

پیرامون آنتروپی

منوچهر شهامت

چکیده. در فضاهای تغییرجای تحویل ناپذیر، کلمه m هم گام کننده است، هرگاه vm و mw کلمه‌های مجاز باشند، آن گاه vmw نیز مجاز باشد. کلمه m نیم هم گام کننده (ضعیف) است، هرگاه عنصر از چپ برایای (نامتناهی) x_- وجود داشته باشد به طوری که اگر x_-m و mw مجاز باشند، آنگاه x_-mw نیز مجاز باشد. تامسن یک مولفه‌ی هم گام شونده را در نظر گرفت و ثابت کرد آنتروپی دسته خاصی از فضاهای تغییرجای متناهی از درون به آنتروپی هم گام شونده آن همگرا است. ما با استفاده از یک رویکرد نسبتاً متفاوت نشان می‌دهیم این نتیجه را می‌توان به فضاهای هم گام شونده ضعیف تعمیم داد. نمونه‌ای از فضاهای نیم هم گام شونده و نیم هم گام شونده ضعیف، فضاهای دایک می‌باشند. مولدهای متوازن ابتدا برای فضاهای تغییرجای دایک تعریف شده است. چنین مولدهایی را به فضای تغییرجای کلی‌تری به نام فضای تغییرجای متوازن تعمیم داده و ثابت می‌کنیم این فضاها درهم آمیخته و نیم هم گام شونده هستند. سپس آنتروپی نیم هم گام شونده ضعیف را برای آن تقریب می‌زنیم.

۱. مقدمه

در سیستم‌های دینامیکی^۱ بیشترین فضایی که مورد مطالعه قرار گرفته است، فضاهای تغییرجا از نوع متناهی^۲ است. یک فضای تغییرجای متناهی فضایی است که تعداد متناهی کلمه ممنوعه^۳ داشته باشد [۱۰]. تعریف معادل فضای تغییرجای متناهی آن است که عددی از قبل مشخص یافت شود که همه کلمه‌ها که طول آنها حداقل برابر عدد مفروض هستند، کلمه هم گام کننده^۴ باشند. یک فضای تغییرجای تحویل ناپذیر^۵ که حداقل دارای یک کلمه هم گام کننده است را یک فضای هم گام شونده^۶ نامند. یکی از توسیع‌های فضای هم گام شونده، هم گام شونده ضعیف^۷ است. در این مقاله دسته‌ای از فضاهای هم گام شونده را معرفی می‌نماییم که دارای مولد متوازن^۸ هستند و نشان می‌دهیم هر فضای هم گام شونده که دارای بلوک متوازن هم گام کننده باشد، تغییرجای کامل است. همچنین نشان خواهیم داد فضاهای دارای مولد متوازن، آمیختگی^۹ دارند.

ظرفیت اطلاعات یا توانایی انتقال داده‌ها توسط آنتروپی^{۱۰} اندازه‌گیری می‌شود. درواقع آنتروپی عددی حقیقی است که پیچیدگی سیستم‌ها را اندازه می‌گیرد. یکی از دلایل اهمیت این عدد آن است که پایای تزویج^{۱۱} است. ابتدا شنون^{۱۲} در مقاله‌ای در زمینه‌ی نظریه‌ی اطلاعات مفهوم آنتروپی را معرفی کرد. سپس کلموگوروف^{۱۳} و سینای^{۱۴} آنتروپی اندازه‌ای

عبارات و کلمات کلیدی: مولد، آنتروپی، فضاهای تغییرجا.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی

نوع مقاله: ترویجی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۶

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132654.1493>

¹dynamical systems ²subshift of finite type (SFT) ³forbidden words ⁴synchronized ⁵irreducible ⁶synchronizing system ⁷weak synchronizing system ⁸balanced generator ⁹mixing ¹⁰entropy ¹¹invariant ¹²Shannon ¹³Kolmogorov ¹⁴Sinai

را در نظریه‌ی ارگودیک تعریف کردند. پس از آن آدلر^{۱۵}، کنهیم^{۱۶} و مک‌آندرو^{۱۷} آنتروپی توپولوژیکی را برای نگاشت‌های پیوسته معرفی نمودند. در حالت کلی به دو روش می‌توان آنتروپی فضای تغییرجای X را تقریب زد. روش اول: فضای تغییرجای X اشتراک زیرفضاهای تغییرجای X_k است که $X_{k+1} \subseteq X_k$. در این حالت [۱۰]، قضیه ۴.۴ [۶]

$$h(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(X_k).$$

روش دوم: $X_k \subseteq X_{k+1}$ ، $X = \overline{\cup X_k}$. در این صورت [۱۸]

$$h(X) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} h(X_k)$$

نامساوی در حالات خاصی، مثلاً برای سافیک‌ها، به تساوی تبدیل می‌شود. آنتروپی هم‌گام‌شونده یک فضای هم‌گام‌شونده؛ که با نماد $h_{syn}(X)$ نشان داده می‌شود؛ در [۱۸] و [۱۷] تعریف شد. در بخش‌های ۳ تا ۶ به معرفی و شناخت مقدماتی از سیستم‌های دینامیکی، گراف‌ها، فضاهای تغییرجای مهم و کاربردی مانند بتا می‌پردازیم. در بخش ۷ به معرفی تعدادی از آنتروپی‌ها مانند آنتروپی اندازه‌ای و آنتروپی توپولوژیکی می‌پردازیم. در بخش ۸ ما این آنتروپی را به آنتروپی فضاهای هم‌گام‌شونده ضعیف $h_{wsyn}(X)$ گسترش می‌دهیم و نشان خواهیم داد دسته مشخصی از تغییرجای متناهی مانند X_k موجود است که $X_k \subseteq X_{k+1}$ و $h_{wsyn}(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} h(X_k)$. در بخش ۹ با معرفی موادهای متوازن به عنوان دسته‌ای خاص از فضاهای نیم‌گام‌شونده و هم‌گام‌شونده ضعیف، فرمولی ساده‌تر برای محاسبه $h_{wsyn}(X)$ معرفی می‌کنیم و به کمک آن، آنتروپی فضاهای دایک را تقریب می‌زنیم.

۲. پیشگفتار

اطلاعات اغلب توسط دنباله‌ای از نمادهای گسسته از مجموعه‌ای متناهی بیان می‌شوند. رایانه‌ها اطلاعات را با دنباله‌هایی از ۰ و ۱ ذخیره می‌کنند. در همه‌ی این مثال‌ها، مجموعه‌ای چون A شامل تعداد متناهی یا شمارا نماد^{۱۸} وجود دارد که آن را الفبا^{۱۹} می‌نامیم. دنباله‌ی متناهی از اعضای A را یک کلمه یا بلوک^{۲۰} می‌نامیم. مجموعه‌ی متناهی A را در نظر می‌گیریم. $|A|$ تغییرجای کامل^{۲۱} مجموعه‌ی دنباله‌های از دو طرف نامتناهی از اعضای A است که به صورت $A^{\mathbb{Z}}$ نمایش داده می‌شوند.

نگاشت σ را نگاشت تغییرجای^{۲۲} روی تغییرجای کامل $A^{\mathbb{Z}}$ می‌نامیم هرگاه $\sigma(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$. زیرمجموعه‌ی X از $A^{\mathbb{Z}}$ را یک فضای تغییرجای گوئیم هرگاه بسته و σ -پایا باشد. مجموعه‌ی همه کلمات مجاز از طول^{۲۳} n در X را با $W_n(X)$ نشان می‌دهیم و همه‌ی کلمات مجاز X را با $W(X)$ نشان می‌دهیم. فضای تغییرجای X را تحویل‌ناپذیر^{۲۴} گوئیم هرگاه برای همه‌ی بلوک‌های مجاز مانند u, v ، بلوکی مانند w یافت شود که بلوک uvw نیز مجاز باشد. گراف^{۲۵} G شامل مجموعه‌ی متناهی $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ از رئوس^{۲۶} و مجموعه‌ی $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$ از یال‌ها^{۲۷} است. اگر $x \in X$ ، آن‌گاه $x_+ = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+}$ و $x_- = (x_i)_{i \leq 0}$ را راهی^{۲۸} از راست نامتناهی (از چپ نامتناهی)^{۲۹} نامند. برای x_- تعریف می‌کنیم

$$w_+(x_-) = \{x_+ \in X^+ : x_-x_+ \in X\}$$

و آن را مجموعه پیشرو^{۳۰} می‌نامیم. برای بلوک m نیز مجموعه پیشرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_+(m) = \{x_+ \in X^+ : mx_+ \in X\}.$$

¹⁵ Adler ¹⁶ Konheim ¹⁷ McAndrew ¹⁸ symbol ¹⁹ alphabet ²⁰ block ²¹ full A-shift ²² shift map ²³ length ²⁴ irreducible ²⁵ graph ²⁶ vertex ²⁷ edge ²⁸ path ²⁹ right (resp. left) infinite X-ray ³⁰ follower set

تمام مجموعه‌های پیشرو را می‌توان به‌عنوان رأس‌های یک گراف در نظر گرفت. یالی با برچسب a از رأس I_1 به رأس I_2 وجود دارد اگر و تنها اگر نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد که $I_1 = w_+(x_-)$ و $I_2 = w_+(x_-a)$ ، این گراف را گراف کریگر ^{۳۱} نامند. اگر m کلمه هم‌گام‌کننده فضای X باشد، آن‌گاه مولفه تحویل‌ناپذیر ^{۳۲} شامل رأس $w_+(m)$ از گراف کریگر را با نماد X_+^m نشان می‌دهند و آن را گراف فیشر ^{۳۳} نامند. در حالت کلی ممکن است چندین مسیر با برچسب کلمه هم‌گام‌کننده در گراف فیشر دیده شود. اما اگر تنها یک مسیر وجود داشته باشد، کلمه هم‌گام‌کننده را هم‌گام‌کننده قوی ^{۳۴} می‌نامند. بنابراین برای فضاهای هم‌گام‌شونده قوی این مسیر یکتا است [۱۴]. اکنون به معرفی سیستم‌های دینامیکی می‌پردازیم.

