real-world data is uncertainty. If data is generated in valid experiments or collected standard, probability theory or fuzzy theory is a powerful tool for analysis it in the uncertainty conditions. But data is not always reliable; especially when it is not possible to perform multiple tests or reliable data collection. In this context, referring to the beliefs of experts in the field in question is an alternative approach and uncertainty theory is a tool by which the beliefs of experts can be mathematically incorporated into the problem-solving structure. A stable set has a wide range of applications in many fields, while in most cases its problems are without reliable data. In this paper, we investigate the finding of stable weighted sets with uncertain weights. These weights have an uncertain distribution based on the degree of belief of the field expert. For this purpose, we offer two methods. In the first method, by introducing the concept of chance constraint, we come to an integer linear programming model with definite coefficients. The second method is based on the concept of uncertain expected value. Finally, a numerical example for these two methods is presented.

Keywords: stable set, uncertainty theory, integer programming.

Mehdi Jahangiri

Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Maragheh University, Maragheh, Iran.

Email: djahangiri.mehdi@maragheh.ac.ir

Communicated by Soghra Nobakhtian.

Article Type: Research Paper.

Received: 08/03/2022, Accepted: 22/08/2022.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133001.1498>