ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷ − ۲۳۴۵
جلد ۶، شماره ۴ (۱۴۰۰)، صص. ۲۹ − ۴۷

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

خواص مشترک برخی زیرحلقه‌های $\mathbb{R}^X$

محمدرضا احمدی زند

چکیده. برای فضای توپولوژی ناتهی X، مجموعه تمام توابع حقیقی-مقدار روی X با نماد $F(X)$ نشان داده می‌شود که با عمل جمع و ضرب نقطه به نقطه، حلقه‌ای تعویض‌پذیر است. اعضای پیوسته $F(X)$ را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. $B_1(X)$ مجموعه تمام حدود نقطه به نقطه دنباله توابع در $C(X)$ را نشان می‌دهد که یک زیرحلقه $F(X)$ است. نشان داده شده است که جمع دو z-ایدآل در $B_1(X)$ یک z-ایدآل است و ایدآل I در $B_1(X)$ یک z-ایدآل است اگر و تنها اگر $\sqrt{I}$ یک z-ایدآل در $B_1(X)$ باشد. برای هر $f \in F(X)$، $f^{-1}(0)$ را با $Z(f)$ نشان داده و آن را یک صفر-مجموعه می‌گویند. اگر $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ باشد، $\emptyset \neq B \subseteq A(X)$ و $S = \bigcup_{b\in B}(X \setminus Z(b))$، آنگاه ثابت شده است که همریختی حلقه $\phi : A(X) \to A(S)$ وجود دارد به‌طوری که $\ker \phi = Ann(B)$. ایدآل I در $A(X)$ را مطلقا محدب گوییم هرگاه از $f \in A(X),\ g \in I$ و $|f| \leq |g|$ نتیجه شود $f \in I$. برخی زیرحلقه‌های $F(X)$ که هر ایدآل اول آن مطلقا محدب باشد بررسی شده است. ایدآل سره I از $A(X)$ را ایدآلی شبه‌ثابت می‌نامند هرگاه گردآیه $\{cl_X Z(f)|f \in I\}$ دارای اشتراک ناتهی باشد. مشخصه سازی‌هایی از ایدآل‌های شبه‌ثابت در برخی زیرحلقه‌های $F(X)$ داده شده است. نشان داده شده است که اگر X همبند باشد، I ایدآلی آزاد در $C(X)$ باشد و $p \in X$، آنگاه ایدآل ناصفر J که مشمول در I است وجود دارد به‌طوری که $p \in \cap Z[J]$. زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ مورد مطالعه قرار گرفته است که هر $f \in A(X)$ با شرط $Z(f) = \emptyset$ دارای وارون ضربی در $A(X)$ باشد. زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ مورد پژوهش قرار گرفته است که برای هر $g \in C(\mathbb{R})$ و هر $f \in A(X)$ داشته باشیم $g \circ f \in A(X)$. یک تابعگون پادوردا از رسته‌ی تمام فضاهای توپولوژی و نگاشت‌های پیوسته بین آنها بتوی رسته‌ی حلقه‌های تعویض‌پذیر یکدار و همریختی‌های حافظ عضو همانی ضربی بین آنها برقرار خواهد شد.

۱. مقدمه

در این مقاله X فضای توپولوژی ناتهی را نشان می‌دهد؛ اعداد حقیقی و اعداد طبیعی به‌ترتیب با $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ نشان داده می‌شود. تابع مشخصه زیرمجموعه S از X توسط χ_S نشان داده خواهد شد. طبق معمول $\overline{A} = cl_X A$ بستار زیرمجموعه A از X را نمایش خواهد داد. تمام حلقه‌ها تعویض‌پذیر با عنصر همانی و کاهشی فرض خواهند شد. حلقه R مفروض است. برای هر $r \in R$، گردآیه تمام ایدآل‌های ماکسیمال شامل r را با $\mathcal{M}_r$ نمایش می‌دهیم و اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال در R که شامل r باشند را با نماد M_r نمایش می‌دهیم.

حلقهٔ R همراه با رابطهٔ جزئا مرتب $\geq$ را یک حلقهٔ جزئا مرتب گوییم، هرگاه برای هر a, b, x در R شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) از $a \geq 0, b \geq 0$ نتیجه شود $ab \geq 0$.
(۲) از $a \geq b$ نتیجه شود $a + x \geq b + x$.

عبارات و کلمات کلیدي: کلمات حلقه‌های توابع، ایدآل شبه‌ثابت، فضای فشرده، حلقه P-محدب، $A(X)$.
دبیرتخصصی رابط: امیدعلی کرم‌زاده
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۰۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۰۸
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502.

هرگاه R یک حلقهٔ جزئا مرتب باشد و به ازای هر $a,b\in R$ کوچک‌ترین کران بالای $\{a,b\}$ ؛ که با $a\vee b$ نشان داده می‌شود؛ وجود داشته باشد می‌گوییم R حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب است.

فضای توپولوژی هاسدورف X را کاملا منظم یا $T_{3\frac{1}{2}}$ گویند هرگاه برای هر $x\in X$ و هر زیرمجموعه بسته Y از X که شامل x نباشد، $f\in C(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x)=1$ و $f(y)=0$ برای هر $y\in Y$.