۳. سیستم‌های دینامیکی

سیستم‌های دینامیکی شاخه‌هایی گسترده از دانش ریاضی و کاربردهای ریاضی را در بر گرفته و به‌عنوان یکی از زمینه‌های فعال آن مطرح است. جریان‌های اصلی این علم به‌واسطه‌ی تحلیل یک مدل خاص در یک نمونه‌ی طبیعی به‌راه افتاده‌است. مثلاً پوانکاره با استفاده از مکانیک نیوتن در حل مسئله‌ی سه جسم ^{۳۵} تأثیر به‌سزایی در پیشرفت این علم داشت. آنچه وی انجام داد تحلیل یک مدل سیستم در نمونه طبیعی بود.

این مدل‌سازی فقط به علوم طبیعی محدود نبوده، و در ریاضیات نیز انجام می‌گیرد. به‌عنوان نمونه، نگاشت پوانکاره که در هسته مرکزی اکتشاف‌های او قرار دارد، نوعی مدل برای دسته‌بندی جواب‌های معادلات دیفرانسیل است. دینامیک نمادین و زنجیر مارکف توپولوژیکی نیز که به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عمومی نسبت داده می‌شود، مدلی برای ساختار خم‌ها در فضای فاز است.

امروزه ریاضی‌دان‌های بسیاری از این رشته برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی در شاخه‌هایی از دانش مانند هواشناسی، زمین‌شناسی، مدارهای ماهواره‌ای، گرانش و کیهان‌شناسی استفاده می‌کنند.

دسته‌بندی مختلفی از انواع سیستم‌های دینامیکی مطرح است. به‌عنوان مثال، سیستم‌های دینامیکی گسسته ^{۳۶} و پیوسته ^{۳۷} سیستم‌های متناهی در مقابل نامتناهی و مختلط در مقابل حقیقی. آنچه در همه‌ی سیستم‌های دینامیکی به‌ویژه در فیزیک مشترک است حضور سه عنصر فضا، زمان و قانون تحول است. حضور این سه مولفه در ترکیب هر سیستم دینامیکی، از ارتباط عمیق این رشته با مدل‌سازی‌های فیزیکی حکایت دارد. هریک از سه مولفه یادشده می‌تواند دارای ساختاری مستقل باشد، که این ساختار می‌تواند یک فضای توپولوژیک، یک فضای اندازه و یا ساختاری دیگر باشد. رایج‌ترین مدل‌ها برای زمان در سیستم‌های دینامیکی گروه جمعی $\mathbb{Z}$ ، نیم‌گروه $\mathbb{Z}_+$ ^{۳۸} و گروه $\mathbb{R}$ هستند که به‌ترتیب در همیومورفیسم‌ها ^{۳۹}، نگاشت‌ها ^{۴۰} و معادلات دیفرانسیل معمولی ^{۴۱} ظاهر می‌شوند.

یک سیستم دینامیکی سه‌تایی (X, G, T) است که (X, T_X) یک فضای توپولوژیک ^{۴۲}، G یک گروه یا نیم‌گروه و T تابعی پیوسته است که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

$$(1) \text{ به‌ازای هر } x \in X, T(0, x) = x.$$

$$(2) \text{ برای هر } g, h \in G \text{ و برای هر } x \in X, T(g, T(h, x)) = T(gh, x).$$

به‌طورکلی یک سیستم دینامیکی ^{۴۳} چگونگی تغییرات فضای حالت با گذشت زمان طبق قانونی ثابت است. در واقع، دوتایی (X, T) شامل فضای X و نگاشت $T: X \rightarrow X$ یک سیستم دینامیکی است هرگاه T حالت‌های سیستم را با تحول زمان نشان دهد. به‌عنوان مثال، اگر $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ و $T: X \rightarrow X$ نگاشتی با ضابطه‌ی $T(x) = 2x$ به پیمانه ۱ باشد، آنگاه (X, T) یک سیستم دینامیکی است. نگاشت T می‌تواند یک به یک ^{۴۴} و در نتیجه وارون‌پذیر ^{۴۵} باشد.

³¹Krieger graph ³²irreducible component ³³Fischer cover ³⁴strong synchronized ³⁵three body problem ³⁶discrete dynamic system ³⁷continuous dynamic system ³⁸semigroup ³⁹hemomorphisms ⁴⁰maps ⁴¹Ordinary differential equations ⁴²topological space ⁴³dynamical system ⁴⁴one to one ⁴⁵invertible function

۴. دینامیک نمادی

به هر دو دنباله‌ی $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ و $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ از فضای $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ عدد $N(x, y)$ را نسبت می‌دهیم که به صورت

$$N(x, y) = \min\{|i| : x_i \neq y_i\}$$

تعریف می‌شود. یعنی $N(x, y)$ اولین مختصی است که دو دنباله با یکدیگر متفاوت هستند. سپس متر فضا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(1.4) \quad d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{N(x, y)}} & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

با این متر فضای $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ به یک فضای کانتور^{۴۶} تبدیل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که به یک فضای متری فشرده‌ی تام^{۴۷} و کلاً ناهمبند^{۴۸}، فضای کانتور گفته می‌شود.

نگاشت σ با توپولوژی القایی توسط متر (۱.۴) یک همسانریختی است. فضای تغییرجای X تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر نگاشت تغییرجای $\sigma : X \rightarrow X$ ترا یا باشد.

دنباله‌های نمادی که مورد استفاده قرار می‌گیرند اغلب شامل تعدادی قید^{۴۹} هستند. برای نمونه، حروف فارسی به هر صورتی نمی‌توانند در کنار یکدیگر قرار گرفته و یک کلمه‌ی مجاز در زبان فارسی بسازند. لذا مفهوم فضای تغییرجا را معرفی می‌کنیم که زیرمجموعه‌ای از تغییرجای تمام است و در مجموعه‌ی مشخصی از قیود صدق می‌کند.

فرض کنیم $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از کلمات روی الفبای $\mathcal{A}$ باشد که آنها را کلمات غیرمجاز^{۵۰} می‌نامیم. مجموعه‌ی $X_{\mathcal{F}}$ را زیرمجموعه‌ای از اعضای $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ تعریف می‌کنیم که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{F}$ نباشند. زیرمجموعه‌ی X از $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ را یک فضای تغییرجا^{۵۱} گوئیم هرگاه $X = X_{\mathcal{F}}$ که $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از کلمات غیرمجاز روی الفبای $\mathcal{A}$ است.

تعریف معادل دیگری نیز برای فضای تغییرجا وجود دارد به این صورت که زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ را یک فضای تغییرجا گوئیم اگر و تنها اگر بسته و σ -پایا باشد (زیرمجموعه‌ی X از $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ را σ -پایا گوئیم هرگاه $\sigma(X) \subseteq X$).

مثال ۱.۴. اگر $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ، آنگاه $\mathcal{F} = \emptyset$. همچنین، اگر X مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌هایی روی $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ باشد که ۱ها می‌توانند نامتناهی بار در هر دو جهت ظاهر شوند و تعداد ۰ها بین هر دو ۱ متوالی عضوی از $\{1, 2\}$ باشد، آنگاه $X = X_{\mathcal{F}}$ که $\mathcal{F} = \{11, 000\}$.

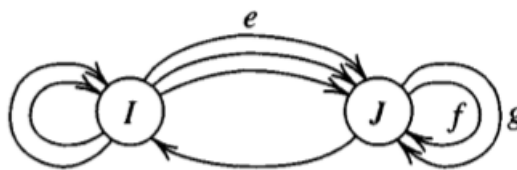
تعریف ۲.۴. فضای تغییرجایی که دارای مجموعه‌ای متناهی از کلمات غیرمجاز باشد تغییرجای از نوع متناهی^{۵۲} نامیده می‌شود.

هر دو تغییرجای ارائه شده در مثال ۱.۴ از نوع متناهی هستند. تغییرجاهای از نوع متناهی نقش مهمی در زمینه‌های مختلف ریاضیات به‌ویژه سیستم‌های دینامیکی دارند. مطالعه‌ی آنها منجر به حل برخی مسائل کاربردی مهم مانند یافتن طرح‌های کدگذاری کارا برای ذخیره‌ی داده‌ها روی دیسک‌های کامپیوتری می‌شود.

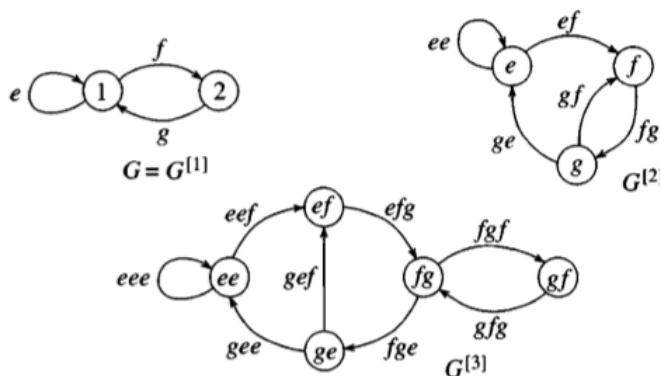
۵. گراف

گراف G شامل مجموعه‌ی $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$ از رئوس و مجموعه‌ی $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$ از یال‌ها را در نظر می‌گیریم. رأس ابتدایی^{۵۳} هر یال را با $i(e) \in \mathcal{V}$ و انتهای^{۵۴} آن را با $t(e) \in \mathcal{V}$ نشان می‌دهیم. یالی که ابتدا و انتهای آن یکسان باشد را طوقه^{۵۵}

⁴⁶Cantor ⁴⁷perfect ⁴⁸totally disconnected ⁴⁹constraint ⁵⁰forbidden words ⁵¹shift space ⁵²shift of finite type ⁵³invariant ⁵⁴initial ⁵⁵loop



شکل ۱. مثالی برای یک گراف



شکل ۲. مرتبه‌های ۱، ۲، و ۳

می‌نامیم. هر مسیر ^{۵۶} از اتصال متوالی تعدادی یال به دست می‌آید. تعداد یال‌ها طول ^{۵۷} مسیر نامیده می‌شود. اگر ابتدا و انتهای مسیری یکسان باشد، آن‌گاه آن مسیر دور ^{۵۸} نامیده می‌شود. هر طوقه دوری با طول یک است. تعداد یال‌های ورودی به یک رأس را درجه ورود ^{۵۹} و تعداد یال‌های خروجی از یک رأس درجه خروج ^{۶۰} نامیده می‌شود. برای مثال شکل ۱ گرافی با دو رأس I و J را نشان می‌دهد که درجه ورود و خروج رأس J به ترتیب ۵ و ۱ است. در این گراف ۴ طوقه وجود دارد. اگر برای رأس‌های I, J ، a_{IJ} برابر تعداد یال‌هایی در گراف G باشد که ابتدای آن‌ها I و انتهای آن‌ها J باشد، آنگاه ماتریس $A = [a_{IJ}]$ ماتریس مجاورت گراف ^{۶۱} نامیده می‌شود. برای مثال ماتریس مجاورت با گراف شکل ۱ به صورت

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ است.}$$

به هر ماتریس مربعی با درایه‌های نامنفی نیز می‌توان گرافی نسبت داد. چنانچه A ماتریسی مربعی از مرتبه r باشد، گراف متناظر با ماتریس A گرافی با مجموعه رأس‌های

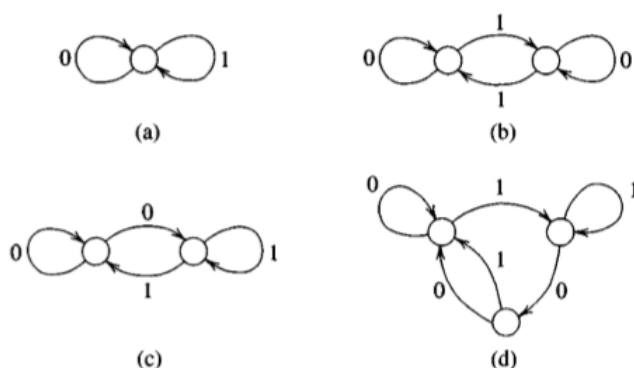
$$\{1, 2, \dots, r\}$$

است که به تعداد a_{IJ} یال مجزا از رأس I به رأس J دارد.

برای هر عدد طبیعی مانند N ، گراف G^N ؛ که N مین گراف بالاتر ^{۶۲} G نامیده می‌شود؛ گرافی با مجموعه رأس‌های $\mathcal{V}(G^N) = \mathcal{V}(G)$ است که برای هر مسیر از طول N در گراف G از I به J ، یالی از I به J وصل می‌کنیم. برای مثال در شکل ۲ گراف‌های G ، G^2 و G^3 نشان داده شده است.

یک مسیر $\pi = e_1 e_2 \dots e_n$ روی گراف G دنباله‌ای متناهی از یال‌هایی است که $t(e_i) = i(e_{i+1})$. تغییر جای یالی X_G فضای تغییرجایی روی $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

⁵⁶ path ⁵⁷ length ⁵⁸ cycle ⁵⁹ in-degree ⁶⁰ out-degree ⁶¹ adjacency matrix ⁶² Nth higher edge graph



شکل ۳. گراف‌های متفاوت می‌توانند نمایش یکسانی داشته باشند.

$$X_G = \left\{ \xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} : t(\xi_i) = i(\xi_{i+1}) \right\}.$$

گراف برچسب‌دار $G^{۶۳}$ ، دوتایی $(G, \mathcal{L})$ است که G گرانی با مجموعه یال‌های $\mathcal{E}$ است و نگاشت $\mathcal{L}$ به هر یال e از G یک برچسب $\mathcal{L}(e)$ از A را نسبت می‌دهد. گراف G را گراف زیربنای G گوئیم. برچسب مسیری مانند $\pi = e_1 e_2 \dots e_n$ در G به صورت

$$\mathcal{L}(\pi) = \mathcal{L}(e_1) \mathcal{L}(e_2) \dots \mathcal{L}(e_n)$$

تعریف می‌شود. اگر $\xi = \dots e_{-1} e_0 e_1 e_2 \dots \in X_G$ ، برچسب ξ را به صورت

$$\mathcal{L}(\xi) = \dots \mathcal{L}(e_{-1}) \mathcal{L}(e_0) \mathcal{L}(e_1) \dots$$

تعریف کرده و مجموعه‌ی همه‌ی برچسب‌های مسیرهای از دوطرف نامتناهی روی G را به صورت

$$X_G := \{ \mathcal{L}_{\infty}(\xi) : \xi \in X_G \} = \mathcal{L}_{\infty}(X_G).$$

نشان می‌دهیم.

واضح است که ممکن است گراف‌های متفاوتی نماینده‌ی یک فضای تغییرجا باشند. برای مثال در شکل ۳، هر چهار گراف نمایشی برای فضای تغییرجای کامل روی $\{0, 1\}$ هستند. یعنی

$$X_{G_a} = X_{G_b} = X_{G_c} = X_{G_d} = \{0, 1\}^{\infty}.$$

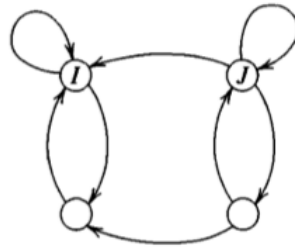
تعریف ۱.۵. گراف G تحویل‌ناپذیر است هرگاه برای هر دو رأس I و J ، مسیری از I به J وجود داشته باشد.

شکل‌های ۴ و ۵ به ترتیب نمایش گراف‌های تحویل‌ناپذیر و تحویل‌پذیر هستند.

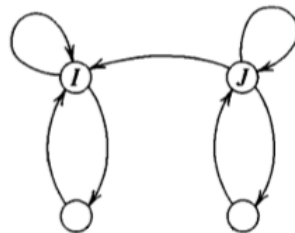
رابطه‌ی هم‌ارزی $\approx$ را روی $\mathcal{V}$ به این صورت تعریف می‌کنیم که $I \approx J$ اگر و تنها اگر مسیری از I به J و نیز برعکس وجود داشته باشد. همه‌ی رؤوس موجود در یک هم‌ارزی به همراه یال‌هایی که رؤوس ابتدا و انتهای آنها در آن رده است زیرگراف تحویل‌ناپذیری از G را تشکیل می‌دهد که آن را یک مؤلفه‌ی $G^{۶۴}$ می‌نامیم.

تعریف ۲.۵. کلمه‌ی $w \in B(X_G)$ یک کلمه‌ی جادویی ۶۵ برای $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$ است هرگاه هر مسیر در G با برچسب w به رأس یکسانی ختم شود.

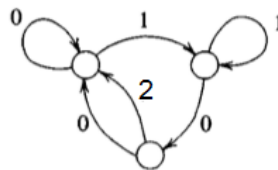
⁶³labeled graph ⁶⁴component ⁶⁵magic



شکل ۴. مثالی برای گراف تحویل ناپذیر



شکل ۵. مثالی برای گراف تحویل پذیر



شکل ۶. بلوک ۱ و ۲ جادویی ولی بلوک ۰ چنین نیست.

در شکل ۶ بلوک ۱ و ۲ جادویی هستند زیرا همه مسیرها با برچسب ۱ پایان یکسانی دارند. این مطلب برای بلوک ۲ نیز برقرار است اما برای بلوک ۰ معتبر نیست.

ملاحظه می‌کنیم که هر کلمه‌ی جادویی برای G کلمه‌ای هم‌گام‌کننده برای X_G است؛ ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست.

تعریف ۳.۵. فضای تغییر جای X را سافیک^{۶۶} می‌نامیم هرگاه $X = X_G$ که G گرافی برچسب‌دار است. در این صورت G یک پوشش^{۶۷} یا نمایش^{۶۸} نامیده می‌شود.

فضاهای تغییرجایی وجود دارند که سافیک نیستند. برای نمونه، مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴.۵. فضای X را روی الفبای $A = \{a, b, c\}$ با مجموعه‌ی کلمات غیرمجاز

$$\mathcal{F} = \{ab^m c^n a : m \neq n\}$$

^{۶۶}sofic ^{۶۷}cover ^{۶۸}presentation

در نظر می‌گیریم. این فضا، تغییر جای متن آزاد^{۶۹} نامیده می‌شود. چون برای $m \in \mathbb{N}$ ، $c^na \in F(ab^m)$ ، اگر و تنها اگر $n = m$ ، مجموعه‌های پیرو $F(ab^m)$ از یکدیگر مجزا هستند. بنابراین، مجموعه‌ی مجموعه‌های پیرو نامتناهی است و در نتیجه X سافیک نیست.

پوشش‌های یک تغییر جای سافیک لزوماً یکتا نیستند. حال پوششی را معرفی می‌کنیم که هم از نظر تئوری و هم عملی اهمیت بیشتری دارد.

تعریف ۵.۵. گراف برچسب‌دار G از راست-معین^{۷۰} نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس I ، یال‌های خروجی از I دارای برچسب‌های متفاوت باشند.

در گراف‌های از راست-معین، برای هر کلمه‌ی w و رأس I ، حداکثر یک مسیر با ابتدای I و برچسب w وجود دارد. این گراف‌ها، در علوم کامپیوتر قطعی^{۷۱} نامیده می‌شوند و کاربردهای متنوعی در کد کننده‌ها^{۷۲} و باز کننده‌های کد^{۷۳} دارند. در شکل ۳، گراف (c) از راست معین نیست. اما گراف (d) از راست معین است.

در گراف‌های از چپ-معین^{۷۴} یال‌های ورودی به هر رأس دارای برچسب‌های متمایز هستند. گرافی را که هم از راست و هم از چپ-معین باشد، از دو طرف-معین^{۷۵} می‌نامیم. در شکل ۳، گراف (c) از چپ معین است. اما گراف (d) چنین نیست. همچنین گراف (b) از دو طرف معین است.