مجموعه‌ی همه توابع حقیقی‌ـ مقدار بر X را با $F(X)$ نمایش می‌دهیم. $F(X)$ با عمل جمع و ضرب توابع یک حلقه تعویض‌پذیر یکدار است و تمام زیرحلقه‌های آن کاهشی است، یعنی، عضو پوچ‌توان ناصفر ندارند [۱]. مجموعه‌ی اعضای پیوسته $F(X)$ با $C(X)$ نشان داده شده است. حلقه تمام توابع ثابت حقیقی‌ـ مقدار روی X با $\mathbb{R}(X)$ نمایش داده خواهد شد. برای هر عدد حقیقی r، تابع با مقدار ثابت r روی X را با $\mathbf{r}$ نمایش می‌دهیم. $B_1(X)$ مجموعه تمام حدود نقطه به نقطه دنباله توابع در $C(X)$ را نشان می‌دهد. $B_1(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ است [۴]. فرض می‌کنیم $f\in F(X)$، آن‌گاه $Z(f)$ ($C(f)$) مجموعه $\{x\in X|f(x)=0\}$ (تمام نقاطی که f در آن نقاط پیوسته است) را نشان می‌دهد و $Z(f)$ را صفرـ مجموعه f می‌نامند. مجموعه تمام $f\in F(X)$ که $X\setminus C(f)$ متناهی است، با نماد $C(X)_F$ نمایش داده می‌شود و یک زیرحلقه $F(X)$ است و همچنین یک فوق‌حلقه $C(X)$ است [۷]. صفرـ مجموعه $f\in C(X)_F$ در مراجع [۲، ۷] با نماد $\mathcal{Z}(f)$ نشان داده شده است. اما وقتی f در $C(X)$ باشد نماد $Z(f)$ در مراجع [۱، ۴، ۵، ۸] استفاده شده است.

در این مقاله، به بررسی خواصی که در برخی زیرحلقه‌های $F(X)$ و $C(X)$ مشترک هستند می‌پردازیم، هرچند ممکن است قضایایی جدید در برخی زیرحلقه‌های شناخته شدهٔ $F(X)$ نیز اثبات شود. به ازای هر فضای توپولوژی X، نماد $A(X)$ زیرحلقه‌ای از $F(X)$ را نشان می‌دهد که در خاصیت مشخصی صدق کند، به‌عنوان مثال $A(X)$ می‌تواند برابر $C(X)$، $C(X)_F$ یا $B_1(X)$ باشد یا در حالت کلی $A(X)$ فقط از خاصیت خاصی که $C(X)$ دارد بهره ببرد. هدف اصلی این مقاله بررسی و مطالعه خواصی است که در برخی زیرحلقه‌های $F(X)$ مشترک هستند و برای نیل به این هدف، از یکسان سازی و عمومی سازی نمادهای گوناگونی که در این زیرحلقه‌ها استفاده شده است شروع می‌کنیم. اعضای کران‌دار $A(X)$ که زیرحلقه‌ای از آن است با نماد $A^*(X)$ نشان داده شده است.

نخست توجه می‌کنیم که $F(X)$ را می‌توان مساوی $C(Y)$ در نظر گرفت که در آن فضای توپولوژی Y همان مجموعه X با توپولوژی گسسته است. پس اگر $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ باشد، آن‌گاه بنابه [۸]، تساوی‌های زیر به ازای هر $m,n\in\mathbb{N}, a,b\in A(X)$ برقرار است.

(۱) $Z(a)=Z(|a|)=Z(a^n)$؛

(۲) $Z(a^mb^n)=Z(a)\cup Z(b)$؛

(۳) $Z(|a|^n+|b|^m)=Z(a^{2m}+b^{2n})=Z(a)\cap Z(b)$؛

(۴) $Z(\mathbf{n})=\emptyset$.

توجه می‌کنیم که خواص (۱)، (۲)، (۳) و (۴) در برخی زیرحلقه‌های $F(X)$ را با نمادهای گوناگون می‌توان در مراجع [۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۸] یافت. برای مفاهیم تعریف نشده، خواننده را به منابع [۶، ۸] ارجاع می‌دهیم.

۲. نتایج اصلی

فرض کنیم $\mathcal{P}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژی X باشد که تحت اجتماع و اشتراک متناهی بسته است، یعنی، $P_1,P_2\in\mathcal{P}$ ایجاب کند که $P_1\cap P_2\in\mathcal{P}$ و $P_1\cup P_2\in\mathcal{P}$. یادآوری می‌کنیم که گردآیه ناتهی $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های X را یک $\mathcal{P}$ـ پالایه روی X می‌نامند هرگاه

(۱) اگر $P_1,\ P_2\in\mathcal{P}$ ، آن‌گاه $P_1\cap P_2\in\mathcal{P}$؛

(۲) اگر $P_1\in\mathcal{P}$ و $P_1\subseteq P_2\in\mathcal{P}$ ، آن‌گاه $P_2\in\mathcal{P}$؛

(۳) $\emptyset\notin\mathcal{P}$.

یک $\mathcal{P}$ـ پالایه $\mathcal{U}$ روی X را یک $\mathcal{P}$ـ فراپالایه گویند، هرگاه هیچ $\mathcal{P}$ـ پالایه دیگری وجود نداشته باشد به طوری که $\mathcal{U}$ به‌طور سره زیرمجموعهٔ آن باشد.

تبصره ۱.۲. اگر X یک فضای توپولوژی باشد، آن‌گاه برای هر زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$، مجموعه تمام صفرـ مجموعه‌های توابع در $A(X)$ را با نماد زیر نشان می‌دهیم.

$$Z_{A(X)} = \{\, Z(f) \mid f \in A(X) \,\}.$$

بر اساس خواص صفرـ محموعه‌ها که در مقدمه گفته شد، $\mathcal{P} = Z_{A(X)}$ تحت اجتماع و اشتراک متناهی بسته است. بنابراین با توجه به آنچه در بالا آمد، $Z_{A(X)}$ـ پالایه‌ها و $Z_{A(X)}$ـ فراپالایه‌ها روی X را می‌توان تعریف کرد. صفرـ مجموعهٔ تابعی در $F(X)$ که مقدار ثابت صفر داشته باشد، برابر X است، پس X در هر $Z_{A(X)}$ـ پالایه قرار دارد.

در [۸] از نمادهای $Z(X)$ و $Z[C(X)]$ به‌جای $Z_{C(X)} = Z_{C^*(X)}$ استفاده شده است. در [۲، ۷] از نمادهای $\mathcal{Z}[C(X)_F]$ و $\mathcal{Z}(X)$ به‌جای $Z_{C(X)_F} = Z_{C^*(X)_F}$ استفاده شده است. در [۴] از نماد $Z(B_1(X))$ به‌جای $Z_{B_1(X)} = Z_{B_1^*(X)}$ استفاده شده است. بنابراین $Z_{C(X)}$ـ پالایه‌ها دقیقا همان zـ پالایه‌های معرفی شده در [۸] است، $Z_{C(X)_F}$ـ پالایه‌ها دقیقا همان $\mathcal{Z}$ـ پالایه‌های معرفی شده در [۲، ۷] است و $Z_{B_1(X)}$ـ پالایه‌ها دقیقا همان Z_Bـ پالایه‌های معرفی شده در [۵] است.