تعریف ۶.۵. گراف برچسب‌دار $G = (G, \mathcal{L})$ را در نظر می‌گیریم. برای $I \in \mathcal{V}$ ، مجموعه‌ی پیرو $F_G(I)$ در G ، خانواده‌ی برچسب همه‌ی مسیرهایی با ابتدای I است؛ یعنی،

$$F_G(I) = \{\mathcal{L}(\pi) : \pi \in \mathcal{B}(X_G) \text{ و } i(\pi) = I\}.$$

گراف G پیرو منفک^{۷۶} است هرگاه رئوس مختلف دارای مجموعه‌های پیرو متمایز باشند؛ یعنی، اگر $I \neq J$ ، آن‌گاه $F_G(I) \neq F_G(J)$.

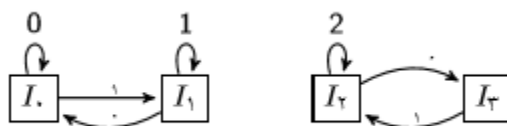
در گراف $G = (G, \mathcal{L})$ ، دو رأس I و J را هم‌ارز^{۷۷} گوئیم هرگاه دارای مجموعه‌های پیرو یکسان باشند؛ یعنی، $F_G(I) = F_G(J)$. فرض کنیم رده‌های هم‌ارزی مجموعه‌ی رئوس G به صورت $I_1, I_2, \dots, I_r$ هستند. گراف $\mathcal{H}$ را گراف ادغام‌شده‌ی^{۷۸} G می‌نامیم اگر مجموعه‌ی رئوس $\mathcal{H}$ ، مجموعه‌ی $\{I_1, I_2, \dots, I_r\}$ باشد و یالی در $\mathcal{H}$ با برچسب a از I به J وجود داشته باشد هرگاه رئوس $I \in \mathcal{I}$ و $J \in \mathcal{J}$ و یالی در گراف G با برچسب a از I به J موجود باشند.

۱.۵. اتصال گراف‌ها. برای $n \in \mathbb{N}$ ، فرض کنیم $G_n = (G_n, \mathcal{L}_n)$ گرافی برچسب‌دار با مجموعه یال‌های $\mathcal{E}_n$ و مجموعه رأس‌های $\mathcal{V}_n$ باشد. گیریم V یک افراز شمارا روی $\mathcal{V}_n$ باشد. فرض کنیم $G = \bigvee_n G_n$ گرافی با مجموعه رأس‌های V باشد. اگر برای $I, J \in \mathcal{V}_n$ ، یالی با برچسب a از I به J وجود داشته باشد، آن‌گاه در V یالی را با برچسب a از $[I]$ به $[J]$ قرار می‌دهیم. فضای کدشونده‌ای که پوشش آن $\bigvee_n G_n$ است را با نماد $\bigvee_n X_n$ نشان می‌دهیم. برای مثال با فرض $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \{I_0, I_1, I_2, I_3\}$ و $V = \{\{I_0\}, \{I_1, I_2\}, \{I_3\}\}$ ، شکل ۷ گراف‌های G_1 و G_2 همچنین شکل ۸ گراف $G_1 \vee G_2$ را نشان می‌دهد.

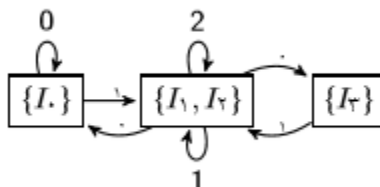
۲.۵. شکافتن گراف‌ها. در قسمت قبل از اتصال گراف‌ها صحبت کردیم، می‌توان مفهوم وارونه‌ی آن، یعنی شکافتن رأس‌های یک گراف را نیز تعریف کرد. شکافت رأس‌ها^{۷۹} ابتدا توسط ویلیامز^{۸۰} مطرح شد. سپس پتل^{۸۱} از آن برای ذخیره داده‌ها روی نوارهای مغناطیسی استفاده کرد.

⁶⁹context free shift ⁷⁰right-resolving ⁷¹deterministic ⁷²encoders ⁷³decoders ⁷⁴left-resolving ⁷⁵bi-resolving ⁷⁶follower-separated ⁷⁷equivalent

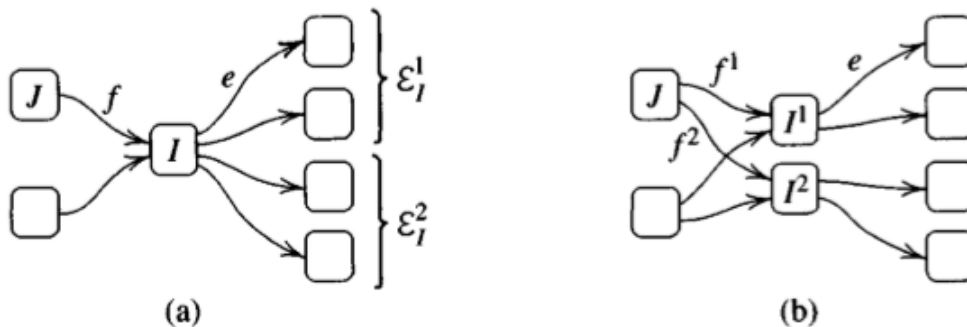
⁷⁸merged graph ⁷⁹State splitting ⁸⁰Williams ⁸¹Batel



شکل ۷. نمایش دو گراف قبل از اتصال



شکل ۸. نمایش اتصال دو گراف

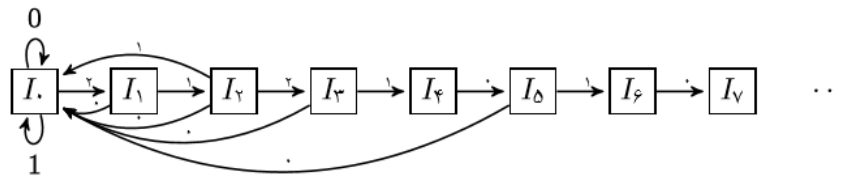


شکل ۹. شکافتن یک رأس

ابتدا شکافتن یک رأس را بررسی می‌کنیم. گراف G با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E را در نظر می‌گیریم. برای رأس $I \in V$ مجموعه E_I را به دو مجموعه E_I^1 و E_I^2 افزایش می‌کنیم. گراف جدیدی که آن را با نماد H نشان می‌دهیم، همان مجموعه رأس‌های G را دارد به جز رأس I که به جای آن دو رأس I^1 و I^2 قرار دادیم. به ازای هر E_I^i یالی را در H از I^i به $t(e)$ با همان نام e رسم می‌کنیم. برای هر $f \in E$ ، با ابتدای I و انتهای J یال‌هایی با نام‌های f^1 و f^2 در H قرار می‌دهیم که f^1 از J به I^1 و f^2 از J به I^2 وصل می‌شود. رأس‌های ابتدا و انتهای یال‌های دیگر در G را بدون تغییر رسم می‌کنیم (شکل ۹ را ببینید). در حالت کلی مجموعه یال‌های خروجی از یک رأس می‌تواند به بیش از دو مجموعه افزایش شود. همچنین افزایش می‌تواند در چندین رأس انجام شود.

۶. فضاهای تغییر جای بنا

این تغییر جای فضاهای نمادی هستند که دارای ساختاری غنی بوده و کاربردهای نظری و عملی فراوانی دارند. در این جا مقدمه‌ای خلاصه‌ای از β -تغییر جای را از [۷] ارائه می‌کنیم، برای جزئیات بیشتر می‌توان به مقاله‌ی [۱۵] رجوع کرد.



شکل ۱۰. نمایشی برای یک گراف بتا

وقتی t عددی حقیقی است منظور از $[t]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر و یا مساوی t است. اگر $\beta > 1$ ، قرار می‌دهیم

$$\beta = a_1 a_2 a_3 \dots \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}$$

که $a_1 = [\beta]$ و

$$a_i = \lfloor \beta^i (1 - a_1 \beta^{-1} - a_2 \beta^{-2} - \dots - a_{i-1} \beta^{-i+1}) \rfloor$$

برای $i \geq 2$. دنباله β بسط ۱ در مبنای β است؛ یعنی، $1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \beta^{-i}$. اگر $\leq$ ترتیب الفبایی^{۸۲} روی $(\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ باشد، آن‌گاه دنباله β در رابطه‌ی

$$(1.6) \quad \sigma^k \beta \leq \beta, \quad k \in \mathbb{N},$$

صدق می‌کند که σ نگاشت تغییرجا روی $(\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ می‌باشد. پری ثابت کرد که این ویژگی مشخص می‌کند که کدام یک از عناصر $(\mathbb{N} \cup \{0\})^{\mathbb{N}}$ ، β -بسط ۱ برای یک $\beta > 1$ هستند [۷]. علاوه بر آن، (۱.۶) نتیجه می‌دهد که مجموعه‌ی

$$(2.6) \quad X_\beta = \{x \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{Z}} : x_{[i, \infty)} \leq \beta, i \in \mathbb{Z}\}$$

زیرتغییرجایی از $\{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{Z}}$ است که β -تغییرجا^{۸۳} نامیده می‌شود. ساده است که نشان دهیم [۱۵]:

(۱) یک β -تغییرجا از نوع متناهی است اگر و فقط اگر β متناهی باشد.

(۲) هر β -تغییرجا نیم هم‌گام شونده است.

دقت می‌کنیم که هر بلوک از سمت راست نامتناهی مانند $a_1 a_2 \dots$ ، اگر $a_i \in \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$ در شرط (۱.۶) کند، آن‌گاه عدد منحصر به فرد β موجود است که $a_1 = [\beta]$ و $\beta = a_1 a_2 \dots$ [۷، قضیه ۲.۳.۲].

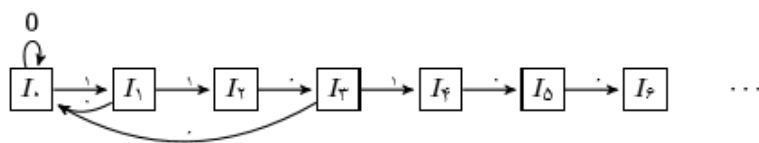
گراف نامتناهی $\mathcal{G}_\beta$ را بدین صورت به عنوان گراف فیش β -تغییرجا می‌سازیم. نخست مجموعه شمارای نامتناهی از رأس‌های $I_0, I_1, \dots$ را انتخاب می‌کنیم و I_0 را یک رأس ثابت در نظر می‌گیریم. یال‌ها به صورت زیر تعریف شده‌اند. حال، برای همه‌ی $i \geq 0$ ، یالی با برچسب a_i وجود دارد که ابتدای آن I_i و انتهای آن I_{i+1} است. همچنین، برای هر i و برای هر $0 \leq c < a_i$ یالی با برچسب c که ابتدای آن I_i و انتهای آن I_0 است، وجود دارد.

برای مثال، فرض کنیم $a_1 a_2 a_3 \dots = 2121010\dots$ دنباله‌ای باشد که در شرط (۱.۶) صدق می‌کند و فرض کنیم $\beta > 1$ عدد حقیقی منحصر به فرد وابسته به آن باشد. پس $\beta = 2121010\dots$. شکل ۱۰ نمایش قسمتی از این پوشش برای این فضای β -تغییرجا است.

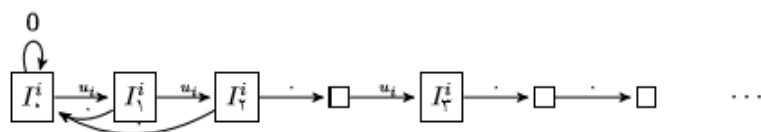
هرگاه a در نقطه یا بلوکی از X ظاهر شود، ما فضای تغییرجای جدیدی از X را با جایگزین کردن u به جای a می‌سازیم و آن را با نماد $X_{u \leftrightarrow a}$ نشان می‌دهیم. برای مثال اگر

$$m = m_1 \dots m_{i-1} a m_{i+1} \dots m_l \in W(X)$$

⁸²lexicographic ordering ⁸³ β -shift



شکل ۱۱. پوششی برای یک تغییر جای بتا



شکل ۱۲. ساختن گرافی جدید با استفاده از گراف بتا

آن‌گاه

$$m_1 \cdots m_{i-1} u m_{i+1} \cdots m_l \in W(X_{u \rightarrow a})$$

و این با نماد $m_{u \rightarrow a}$ نشان داده می‌شود. به طریق مشابه این عمل برای $x \in X$ نیز انجام می‌شود. پس $x_{u \rightarrow a} \in X_{u \rightarrow a}$ تعریف شده است. همچنین به روش طبیعی از یک پوشش $\mathcal{G}(G)$ برای X ، ما $G_{u \rightarrow a}(G_{u \rightarrow a})$ را تعریف می‌کنیم. برای مثال، شکل ۱۱

پوششی برای یک β - تغییر جا و شکل ۱۲ پوششی است که با جایگزینی u_i بجای $a = 1$ به دست آمده است.

مثال ۱.۶. فرض کنیم $\beta = 110100 \dots$. بلوک‌های $a = 1$ و u_i را انتخاب می‌کنیم. در این صورت شکل ۷ و ۸ $\mathcal{G}_\beta := \mathcal{G}_{u_i \rightarrow a}$ و $\mathcal{G}_{u_i \rightarrow a}$ را نشان می‌دهد.

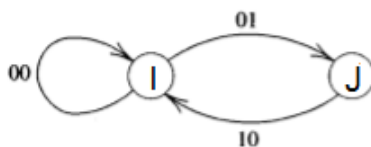
۱.۶. فضای تغییر جا با شکاف. فضاها تغییر جا با شکاف S دسته‌ای از سیستم‌های دینامیکی هستند که کاربردهای زیادی در کدگذاری داده‌ها دارند. هر فضای تغییر جای متناهی متناظر با زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح نامنفی مانند S است. در این صورت این فضا را با نماد $X(S)$ نشان می‌دهند. برای تعریف $X(S)$ بسته به این که مجموعه S متناهی یا نامتناهی باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود.

(۱) اگر S متناهی باشد، آن‌گاه $X(S)$ را مجموعه همه دنباله‌های از دوطرف نامتناهی از عناصر 0 و 1 در نظر می‌گیریم که یک‌ها می‌توانند نامتناهی بار در هر دو طرف ظاهر شوند و تعداد صفرها بین هر دو یک متوالی متعلق به مجموعه S باشد.

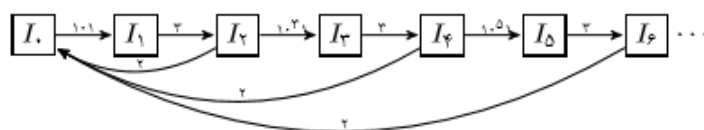
برای مثال فرض کنیم $S = \{2\}$ ، آن‌گاه

$$S = \{\dots 1001001001001\dots\}.$$

و اگر $S = \{1, 2\}$ ، آن‌گاه $\dots 101001001001001001\dots$ عضوی از $X(S)$ است اما چنین مطلبی برای $\dots 10101010001010101\dots$ صحیح نیست.



شکل ۱۳. نمایش گرافی برای یک فضای تغییر جا با شکاف



شکل ۱۴. نمایش گرافی با تعداد نامتناهی کلمه هم گام کننده اساسی

(۲) اگر S نامتناهی باشد، آن گاه $X(S)$ مانند حالت اول تعریف می شود با این تفاوت که یک ها نمی توانند از سمت چپ یا راست نامتناهی ادامه یابند. یعنی در این حالت عناصر فضای $X(S)$ به گونه ای است که با نامتناهی صفر شروع و به نامتناهی صفر ختم می شوند. برای مثال اگر $S = \{2, 4, 6, \dots\}$ فرض کنیم، آنگاه $\dots 000100100001000000$ عضوی از $X(S)$ است اما برای $\dots 100100100100100100$ چنین نیست.

تمامی فضاهای تغییر جای $X(S)$ هم گام شونده هستند و کلمه ۱ برای آنها هم گام کننده است. در شکل ۱۳ گراف متناظر برای تغییر جای $X(S)$ نظیر $S = \{0, 2, 4, \dots\}$ رسم شده است.

۲.۶. فضاهای تغییر جا با نامتناهی بلوک هم گام کننده کمینه. فضاهای تغییر جای نیم هم گام شونده یک توسیع طبیعی فضاهای هم گام شونده است. نمونه هایی از چنین فضاها، تغییر جاهای β هستند. هر کلمه از این فضا، نیم هم گام کننده است. نیم هم گام کننده ای (هم گام کننده) که دارای زیر بلوک نیم هم گام کننده (هم گام کننده) نباشد، یک بلوک نیم هم گام کننده (هم گام کننده) کمینه است. در [۱۵] از فضاهای تغییر جای بتا استفاده کردیم و فضای جدیدی با تعداد $1 \leq l \leq \infty$ کلمه نیم هم گام کننده کمینه ساختیم.

نمونه هایی از فضاها با تعداد نامتناهی کلمه هم گام کننده کمینه وجود دارد. برای مثال شکل ۱۴ پوششی برای یک تغییر جای کد شونده است که دارای نامتناهی بلوک هم گام کننده ی کمینه است.

مثال ۲.۶. (۱) بلوک ۱ برای هر فضای $X(S)$ یک بلوک نیم هم گام کننده ی کمینه است و برای آن، هیچ بلوک نیم هم گام کننده ی کمینه دیگری وجود ندارد. پس فضای $X(S)$ دارای تعداد متناهی بلوک نیم هم گام کننده است. (۲) سیستم های دایک و β - تغییر جاها دارای تعداد متناهی بلوک نیم هم گام کننده اند [۷، قضیه ۱.۳.۲]. برای این گونه سیستم ها، هر بلوک نیم هم گام کننده است و بنابراین هر سمبول آن یک بلوک نیم هم گام کننده ی کمینه است.

۷. آنتروپی

دانستن مفهوم آنتروپی کمک زیادی به درک بسیاری از پدیده‌های زندگی روزمره می‌کند و رویکردی جدید در توجیه پدیده‌ها خلق می‌کند. آنتروپی یک مفهوم بسیار حیاتی در علم فیزیک و شیمی است و پدیده‌های بسیاری را توضیح می‌دهد. برای مثال، توضیح حل شدن رنگ در آب و ذوب شدن یخ ریشه در مفهوم آنتروپی دارند. آنتروپی مفهومی است که به انرژی معنا می‌دهد و تمایل به پخش یک انرژی انباشته شده است. زیرا انرژی زمانی قابل استفاده است که قابلیت پخش شدن داشته باشد.

بررسی آنتروپی نشان می‌دهد کدام فرایندها ناممکن هستند. حتی اگر اصل بقای انرژی را نقض نکنند. به عنوان مثال، یک قطعه یخ که روی یک اجاق گاز داغ قرار می‌گیرد، ذوب می‌شود. چنین فرآیندی غیرقابل برگشت است. گاز فشرده محصور شده در یک سیلندر می‌تواند آزادانه در توده هوا گسترش یابد و این یک فرآیند برگشت پذیر است. برای فرایندهای برگشت پذیر، سیستم با محیط خود در تعادل است، در حالی که برای فرایندهای برگشت ناپذیر این طور نیست. در این جا مفهوم آنتروپی به کمک قانون دوم نیوتن می‌آید. آنتروپی قانون دوم را این گونه بیان می‌کند که تغییر خود به خودی برای یک فرآیند برگشت ناپذیر در سیستمی که گرما را مبادله نمی‌کند یا بر روی محیط اطراف خود کار انجام نمی‌دهد، همیشه در جهت افزایش آنتروپی پیش می‌رود.