تبصره ۲.۲. تابع $Z : F(X) \to Z_{F(X)}$ که هر تابع در $F(X)$ را به صفرـ مجموعه متناظرش می‌برد قابل تعریف است. پس $Z_{A(X)}$ در حقیقت برابر $Z[A(X)]$ است. اگر $\mathcal{F}$ یک $Z_{A(X)}$ـ پالایه باشد، آن‌گاه مجموعه $\{f \in A(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$ برابر $Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$ است و اگر I یک ایدآل در $A(X)$ باشد، آن‌گاه $\{Z(f) : f \in I\}$ برابر $Z[I]$ است.
در [۵]، تحدید تابع Z روی $B_1(X)$ را با نماد Z_B نشان داده‌اند، برای مثال، اگر I ایدآلی در $B_1(X)$ باشد، آن‌گاه از نماد $Z_B[I]$ برای نمایش مجموعه $Z[I] = \{Z(f) : f \in I\}$ استفاده شده است. تحدید تابع Z روی $C(X)_F$ در [۷] توسط $\mathcal{Z}$ نشان داده شده است.

اکنون آماده‌ایم مطالبی که برای برخی زیرحلقه‌های $F(X)$ اثبات شده‌اند را در حالت کلی اثبات کنیم. نخست با گزاره زیر شروع می‌کنیم.

گزاره ۳.۲. *اگر $\mathcal{F}$ یک $Z_{A(X)}$ـ پالایه در X باشد، آن‌گاه $Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X) = \{f \in A(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$ یک ایدآل سره در $A(X)$ است.*

اثبات. اگر $f, g \in Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$، آن‌گاه از $Z(f) \cap Z(g) \subseteq Z(f-g)$ و $Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{F}$ نتیجه می‌گیریم $f-g \in Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$، زیرا $\mathcal{F}$ یک $Z_{A(X)}$ـ پالایه روی X است. از $f \in Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X),\ g \in A(X)$ و $Z(f) \subseteq Z(fg)$ آشکار است که $fg \in Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$. اکنون اگر $f \in Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$، آن‌گاه $Z(f) \neq \emptyset$ زیرا $\emptyset \notin \mathcal{F}$. پس f دارای وارون ضربی نیست و بنابراین $Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$ یک ایدآل سره در $A(X)$ است. $\square$

چون $Z[Z^{-1}[\mathcal{F}]] = \mathcal{F}$، هر $Z_{A(X)}$ـ پالایه $\mathcal{F}$ روی X، به‌صورت $Z[I]$ است که در آن $I = Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$. توجه می‌کنیم که بنا به گزاره ۳.۲، $I = Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X)$ یک ایده‌آل سره $A(X)$ است. واضح است که اگر I یک ایدآل در $A(X)$ باشد، آن‌گاه $Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X) \supseteq I$.
فرض کنیم $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ باشد که دارای خاصیت زیر است.

$$\text{هر } f \in A(X) \text{ که } Z(f) = \emptyset \text{ دارای وارون ضربی در } A(X) \text{ است.} \tag{۱.۲}$$

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

فضای توپولوژی X را شبه‌فشرده گویند، هرگاه هر تابع پیوسته حقیقی‌ـ مقدار روی آن، کران‌دار باشد؛ به‌عبارت دیگر هرگاه داشته باشیم $C(X) = C^*(X)$. اگر X فضای توپولوژی شبه‌فشرده نباشد شرط (۱.۲) برای $A(X) = C^*(X)$ برقرار نیست، اما شرط (۱.۲) برای $A(X) = C(X)$ برقرار است [۸، ۱۲.۱ ، ۱۳.۱].

اکنون قضیه زیر که در زیرحلقه‌های خاص از $F(X)$ در [۷، ۸] و [۴، قضیه‌های ۵.۲ و ۶.۲] و با نمادهای گفته شده در تبصره ۲.۲ بیان شده است را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. *فرض می‌کنیم شرط (۱.۲) برای زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ برقرار باشد. در این‌صورت احکام زیر درست است.*

(۱) *اگر I یک ایدآل سره در $A(X)$ باشد، آن‌گاه $Z[I] = \{Z(f) : f \in I\}$ یک $Z_{A(X)}$ ـ پالایه روی X است و $Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X)$ یک ایدآل سره در $A(X)$ است.*

(۲) *فرض می‌کنیم M یک ایدآل ماکسیمال در $A(X)$ باشد. اگر $f \in A(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $Z(f)$ با هر عضو $Z[M]$ اشتراک داشته باشد، آن‌گاه $f \in M$.*

اثبات. (۱) ایدآل سره I در $A(X)$ مفروض است. بنا به فرض $\emptyset \notin Z[I]$. اگر به ازای $f, g \in I$، صفرـ مجموعه‌های $Z(f), Z(g)$ دو عضو $Z[I]$ باشند، آن‌گاه از $f^2 + g^2 \in I$ نتیجه می‌گردد $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2) \in Z[I]$. اکنون اگر $Z(h) \in Z_{A(X)}$ و به ازای $f \in I$ داشته باشیم $Z(f) \subseteq Z(h)$، آن‌گاه $Z(h) = Z(f) \cup Z(h) = Z(fh) \in Z[I]$ و در نتیجه $\mathcal{F} = Z[I]$ یک $Z_{A(X)}$ ـ پالایه روی X است. پس گزاره ۳.۲ ایجاب می‌کند که $Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X) = Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X)$ یک ایدآل سره در $A(X)$ است.