قانون دوم ترمودینامیک^{۸۴} کمک بزرگی به درک ما از نحوه‌ی عملکرد فرایندها در جهان هستی می‌کند. این قانون به ما توضیح می‌دهد که انرژی در جهان مادی به هر شکلی که باشد یا پراکنده می‌شود یا گسترش پیدا خواهد کرد. بنابراین آنتروپی میزان خود به خود بودن فرایندها را به صورت کمی اندازه گیری می‌کند و مشخص می‌کند که در یک دمای به خصوص، چه مقدار انرژی، آزاد شده است. به بیان دیگر، قانون دوم ترمودینامیک بیان می‌کند که هر فرآیند در جهتی پیش می‌رود که آنتروپی آن در سیستم افزایش پیدا کند. اکنون به معرفی دسته‌هایی از آنتروپی‌ها می‌پردازیم:

(۱) آنتروپی اندازه‌ای

آنتروپی اندازه‌ای اطلاعات مفیدی درباره‌ی سیستم‌های دینامیکی و نگاشت‌های حافظ اندازه^{۸۵} ارائه می‌دهد. در مکانیک آماری^{۸۶}، آنتروپی اندازه‌ای مفهومی علمی و خاصیتی فیزیکی قابل اندازه گیری است که در عادی ترین حالت با حالت اختلال و عدم قطعیت مرتبط است. به عبارتی، آنتروپی اندازه‌ای یک سامانه‌ی فیزیکی، کمترین تعداد ذراتی است که برای تعریف صحیح حالت دقیق سامانه لازم است. آنتروپی نماینده تصادفی بودن مولکول‌ها^{۸۷} است و ویژگی‌های یک سامانه را تعریف می‌کند. این واژه در رشته‌های گوناگون علمی، معانی متفاوت پیدا کرده است.

آنتروپی اندازه‌ای در نظریه اطلاعات معیاری عددی از میزان اطلاعات یا میزان تصادفی بودن یک متغیر تصادفی است. به بیان دقیق‌تر آنتروپی اندازه‌ای یک متغیر تصادفی، مقدار متوسط (امید ریاضی^{۸۸}) میزان اطلاعات حاصل از مشاهده‌ی آن است. (به عبارت ساده‌تر هرچه آنتروپی اندازه‌ای یک متغیر تصادفی بیشتر باشد، ابهام ما در مورد آن متغیر تصادفی بیشتر است لذا با مشاهده نتیجه قطعی آن متغیر تصادفی اطلاعات بیشتری به دست می‌آید). همچنین آنتروپی اندازه‌ای یک منبع اطلاعات، حد پایین امید و بهترین نرخ فشرده سازی بدون اتلاف داده‌ها برای آن منبع است.

اطلاعات حاصل از مشاهده یک رویداد برابر با منفی لگاریتم احتمال رخ دادن آن تعریف می‌شود؛ به طور طبیعی از هر تابع مناسب برای سنجش میزان اطلاعات یک مشاهده، انتظاراتی مطابق زیر وجود دارد:

(آ) اطلاعات حاصل از یک مشاهده، مقداری نامنفی باشد.

(ب) اطلاعات حاصل از مشاهده‌ی یک رویداد قطعی صفر باشد

⁸⁴ Second law of thermodynamics ⁸⁵ invariant measure ⁸⁶ statistical mechanics ⁸⁷ molecules ⁸⁸ mathematical expectation

(ج) اطلاعات حاصل از دو مشاهده مستقل برابر با جمع اطلاعات حاصل از مشاهده تک تک آن‌ها باشد. می‌توان نشان داد تنها تابعی که سه ویژگی فوق را دارد، تابع منفی لگاریتم احتمال است. میزان اطلاعات با پایه‌های مختلف لگاریتم تنها یک ضریب ثابت با هم اختلاف دارند. متداول‌ترین پایه‌ی لگاریتم در محاسبه اطلاعات، ۲ است که اطلاعات را محاسبه می‌کند.

(۲) آنتروپی توپولوژیکی

آنتروپی توپولوژیکی در فیزیک، اندازه‌گیری انرژی گرمایی یک سیستم در واحد دمایی است که برای انجام کار مفید غیرقابل دسترس است. از آنجایی که کار از حرکت مولکولی منظم به‌دست می‌آید، مقدار آنتروپی نیز معیاری برای بی‌نظمی مولکولی یا تصادفی بودن یک سیستم است. مفهوم آنتروپی بیش عمیقی را در مورد جهت تغییر خود به خودی برای بسیاری از پدیده‌های روزمره فراهم می‌کند. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید از مقاله [۱۲] و [۴] استفاده نمایید.

در این قسمت آنتروپی توپولوژیکی را برای فضاهای تغییرجا معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۷. آنتروپی توپولوژیکی فضای تغییرجا X به صورت

$$h(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |W_n(X)|$$

تعریف می‌شود که در آن W_n تعداد کلمات از طول n در X است.

اکنون به بیان مثال‌هایی برای آنتروپی توپولوژیکی می‌پردازیم.

مثال ۲.۷. فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, r\}$. آن‌گاه $|W_n(A^{\mathbb{Z}})| = r^n$. پس $h(X) = \log r$.

مثال ۳.۷. فرض کنیم X مجموعه همه دنباله‌های از دوطرف نامتناهی با مولفه‌های ۰ و ۱ باشند که در آن‌ها بلوک ۱۱ ظاهر نشده باشند. چنین فضایی را طلایی^{۸۹} نامیده می‌شود. آن‌گاه،

$$h(X) = \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

[۹].

در مثال قبلی می‌توان به گراف متناظر با فضای تغییر جای طلایی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ را نسبت داد. بعد از محاسبه، چندجمله‌ای مشخصه^{۹۰} ماتریس به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$t^2 - t - 1.$$

ریشه‌های معادله $t^2 - t - 1 = 0$ که همان مقادیر ویژه^{۹۱} هستند، برابر با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ هستند.

(۳) آنتروپی گروپ

فرض کنیم $H = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ یک گراف تحویل‌ناپذیر باشد. برای هر جفت رأس‌های $I, J \in \mathcal{V}$ ، فرض کنیم $r_n(I, J)$ تعداد راه‌های به طول n در H باشد که شروع آن‌ها I و انتهای آن‌ها J باشد. در این صورت

$$h(H) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(I, J)$$

که مستقل از انتخاب I و J است را آنتروپی گروپ^{۹۲} گراف H نامیم [۱۶].

^{۸۹}Golden Mean ^{۹۰}characteristic polynomial ^{۹۱}Eigenvalue ^{۹۲}Gurevic entropy

مثال ۴.۷. فرض کنیم G گرافی باشد که از هر رأس آن r یال خارج شود. چون r انتخاب راه برای عبور از هر رأس داریم، پس تعداد یال‌های به طول n با شروع از یک رأس دلخواه برابر با r^n است. بنابراین اگر گراف G ، k رأس داشته باشد، آن‌گاه $|W_n(X_G)| = k.r^n$. در نتیجه داریم

$$h(X_G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(k.r^n) = \log r.$$

انواع دیگر آنتروپی‌ها را می‌توانید در مقاله [۱۹] ببینید.

۸. فضاهای نیم‌هم‌گام‌شونده ضعیف

فضای تغییر جای X را هم‌گام‌شونده ضعیف نامند هرگاه بلوک m و نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد که $x_{[-|m|+1, 0]} = m$ و $\omega_+(x_{(-\infty, 0]}) = \omega_+(m)$. در این صورت بلوک m را هم‌گام‌کننده ضعیف و $\omega_+(m)$ را رأس هم‌گام‌شونده ضعیف گوئیم.

همچنین خاطر نشان می‌کنیم که اگر x از چپ ترا یا ^{۹۳} بود، آن‌گاه با توجه به تعریف، X سیستم نیم‌هم‌گام‌شونده خواهد شد. به عبارتی دیدیم که هر سیستم نیم‌هم‌گام‌شونده یک سیستم هم‌گام‌شونده ضعیف است. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه به مقاله [۳] مراجعه نمایید.

فرض کنیم X فضای هم‌گام‌شونده ضعیف باشد و گیریم $WH(X)$ مجموعه همه بلوک‌های هم‌گام‌کننده ضعیف برای X باشد. فرض کنیم $(X_m)^+$ مولفه تحویل‌ناپذیر ماکسیمال برای گراف گریگر X باشد که شامل رأس $\omega_+(m)$ باشد. بلوک $m \in WH(X)$ ، هم‌گام‌کننده ضعیف مانده ^{۹۴} نامیده می‌شود اگر راه متناهی π_m در $(X_m)^+$ با برجسب m وجود داشته باشد که $\omega_+(m) = t(\pi_m)$.

در مثال بعدی از β -تغییر جاها استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم یک هم‌گام‌کننده ضعیف مانده ممکن است نیم‌هم‌گام‌کننده نباشد.

مثال ۱.۸. فرض کنیم β عددی حقیقی بزرگتر از یک باشد. در این صورت $\circ := m$ یک هم‌گام‌کننده ضعیف مانده برای X_β^{-1} است به طوری که ۱ نیم‌هم‌گام‌کننده‌ای برای آن نیست.

۱.۸. آنتروپی هم‌گام‌شونده ضعیف. برای هر فضای هم‌گام‌شونده مانند X ، آنتروپی هم‌گام‌شونده که با نماد $h_{\text{syn}}(X)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف شده است:

$$h_{\text{syn}}(X) = \limsup_n \frac{1}{n} \log(|\{a \in \mathcal{W}_n(X) : mam \in \mathcal{W}(X)\}|),$$

که $m \in \mathcal{W}(X)$ یک بلوک هم‌گام‌کننده دلخواه است [۱۳]. در سال ۲۰۰۴، تامسن ^{۹۵} در [۱۸] برای تغییر جای هم‌گام‌شونده‌ی X توانست $h(X)$ را به وسیله‌ی آنتروپی دسته‌ی مشخصی از فضاهای تغییر جای متناهی تقریب بزند و ثابت کند که اگر X^+ گراف فیشر فضای تغییر جای X باشد، آن‌گاه $h(X^+) = h_{\text{syn}}(X)$. تامسن همچنین وجود دنباله‌ای از فضاهای تغییر جای متناهی تو در تو را اثبات کرد که آنتروپی آن‌ها به $h(X^+)$ میل می‌کرد. تعریف دقیق آن در [۱۸] است. گیریم m یک بلوک هم‌گام‌کننده ضعیف برای X باشد. بلوک m و نقطه x به دست آمده توسط تعریف هم‌گام‌کننده در نظر گرفته و ثابت فرض می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$(۱.۸) \quad h(m, X) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\{a \in \mathcal{W}_n(X) : \omega_+(x_{-am}) = \omega_+(m)\}|.$$

⁹³transitive ⁹⁴residual ⁹⁵Thomsen

آن گاه،

$$h(m, X) = h((X_m)_\circ^+)$$

[۲].

فرض کنیم $RW(X)$ مجموعه‌ی همه بلوک‌های هم‌گام‌کننده ضعیف مانده‌ی X باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{H}_X := \{h((X_m)_\circ^+) : m \in RW(X)\}.$$

پس طبیعی است که آنتروپی هم‌گام‌شونده ضعیف را که با نماد $h_{wsyn}(X)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف کنیم:

$$h_{wsyn}(X) = \sup \mathcal{H}_X.$$

این تعریف برای فضا‌های هم‌گام‌شونده و نیم‌هم‌گام‌شونده منطبق با تعریف اصلی است [۲].

تامسن در [۱۸] یک مولفه‌ی هم‌گام‌شونده‌ی X را از یک سیستم کلی در نظر گرفت و ثابت کرد که

$$(۲.۸) \quad \sup\{h(A) : A \subseteq X \text{ تغییر جای متناهی تحویل ناپذیر است}\} = h(X_\circ^+) = h_{syn}(X).$$

توسیع این مطلب را به فضای هم‌گام‌شونده‌ی ضعیف به صورت زیر است.

قضیه ۲.۸. [۲، قضیه ۲.۴]. فرض کنیم X تغییر جای هم‌گام‌شونده ضعیف باشد و $RW(X) \neq \emptyset$. آن گاه،

$$\sup\{h(A) : \exists m \in RW(X);$$

$$A \subseteq \mathcal{L}((X_m)_\circ^+)\} = h_{wsyn}(X).$$

در ادامه نتیجه‌ای فوری از قضیه‌ی ۲.۸ را بیان خواهیم کرد. یادآوری می‌کنیم که فضای تغییر جای X تقریباً سافیک نامیده می‌شود هرگاه

$$h(X) = \sup\{h(Y) : Y \text{ زیر تغییر جای سافیکی از } X \text{ است}\}.$$

نتیجه ۳.۸. فرض کنیم X یک فضای تحویل ناپذیر باشد. اگر X تغییر جای هم‌گام‌شونده ضعیف باشد و $h_{wsyn}(X) = h(X)$ ، آن گاه X تقریباً سافیک است.

۹. مولدهای متوازن

فضاهای تغییر جای دایک S_{2n} نمونه‌ای مشهور از تغییر جای غیر هم‌گام‌شونده ولی نیم‌هم‌گام‌شونده است. الفبای آن شامل $2n$ براکت است. برای نمونه برای S_4 داریم $\mathcal{A} = \{(\cdot), [\cdot], \cdot\}$. $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ یک نقطه از S_{2n} است اگر و تنها اگر برای هر زیربلوک x قوانین استاندارد پرانتزها رعایت شود [۶].

تعریف ۱.۹. فرض کنیم X یک تغییر جا باشد. بلوک $u \in W(X)$ را متوازن^{۹۶} نامیم، هرگاه

$$(۱) \quad x_{(-\infty, i)} u x_{[i, +\infty)} \in X, \quad i \in \mathbb{Z} \text{ و } x \in X$$

$$(۲) \quad \text{اگر } x \in X \text{ و } u = x_{[i, j]} \text{، آن گاه } x_{(-\infty, i)} x_{(j, +\infty)} \in X$$

^{۹۶}balanced

یادآوری می‌کنیم که سیستم کدشونده سیستمی است که دارای مولدی شمارا باشد. فرض کنیم X یک سیستم کدشونده با مولد G باشد که همه‌ی عناصر آن مولد متوازن باشند. در این صورت G را یک مولد متوازن^{۹۷} و X را یک تغییر جای متوازن^{۹۸} نامیم.

مجموعه‌ی همه‌ی بلوک‌های متوازن که شامل ε نیز است را با نماد $BW(X)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۹. (۱) در تغییر جای کامل $A^{\mathbb{Z}}$ ، $G = A$ یک مولد متوازن برای $A^{\mathbb{Z}}$ است.
(۲) مجموعه‌ی همه‌ی بلوک‌های متوازن سیستم دایک S_4 تشکیل یک مولد متوازن برای آن می‌دهند. در حقیقت اگر X یک زیرتغییر جایی از S_4 باشد که $[\]$ ، $()$ دو بلوک متوازنش باشند، آنگاه $X = S_4$.

تعریف ۳.۹. فرض کنیم X یک فضای تغییر جا باشد. بلوک $u \in W(X)$ را متوازن راست^{۹۹} نامیم، هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $ux_+ \in X^+$ که $x_+ = x(\circ, +\infty)$ به طریق مشابه بلوک متوازن چپ هم تعریف می‌شود.

در نتیجه u متوازن راست است اگر و تنها اگر $w_+(u) = X^+$. فرض کنیم G مولد فضای کدشونده‌ی X باشد. اگر همه‌ی عناصر G متوازن راست باشند، آنگاه گوئیم G یک مولد متوازن راست برای X است و آن را فضای تغییر جای متوازن راست نامیم. مولد متوازن چپ و فضای تغییر جای متوازن چپ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شوند. هر کاراکتر فضای دایک یا متوازن راست یا چپ است. اما سیستم‌های متوازنی وجود دارند که دارای کاراکترهایی هستند که نه متوازن راستند و نه چپ [۲].

واضح است که هر بلوک متوازن، متوازن راست و چپ است. عکس این مطلب ممکن است برقرار نباشد. برای مثال در فضای تغییر جای زوج^{۱۰۰} که تغییر جایی روی $\mathcal{A} = \{\circ, 1\}$ با $\mathcal{F} = \{1\circ^{2n+1}1 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ است، بلوک $\circ^n$ متوازن راست و چپ است اما بلوک $\circ^{2n+1}$ متوازن نیست. از طرفی دارای هیچ بلوک متوازن راست دیگری نیست. پس فضای تغییر جای زوج دارای مولد متوازن راست نیست.

درواقع اگر $u = a_0 \cdots a_{k-1}$ یک بلوک متوازن راست برای X باشد. آنگاه، همه‌ی بلوک‌ها در

$$\{a_i \cdots a_{k-1} : 0 \leq i < k\} \cup \{u^n : n \geq 1\}$$

متوازن راستند. پس اگر فضای تغییر جای X دارای بلوک متوازن راستی باشد، آنگاه به ازای هر $N \in \mathbb{N}$ دارای بلوک متوازن راستی با طول N است.

چون هر فضای تغییر جای یالی که دارای بلوک متوازن راست باشد، یک تغییر جای کامل است، پس برای نشان دادن اینکه بلوک‌های متوازن راست تحت هم‌ارزی پایا نیستند، می‌توان از این نکته استفاده کرد. برای مثال برای همه‌ی $n \in \mathbb{N}$ ، بلوک $\circ^n$ یک متوازن راست در فضای تغییر جای طلایی^{۱۰۱} که همان تغییر جای $X_{\{11\}}$ است، می‌باشد. از طرفی تغییر جای طلایی یک تغییر جای متناهی است. پس هم‌ارز با یک تغییر جای یالی همانند X_H است. در نتیجه

$$h(X_{\{11\}}) = h(X_H) = \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

پس تغییر جای طلایی و تغییر جای یالی نظیرش با هیچ تغییر جای کاملی هم‌ارز نیست. در نتیجه X_H دارای هیچ بلوک متوازن راستی نیست در صورتی که هم‌ارز آن یعنی $X_{\{11\}}$ دارای بلوک متوازن راست بود. نکته‌ی مهم در نکته قبل آنست که بلوک u متوازن راست و هم‌گام‌کننده است. در واقع زمانی که u بلوک متوازن و هم‌گام‌کننده باشد، محدودیت‌های بیشتر حاصل می‌شود.

⁹⁷balanced generator ⁹⁸balanced shift ⁹⁹right balanced ¹⁰⁰even shift ¹⁰¹golden shift

اکنون سیستم هم گام شونده‌ای را مثال می‌زنیم که تغییر جای کامل نیست اما دارای بلوک هم گام کننده‌ی متوازن راست است.

مثال ۴.۹. به چهار پراتزهای S_4 سمبول * را اضافه می‌کنیم. فرض کنیم X فضای تغییر جایی شامل همه‌ی دنباله‌هایی از دو طرف نامتناهی از این پنج سمبول باشد که هر زیربلوک متناهی از آن اگر شامل * نباشد، آن گاه بلوکی در S_4 باشد [۶]. در این صورت * بلوک هم گام کننده‌ی متوازن راست است.

همه‌ی بلوک‌های فضاهای تغییر جای کامل، هم گام کننده‌اند. مورد مشابه‌ای را نیز برای کلمات نیم هم گام کننده داریم.

تعریف ۵.۹. یک فضای تغییر جا را نیم هم گام شونده کامل^{۱۰۲} نامیم، هرگاه همه‌ی بلوک‌های آن نیم هم گام کننده باشند.

سیستم دایک و β - تغییر جاها نیم هم گام شونده‌ی کامل هستند.

به راحتی نتایج زیر ثابت می‌شوند و برای دیدن اثبات می‌توانید به مرجع [۱] مراجعه نمایید.

(۱) هر فضای تغییر جا با مولد متوازن راست G ، یک نیم هم گام شونده‌ی کامل است.