(۲) چون $Z(f)$ هر عنصر $Z[M]$ را قطع می‌کند، گردآیه‌ی تمام صفرـ محموعه‌های عناصر $A(X)$ که شامل اشتراک‌های متناهی از $\{Z(f)\} \cup Z[M]$ باشند یک $Z_{A(X)}$ ـ پالایه است. پس، بنابه لم زرن، $Z_{A(X)}$ ـ فراپالایه $\mathcal{A}$ وجود دارد به‌طوری که $\{Z(f)\} \cup Z[M]$ زیرگردآیه‌ای از $\mathcal{A}$ است. پس $M \subseteq Z^{-1}[Z[M]] \cap A(X) \subseteq Z^{-1}(\mathcal{A}) \cap A(X)$ و گزاره ۳.۲ ایجاب می‌کند $Z^{-1}(\mathcal{A}) \cap A(X)$ یک ایدآل سره در $A(X)$ است. بنابراین از ماکسیمال بودن ایدآل M و قسمت‌های بالا نتیجه می‌شود، $M = Z^{-1}[Z[M]] \cap A(X) = Z^{-1}(\mathcal{A}) \cap A(X)$. پس $f \in M$. $\square$

لم زیر نشان می‌دهد، حلقه $C(X)_F$ در شرط (۱.۲) صدق می‌کند.

لم ۵.۲. [۷، لم ۴.۲(۳)] *تابع $f \in C(X)_F$ در $C(X)_F$ دارای وارون ضربی است اگر و تنها اگر صفرـ مجموعه f؛ که با نماد $\mathcal{Z}(f)$ نشان داده می‌شود؛ تهی باشد.*

تعریف ۶.۲. زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ و ایدآل سره I از $A(X)$ مفروض است. I را ایدآل ثابت می‌نامیم هرگاه $\bigcap Z[I]$ ناتهی باشد و اگر چنین نباشد، I را ایدآلی آزاد می‌گوییم.

تاکنون ایدآل‌های آزاد و ثابت در زیرحلقه‌های $C(X)$، $C(X)_F$ و $B_1(X)$ مورد بررسی قرار گرفته است. ما خواص چنین ایدآل‌هایی را در یک زیرحلقه دلخواه $F(X)$ بررسی خواهیم کرد. فرض کنید $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ باشد که در شرط (۱.۲) صدق کند. واضح است که هر ایدآل آزاد در $A(X)$ مشمول در هیچ ایدآل ثابتی نیست اما اگر I یک ایدآل آزاد سره در $A(X)$ باشد و $f \in I$، آن‌گاه f دارای وارون ضربی نیست و در نتیجه با توجه به شرط (۱.۲)، $Z(f) \neq \emptyset$. پس ایدآل تولید شده توسط f در $A(X)$ که ثابت است مشمول در I است.

گزاره ۷.۲. *فرض کنیم I یک ایدآل سره و آزاد در $A(X)$ باشد و $p \in X$. اگر شرط (۱.۲) برای $A(X)$ برقرار باشد و $A(X)$ شامل همه توابع ثابت باشد، آن‌گاه ایدآل ناصفر J که زیرمجموعه I است وجود دارد به‌طوری که $p \in \bigcap Z[J]$ یا X اجتماع مجزای دو صفرـ مجموعه ناتهی از اعضای $A(X)$ است.*

اثبات. $f \in I$ وجود دارد به‌طوری که $r = f(p) \neq 0$ زیرا I ایدآلی آزاد است و بنابراین $g = f(f - \mathbf{r}) \in I$. پس $p \in Z(f - \mathbf{r})$ و با توجه به شرط (۱.۲)، $Z(f) \neq \emptyset$. ایدآل تولید شده توسط g در $A(X)$ را با J نشان می‌دهیم. اگر g تابعی ناصفر باشد، آن‌گاه J یک ایدآل ثابت ناصفر مشمول در I است که $p \in \bigcap Z[J]$ و در غیر این‌صورت، $X = Z(f) \bigcup Z(f - \mathbf{r})$ که اثبات را کامل می‌کند. □

یادآوری می‌کنیم که یک فضای توپولوژیک را همبند گویند، هرگاه نتوان آن را به‌صورت اجتماع دو زیرمجموعه باز، ناتهی و مجزا از فضا نوشت. برای هر ایدآل آزاد و سره I در $C(X)$، از برهان گزاره ۷.۲ آشکار است که اگر X همبند باشد و $p \in X$، آن‌گاه ایدآل ناصفر و ثابت J در $C(X)$ که مشمول در I است وجود دارد به‌طوری که $p \in \cap Z[J]$.

لم ۸.۲. *فرض می‌کنیم $A(X)$ شامل $\mathbb{R}(X)$ باشد. در این‌صورت برای هر $p \in X$، مجموعه*

$$M_p^{A(X)} = \{f \in A(X) : f(p) = 0\} \tag{۲.۲}$$

یک ایدآل ماکسیمال ثابت در $A(X)$ است.

اثبات. برای هر $p \in X$، نگاشت $\phi : A(X) \to \mathbb{R}$ که با ضابطه $\phi(f) = f(p)$ تعریف می‌شود یک همریختی حلقه است و چون $A(X)$ شامل تمام نگاشت‌های ثابت است، ϕ پوشاست و در نتیجه $\ker \phi = \{f \in A(X) | f(p) = 0\}$ یک ایدآل ماکسیمال ثابت $A(X)$ است. □

یادآوری می‌کنیم که حلقهٔ R را نیم‌اولیه گوییم، هرگاه اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال آن مساوی صفر باشد. پس نتیجه زیر از لم بالا به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹.۲. *اگر $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ و شامل $\mathbb{R}(X)$ باشد، آن‌گاه $A(X)$ نیم‌اولیه است.*

قضیه ۱۰.۲. *فرض کنید X یک $T_{3\frac{1}{2}}$–فضا باشد. اگر $A(X)$ و $B(X)$ دو زیرحلقه $F(X)$ و شامل $C(X)$ باشند، آن‌گاه بین ایدآل‌های ماکسیمال ثابت $A(X)$ و $B(X)$ یک تناظر دوسویی برقرار است.*