واضح است که هر تغییر جای یالی مانند X_G یک نیم هم گام شونده‌ی کامل است. حال اگر X_G تغییر جای کامل نباشد، آن گاه با توجه به نکته مذکور X_G دارای بلوک متوازن راست نیست. پس عکس نکته فوق ممکن است برقرار نباشد.

(۲) هر فضای هم گام شونده که دارای بلوک متوازن هم گام کننده باشد، یک تغییر جای کامل است.

(۳) فرض کنیم G یک مولد متوازن برای X باشد. آن گاه X فضای هم گام شونده است اگر و تنها اگر X تغییر جای کامل باشد.

با به کارگیری نتیجه بالا می‌توان مثال‌های زیادی از فضاهای نیم هم گام شونده‌ای ارائه داد که هم گام شونده نباشند. به وضوح مولد این گونه مثال‌ها بایستی نامتناهی عضو داشته باشد. زیرا هر سیستمی که دارای مولد متناهی باشد، یک تغییر جای متناهی است و در نتیجه یک تغییر جای کامل است. البته اگر از مولد متوازن راست استفاده کنیم، نتیجه برقرار نمی‌شود. مثال زیر صحت این مطلب را نشان خواهد داد.

مثال ۶.۹. فرض کنیم X یک زیر تغییر جای S_4 باشد که توسط

$$G = \{u \in W(S_4) : u \text{ در } [\text{ است و } u \text{ نیست} : S_4 \text{ برای } S_4 \text{ است} \},$$

تولید شده است. آن گاه [یک بلوک هم گام کننده‌ی X است و G یک مولد متوازن راست برای آن است.

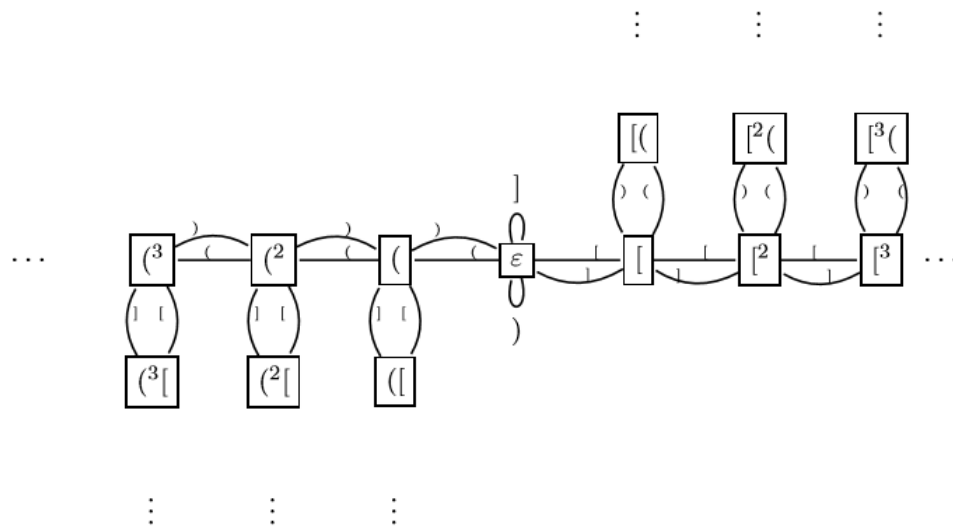
(۴) هر فضای تغییر جا که دارای مولد متوازن باشد، آمیختگی دارد.

برای درک بهتر فضای دایک، در شکل (۱۵) پوشش فشر سیستم S_4 را نشان داده‌ایم. این چنین پوشش‌ها برای S_{2n} های دیگر مانند طریقه‌ی ساختن پوشش فشر S_4 است.

۱.۹. آنتروپی نیم هم گام شونده‌ی فضای متوازن. فرض کنیم m یک بلوک نیم هم گام کننده برای یک فضای تغییر جای متوازن راست باشد، آن گاه [۱]

$$(۱.۹) \quad h(m, X) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\{v \in W_n(X) : v \text{ یک بلوک متوازن راست است} : S_4 \text{ برای } S_4 \text{ است}\}|.$$

¹⁰² full half



شکل ۱۵. پوشش فیشر فضای تغییر جای دایک

قسمت راست گزاره‌ی (۱.۹) مستقل از انتخاب m است و در نتیجه سمت چپ گزاره نیز چنین است. پس

$$h(X_o^+) = h_{\text{wsyn}}(X).$$

مثالی برای تقریب h_{wsyn} به صورت زیر است.

$$\text{مثال ۷.۹. } h_{\text{wsyn}}(S_{\mathbb{F}}) \geq \frac{\mathbb{F} \log \mathbb{F}}{\mathbb{F}}.$$

اثبات. فرض کنیم $BW_{\mathbb{F}n}$ و $RW_{\mathbb{F}n}$ به ترتیب مجموعه‌ی همه‌ی بلوک‌های متوازن راست و چپ با طول $\mathbb{F}n$ باشد. آن‌گاه، $|RW_{\mathbb{F}n}| > |BW_{\mathbb{F}n}|$ و باتوجه به [۱۱، لم ۳.۳]،

$$|BW_{\mathbb{F}n}| = \frac{\binom{\mathbb{F}n}{n} \mathbb{F}^n}{n + 1}.$$

پس

$$h_{\text{wsyn}}(S_{\mathbb{F}}) \geq \limsup \frac{1}{\mathbb{F}n} \log \frac{\binom{\mathbb{F}n}{n} \mathbb{F}^n}{n + 1} = \frac{\log \mathbb{F}}{\mathbb{F}}.$$

□

مراجع

- [1] D. Ahmadi Dastjerdi and M. Shahamat, Balanced Shifts, *Communications in Mathematics and Applications*, **11** (2020) 415–424.
- [2] D. Ahmadi Dastjerdi and M. Shahamat, Beyond Half Synchronized Systems, *Majlesi Journal of Telecommunication Devices*, **8** (2019) 69–73.
- [3] D. Ahmadi Dastjerdi and M. Shahamat, *Kreiger Graphs and Fischer Covers vs Dynamical Properties*, *J. Adv. Math. Comput. Sci.*, **32** (2019) 1–12.
- [4] F. Blanchard and G. Hansel, Systèmes codés, *Theoret. Comput. Sci.*, **44** (1986) 17–49.
- [5] V. Climenhaga and D. J. Thompson, Intrinsic ergodicity beyond specification: β -shifts, S -gap shifts, and their factors, *Israel J. Math.*, **192** (2012) 785–817.

- [6] D. Fiebig and U. Fiebig, Covers for coded systems, *Amer. Math. Soc.*, **135** (1992) 139–179.
- [7] K. Ch. Johnson, *Beta-shift dynamical systems and their associated languages*, The University of North Carolina at Chapel Hill, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1999 124 pp.
- [8] U. Jung, on the existence of open and bi-continuous codes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363** (2011) 1399–1417.
- [9] B. Kitchens, *Continuity properties of factor maps in ergodic theory*, The University of North Carolina at Chapel Hill, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1981 29 pp.
- [10] D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [11] T. Meyerovitch, *Tail invariant measures of the Dyck-shift and non-sofic systems*, M.Sc. Thesis, Tel-Aviv university, 2004.
- [12] Z. H. Nitecki, Topological entropy and the preimage structure of maps, *Real Anal. Exchange*, **29** (2003/04) 9–41.
- [13] M. Shahamat, Synchronized components of a subshift, *J. Korean Math. Soc.*, **59** (2022) 1–12.
- [14] M. Shahamat, *Strong Synchronized System*, Journal of Mathematical Extension Vol. 16, No. 6, (2022) (4)1-16.
- [15] M. Shahamat, Infinite minimal half synchronizing, *Journal of Mahani Mathematical Research Center*, preprint.
- [16] M. Shahamat, D. Ahmadi Dastjerdi and B. Panbehkar, Minimally Generated Subshifts, *J. Math. and Appl.*, **1** (2021) 18–24.
- [17] K. Thomsen, on the ergodic theory of synchronized systems, *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, **356** (2006) 1235–1256.
- [18] K. Thomsen, On the structure of a sofic shift space, *Amer. Math. Soc.*, **356** (2004) 3557–3619.
- [19] T. Meyerovitch, *Tail invariant measures of the Dyck-shift and non-sofic systems*, M. Sc. Thesis, Tel-Aviv University, 2004.

منوچهر شهامت

دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول، دزفول، ایران
m.shahamat@iaud.ac.ir

منوچهر شهامت، متولد آبان ماه ۱۳۵۹ در شهر بهبهان است. در سال ۱۳۷۹ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه زاهدان، در سال ۱۳۸۳ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه گیلان و در سال ۱۳۹۱ وارد مقطع دکتری ریاضی محض دانشگاه گیلان شدند. همچنین از سال ۱۳۸۸ نیز به عنوان عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول، مشغول به فعالیت است.



About Entropy

Manoochehr shahamat

Abstract: In irreducible subshifts, a word m is synchronizing if whenever vm and mw are admissible words, then vmw is admissible as well. A word m is (left) half (resp. weak) synchronizing, when there is a left transitive ray (resp. a left ray) x_- such that if x_-m and mw are admissible, then x_-mw is also admissible. The respective subshifts are called half (resp. weak) synchronized. K. Thomsen considers a synchronized component of a general subshift and investigates the approximation of entropy from inside of this component by some certain SFTs. We, using a rather different approach, show how this result extends to weak synchronized systems.

The notion of balanced generator of the Dyke system has been extended to a general subshift called balanced shift and it has been shown that they are essentially mixing. All balanced shifts are half synchronized and full shifts are the only balanced and synchronized subshifts. Also, a formula for the weak half synchronizing entropy of a balanced shift has been given.

Keywords: Generator, Entropy, shift space.

Manoochehr shahamat

Faculty of Basic Sciences, Islamic Azad University, Dezfoul Branch, Dezfoul, Iran.

Email: m.shahamat@iaud.ac.ir