اثبات. برای هر $p \in X$، از لم ۸.۲ نتیجه می‌شود که $M_p^{A(X)} = \{f \in A(X) | f(p) = 0\}$ ایدآل ماکسیمال ثابت $A(X)$ است. پس $M_p^{A(X)} \bigcap C(X) = M_p^{C(X)}$ که یک ایدآل ماکسیمال ثابت $C(X)$ است. اکنون اگر p, q دو نقطه متمایز از X باشند، آن‌گاه $M_p^{C(X)} \neq M_q^{C(X)}$ زیرا X یک $T_{3\frac{1}{2}}$–فضا است. بنابراین $M_p^{A(X)} \neq M_q^{A(X)}$.
ایدآل ماکسیمال ثابت M در $A(X)$ مفروض است. پس $q \in \cap Z[M]$ وجود دارد، به این ترتیب داریم $M \subseteq M_q^{A(X)}$ و از ماکسیمال بودن M در $A(X)$ نتیجه می‌گردد که $M = M_q^{A(X)}$. پس $\mathcal{M} = \{M_p^{A(X)} | p \in X\}$ گردآیه تمام ایدآل‌های ماکسیمال ثابت $A(X)$ است.
مشابه با روش بالا، X با گردایه ایدآل‌های ماکسیمال ثابت $B(X)$ نیز در تناظر دوسویی است و در نتیجه حکم برقرار است. □

تبصره ۱۱.۲. در مرجع [۸] ایدآل $M_p^{C(X)}$ با M_p، در مراجع [۲، ۷] ایدآل $M_p^{C(X)_F}$ با M_p و در مرجع [۵] ایدآل $M_p^{B_1(X)}$ با $\widehat{M_p}$ نشان داده شده است.

فرض می‌کنیم $A(X)$ در شرط (۱.۲) صدق کند و $\mathbb{R}(X) \subseteq A(X)$. اکنون یک طبقه‌بندی توپولوژیک برای اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال در $A(X)$ که شامل $f \in A(X)$ است را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱۲.۲. *فرض می‌کنیم $A(X)$ زیرحلقه‌ای از $F(X)$ باشد که شامل $\mathbb{R}(X)$ است و در شرط (۱.۲) صدق می‌کند. اگر $f \in A(X)$، آن‌گاه $M_f = \bigcap_{M \in \mathcal{M}_f} M$ مساوی مجموعه همه‌ی $g \in A(X)$ است که $Z(f) \subseteq Z(g)$.*

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

اثبات. فرض می‌کنیم $g \in A(X)$ وجود داشته باشد که $Z(f) \not\subseteq Z(g)$. اگر $p \in Z(f) \setminus Z(g)$، آن‌گاه $M_p^{A(X)}$ ؛ که توسط تساوی (۲.۲) در لم ۸.۲ تعریف شده است؛ ایدآل ماکسیمال شامل f است که شامل g نیست. پس از $M_f \subseteq M_p^{A(X)}$ نتیجه می‌گیریم $g \notin M_f$.

به‌عکس، فرض کنیم برای $f, g \in A(X)$ داشته باشیم $Z(f) \subseteq Z(g)$ و $M \in \mathcal{M}_f$. پس $Z(g) \in Z[M]$. اما از $M \supseteq Z^{-1}[Z[M]] \cap A(X)$ و ماکسیمال بودن ایدآل M در $A(X)$ و قضیه ۴.۲ نتیجه می‌گیریم که

$$g \in Z^{-1}[Z[M]] \cap A(X) = M,$$

و در نتیجه $M \in \mathcal{M}_g$. بنابراین $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{M}_g$ که از آن $g \in M_g \subseteq M_f$ حاصل می‌گردد. □

تعریف ۱۳.۲. اگر I یک ایدآل سره در $A(X)$ باشد به‌طوری که $Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X) = I$، آن‌گاه I را یک $Z_{A(X)}$ـ ایدآل می‌نامیم.

یک $Z_{C(X)}$ـ ایدآل در $C(X)$ در مرجع [۸] یک zـ ایدآل نامیده شده است. یک $Z_{C(X)_F}$ـ ایده‌آل در $C(X)_F$ در مرجع [۷] یک zـ ایدآل نامیده شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. یک $Z_{B_1(X)}$ـ ایدآل در $B_1(X)$ در مرجع [۴] یک Z_Bـ ایدآل نامیده شده است. فرض می‌کنیم $A(X)$ یک زیرحلقه‌ی $F(X)$ باشد که در شرط (۱.۲) صدق کند. اگر M یک ایدآل ماکسیمال $A(X)$ باشد، آن‌گاه بنا به قضیه ۴.۲، ایدآل $Z^{-1}[Z[M]] \cap A(X)$ در $A(X)$ سره است و در نتیجه از ماکسیمال بودن M و $M \subseteq Z^{-1}[Z[M]] \cap A(X)$ نتیجه می‌گیریم که $M = Z^{-1}[Z[M]] \cap A(X)$، یعنی، M یک $Z_{A(X)}$ـ ایدآل است.
اکنون، دو گزاره بعد را که برای برخی زیرحلقه‌های شناخته شده $F(X)$ بیان شده را در حالت کلی‌تری اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱۴.۲. *فرض می‌کنیم $A(X)$ یک زیرحلقه‌ی $F(X)$ باشد. برای ایدآل سره I در $A(X)$ شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) *I یک $Z_{A(X)}$ـ ایدآل است.*
(۲) *$Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X) \subseteq I$.*
(۳) *از $g \in A(X)$، $f \in I$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$ نتیجه شود $g \in I$.*

اثبات. (۲) ⇔ (۱). چون همواره $I \subseteq Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X)$، (۱) و (۲) معادل هستند.
(۲) ⇐ (۳). فرض می‌کنیم $Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X) \subseteq I$، $g \in A(X)$، $f \in I$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$. پس $Z(g) \in Z[I]$ و بنابراین $Z(h) = Z(g)$، که در آن $h \in I$. بنابراین $g \in Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X)$ که ایجاب می‌کند $g \in I$.
(۳) ⇐ (۲). فرض کنید از $g \in A(X)$، $f \in I$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$ نتیجه شود $g \in I$. اگر $k \in Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X)$، آن‌گاه $h \in I$ وجود دارد به‌طوری که $Z(h) = Z(k)$ و بنابراین $k \in I$. پس، $Z^{-1}[Z[I]] \cap A(X) \subseteq I$. □

گزاره ۱۵.۲. *فرض می‌کنیم $A(X)$ زیرحلقه‌ای از $F(X)$ باشد که شامل $\mathbb{R}(X)$ است و در شرط (۱.۲) صدق می‌کند. در این‌صورت ایدآل سره I یک $Z_{A(X)}$ـ ایدآل است اگر تنها اگر برای هر $f \in I$، از $g \in M_f$ نتیجه شود $g \in I$، یعنی I به تعبیر Mason در منبع [۱۳]، یک zـ ایدآل باشد.*

اثبات. از گزاره ۱۲.۲ داریم $M_f = \{g \in A(X) | Z(f) \subseteq Z(g)\}$. اکنون، حکم از گزاره ۱۴.۲، حاصل می‌گردد. □

تبصره ۱۶.۲. فرض کنید $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ باشد که در شرط (۱.۲) صدق کند و شامل $\mathbb{R}(X)$ باشد. در ادامه این مقاله با توجه به گزاره ۱۵.۲، یک $Z_{A(X)}$ـ ایدآل در $A(X)$ را یک zـ ایدآل در $A(X)$ خواهیم نامید.
برای هر $f \in A(X)$، M_f یک zـ ایدآل است زیرا برای هر $g \in M_f$، داریم $M_g \subseteq M_f$. در حقیقت، کوچک‌ترین zـ ایدآل شامل تابع f برابر M_f است. گزاره ۱۵.۲ ایجاب می‌کند که اگر I یک zـ ایدآل در $A(X)$ باشد، آن‌گاه برای هر $f \in I$، داریم $f \in M_f \subseteq I$. پس، به آسانی دیده می‌شود که $I = \sum_{f \in I} M_f$.

تعریف ۱۷.۲. زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ مفروض است. اگر $\mathcal{F}$ یک $Z_{A(X)}$ـ پالایه روی X باشد، آن‌گاه گردآیه بستار تمام اعضای $\mathcal{F}$ را با $\overline{\mathcal{F}}$ نشان می‌دهیم و اگر I ایدآلی سره در $A(X)$ باشد، آن‌گاه I را شبه‌ثابت گوییم هرگاه $\bigcap \overline{Z[I]} \neq \emptyset$.

توجه می‌کنیم که اگر $\mathcal{F}$ یک $Z_{C(X)}$ـ پالایه یا $Z_{C^*(X)}$ـ پالایه باشد، آن‌گاه $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. بنابراین مفهوم ایدآل شبه‌ثابت در $C(X)$ بر مفهوم ایدآل ثابت منطبق می‌شود.
واضح است که هر ایدآل ثابت در یک زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ ایدآلی شبه ثابت است، مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب برقرار نیست.

مثال ۱۸.۲. فرض کنیم $S = \{۱ - \chi_{(۰,\frac{۱}{n})} \mid n \in \mathbb{N}\}$ و I ایدآل تولید شده توسط S در حلقه $C(\mathbb{R})_F$ باشد. در این صورت I ایدآلی آزاد، سره و شبه‌ثابت در $C(\mathbb{R})_F$ است.

تبصره ۱۹.۲. زیرمجموعه ناتهی S از فضای توپولوژیک X و زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ مفروض است. تابع $\phi : A(X) \to A(S)$ که با ضابطه $\phi(f) = f|S$ تعریف می‌شود یک همریختی حلقه است و $\ker \phi$ را که با K_S نشان می‌دهیم یک ایدآل ثابت در $A(X)$ است. زیرا، $K_S = \{f \in A(X) : S \subseteq Z(f)\}$.

قضیه ۲۰.۲. *زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ و زیرمجموعه ناتهی B از $A(X)$ مفروض است. اگر $S_B = \bigcup_{b\in B}(X \setminus Z(b))$ ناتهی باشد، آن‌گاه $K_{S_B} = Ann(B)$.*

اثبات. اگر $f \in Ann(B)$، آن‌گاه برای هر $b \in B$، $fb = ۰$ و در نتیجه $X \setminus Z(b) \subseteq Z(f)$. پس $f|S_B$ تابع با مقدار ثابت صفر است و در نتیجه $f \in K_{S_B}$. بنابراین $Ann(B) \subseteq K_{S_B}$. به‌عکس، اگر $f \in K_{S_B}$، آن‌گاه $f|S_B$ تابع با مقدار ثابت صفر است، یعنی، برای هر $b \in B$ داریم $X \setminus Z(b) \subseteq Z(f)$ و بنابراین $fb = ۰$ و یا $f \in Ann(B)$. پس $K_{S_B} \subseteq Ann(B)$ که اثبات را کامل می‌کند.

□

قضیه ۲۱.۲. *زیرمجموعه‌های ناتهی A, B, S از $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ـ فضای X و زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ که شامل $C(X)$ است را در نظر می‌گیریم. اگر $L_S = \{f \in A(X) | S \subseteq \overline{Z(f)}\}$، آن‌گاه احکام زیر برقرار است.*

(۱) *L_S یک zـ ایدآل شبه‌ثابت در $A(X)$ است.*

(۲) *$L_D = L_B$ اگر و تنها اگر $\overline{D} = \overline{B}$.*

(۳) *اگر $L_B = \{۰\}$، آن‌گاه B در X چگال است.*

اثبات. (۱) واضح است.
(۲) فرض کنید $\overline{D} = \overline{B}$. پس $L_D = L_{\overline{D}} = L_{\overline{B}} = L_B$. به‌عکس، اگر $\overline{D} \neq \overline{B}$، آن‌گاه بدون از دست رفتن کلیت، فرض کنیم $p \in \overline{D} \setminus \overline{B}$ وجود داشته باشد. پس بنا به کاملا منظم بودن فضا، تابع f_p در $C(X)$ وجود دارد به‌طوری که $f_p(p) = ۱$ و $\overline{B} \subseteq Z(f_p) = \overline{Z(f_p)}$. پس $f_p \in L_B \setminus L_D$.
(۳) اگر B در X چگال نباشد، آن‌گاه $p \in X \setminus \overline{B}$ وجود دارد. پس نظیر آنچه در بالا بیان کردیم تابع ناصفر $f_p \in L_B$ وجود دارد.
□

زیرحلقه‌ای دلخواه از $F(X)$ مفروض است. می‌خواهیم نوع توپولوژی X را تعیین کنیم که تمام ایدآل‌های سره این زیرحلقه شبه‌ثابت باشد و ببینیم کی عکس آن درست است. برای رسیدن به این هدف گزاره زیر لازم است.

گزاره ۲۲.۲. *فضای توپولوژیک هاسدورف X و زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ که در شرط (۱.۲) صدق می‌کند، مفروض است. در این‌صورت احکام زیر برقرار هستند.*

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

(۱) *اگر X فشرده باشد، آن‌گاه هر ایدآل سره $A(X)$ شبه‌ثابت است.*
(۲) *اگر X فضای کاملاً منظم و $A(X)$ یک فوق‌حلقه $C(X)$ باشد که هر ایدآل سره آن شبه‌ثابت باشد، آن‌گاه X فشرده است.*

اثبات. (۱) ایدآل سره I از $A(X)$ داده شده است. پس بنا به فرض، گردآیه $Z[I]$ از زیر مجموعه‌های ناتهی تشکیل شده است و بنابراین $\overline{Z[I]}$ نیز که گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های بسته ناتهی است دارای خاصیت اشتراک متناهی است زیرا گردایه $Z[I]$ این خاصیت را دارد. در نتیجه ایدآل I بنا به فشردگی X، شبه‌ثابت است.
(۲) فرض کنیم I یک ایدآل سره در $C(X)$ باشد. اگر J ایدآل تولید شده توسط I در $A(X)$ باشد، آن‌گاه J یک ایدآل سره $A(X)$ است و بنابراین شبه‌ثابت است.

$$\emptyset \neq \bigcap \overline{Z[J]} \subseteq \bigcap \overline{Z[I]}.$$

بنا به قضیه ۴.۲، $Z[I]$ یک $Z_{C(X)}$ـ پالایه است، پس $\bigcap \overline{Z[I]} = \bigcap Z[I]$ و در نتیجه I ایدآلی ثابت در $C(X)$ است. پس X فشرده است [۸، قضیه ۱۱.۴]. □

T_1ـ فضای X مفروض است. در [۷، قضیه ۲.۳] نشان داده شده است که X متناهی است اگر و تنها اگر هر ایدآل سره $C(X)_F$ ثابت باشد، اما اگر X یک فضای فشرده نامتناهی باشد، آن‌گاه گزاره ۲۲.۲ ایجاب می‌کند که هر ایدآل سره در $C(X)_F$ شبه‌ثابت است و توجه می‌کنیم که هیچ ایدآل سره $C(X)_F$ ثابت نیست.

نتیجه ۲۳.۲. *فضای کاملاً منظم X مفروض است. در این‌صورت شرایط زیر هم‌ارزند.*
(۱) *هر ایدآل سره در هر زیرحلقه $F(X)$ که شامل $C(X)$ باشد و در شرط (۱.۲) صدق کند، شبه‌ثابت است.*
(۲) *یک زیرحلقه $F(X)$ که شامل $C(X)$ باشد و در شرط (۱.۲) صدق کند وجود دارد به‌طوری که هر ایدآل سره آن شبه‌ثابت است.*
(۳) *X فشرده است.*
(۴) *هر ایدآل سره $C(X)$ ایدآل ثابت است.*

قضیه ۲۴.۲. *فضای هاسدورف X و زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ و ایدآل سره I در $A(X)$ مفروض است. I یک ایدآل شبه‌ثابت نیست اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه فشرده ناتهی Y از X، صفرـ مجموعه $Z(f)$ در $Z[I]$ وجود داشته باشد که $\overline{Z(f)} \cap Y = \emptyset$.*

اثبات. فرض می‌کنیم I یک ایدآل شبه‌ثابت در $A(X)$ نباشد. پس برای هر $x \in X$ تابع $f_x \in I$ وجود دارد به‌طوری که $x \notin \overline{Z(f_x)}$. زیرمجموعه فشرده ناتهی Y از X داده شده است. پس، فشردگی Y ایجاب می‌کند که زیرمجموعه متناهی F از Y وجود دارد به‌طوری که

$$Y \subseteq \bigcup_{y\in F} (X \setminus \overline{Z(f_y)}).$$

اما با استفاده از خواص صفرـ مجموعه‌ها داریم.

$$Y \subseteq X \setminus \bigcap_{y\in F} (\overline{Z(f_y)}) \subseteq X \setminus \overline{\bigcap_{y\in F} Z(f_y)} = X \setminus \overline{Z(\sum_{y\in F} f_y^2)}.$$

پس $f = \sum_{y\in F} f_y^2 \in I$ و در نتیجه $Z(f) \in Z[I]$ در شرط $Y \bigcap \overline{Z(f)} = \emptyset$ صدق می‌کند.
به‌عکس، فرض کنیم به ازای هر زیرمجموعه فشرده ناتهی Y از X، تابع f_Y در I وجود داشته باشد به‌طوری که $\overline{Z(f_Y)} \cap Y = \emptyset$. پس اگر $x \in X$ ، آن‌گاه $f_{\{x\}} \in I$ وجود دارد که $\{x\} \cap \overline{Z(f_{\{x\}})} = \emptyset$ و در نتیجه I ایدآلی شبه‌ثابت نیست. □

مشخصه سازی توپولوژیک زیر از یک ایدآل شبه‌ثابت، نتیجه مستقیم قضیه بالا است.

نتیجه ۲.۲۵. *فرض کنید X فضایی هاسدورف و I ایدآلی سره در یک زیرحلقه $F(X)$ باشد. در این‌صورت I ایدآلی شبه‌ثابت است اگر و تنها اگر یک زیرمجموعه فشرده ناتهی Y از X وجود داشته باشد به‌طوری که بستار هر صفرـ مجموعه که در $Z[I]$ است Y را قطع کند.*

نتیجه ۲.۲۶. *فرض کنید X فضای هاسدورف و Y یک زیرمجموعه فشرده آن باشد که زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ و $A(Y)$ از $F(Y)$ در شرط (۲.۱) صدق کنند، I ایدآلی سره از $A(X)$ باشد که شبه‌ثابت نیست و $\phi: I \to A(Y)$ تابعی با ضابطه $\phi(g) = g|Y$ باشد.*

(۱) *اگر برای هر $g \in A(Y)$ که دارای وارون ضربی در $A(Y)$ است تابع $f \in A(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f|Y = g$، آن‌گاه $J = \phi[I]$ یک زیرحلقه یکدار $A(Y)$ است.*

(۲) *اگر برای هر $g \in A(Y)$، تابع $f \in A(X)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f|Y = g$، آن‌گاه ϕ تابعی پوشا است.*

اثبات. (۱) فرض کنید $J = \phi[I]$، پس تابع با مقدار ثابت صفر روی Y در J است و اگر $f, g \in I$ آن‌گاه $f|Y - g|Y = (f-g)|Y \in J$ و همچنین $f|Y.g|Y = (f.g)|Y \in J$. بنا به قسمت رفت برهان قضیه ۲.۲۴، تابع $f \in I$ وجود دارد به‌طوری که $Y \cap \overline{Z(f)} = \emptyset$. پس $Z(f|Y) = \emptyset$. چون $A(Y)$ در شرط (۲.۱) صدق می‌کند، تابع $f|Y \in J$ دارای وارون ضربی h در $A(Y)$ است و در نتیجه تابع $k \in A(X)$ بنا به فرض ما در (۱) وجود دارد به‌طوری که $k|Y = h$. پس $f.k \in I$ و $\phi(f.k) = f|Y.k|Y = f|Y.h = 1 \in J$ و بنابراین J یک زیرحلقه یکدار $A(Y)$ است.

(۲) بنا به قسمت (۱)، J یک زیرحلقه یکدار $A(Y)$ است. اگر $f \in J, g \in A(Y)$، آن‌گاه بنا به فرض توابع $h \in I,\ k \in A(X)$ وجود دارند به‌طوری که $h|Y = f,\ k|Y = g$. پس، $h.k \in I$ و $\phi(h.k) = f.g \in J$، یعنی، زیرحلقه J از $A(Y)$ یک ایدآل نیز است. بنابراین $J = A(Y)$ که اثبات را کامل می‌کند. □

۲.۱. ترکیب توابع پیوسته با اعضای یک زیرحلقه از $F(X)$. در این زیربخش، زیرحلقه‌ی $A(X)$ از $F(X)$ را مطالعه می‌کنیم که $f \in A(X),\ g \in C(\mathbb{R})$ ایجاب کند $g \circ f \in A(X)$. همچنین یک تابعگون پادوردا از رسته‌ی تمام فضاهای توپولوژی و نگاشت‌های پیوسته بین آنها بتوی رسته‌ی حلقه‌های تعویض‌پذیر یکدار و همریختی‌های حافظ عضو همانی ضربی بین آنها برقرار خواهد شد. برخی زیرحلقه‌های مشبکه‌ای از $F(X)$ را بررسی خواهیم کرد.

نخست، به ازای فضای توپولوژی X فرض کنیم زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ دارای ویژگی زیر باشد.

اگر $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر $f \in A(X)$ داریم $g \circ f \in A(X)$. (۲.۳)

بدیهی است که به ازای $A(X) = C(X)$، شرط بالا برقرار است.

مثال ۲.۲۷. فضای توپولوژی دلخواه X و $g \in C(\mathbb{R})$ مفروض است. اگر $f \in C(X)_F$، آن‌گاه $C(f) \subseteq C(g \circ f)$ و در نتیجه $g \circ f \in C(X)_F$. اگر $f \in B_1(X)$، آن‌گاه یک دنباله از توابع پیوسته $\{f_n\}$ حقیقی‌ـ مقدار روی X وجود دارد که به‌طور نقطه به نقطه به f همگراست. پس بنا به پیوستگی g برای هر $x \in X$، $lim_{n\to\infty}(g \circ f_n)(x) = (g \circ f)(x)$. بنابراین $g \circ f \in B_1(X)$ و در نتیجه زیرحلقه‌های $C(X)_F$ و $B_1(X)$ در شرط (۲.۳) صدق می‌کنند.

گزاره ۲.۲۸. *زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ که برای آن شرط (۲.۳) برقرار است، داده شده است. اگر E یک زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ باشد و $f \in A(X)$، آن‌گاه $f^{-1}(E) \in Z_{A(X)}$.*

اثبات. تابع پیوسته و حقیقی‌ـ مقدار g روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $Z(g) = E$ و در نتیجه $Z(g \circ f) = f^{-1}(E)$. پس، حکم طبق فرض برقرار است. □

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

تبصره ۲.۲۹. هر چندجمله‌ای یک متغیره با ضرایب در اعداد حقیقی را می‌توان به‌عنوان تابعی حقیقی‌ـ مقدار روی $\mathbb{R}$ در نظر گرفت. حلقه تمام چندجمله‌ای‌های یک متغیره با ضرایب حقیقی که به‌عنوان زیرحلقه‌ای از $F(\mathbb{R})$ در نظر گرفته می‌شود را با $Poly(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. از $f(x) = x \in Poly(\mathbb{R})$، $g(x) = e^x \in C(\mathbb{R})$ و $g \circ f = e^x \notin Poly(\mathbb{R})$ نتیجه می‌گیریم که شرط (۲.۳) برای $Poly(\mathbb{R})$ برقرار نیست.

اگر S زیرمجموعه ناتهی از $F(X)$ باشد و $n \in \mathbb{N}$ یک عدد فرد باشد، آن‌گاه $S^{\frac{1}{n}}$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $F(X)$ را به‌صورت زیر می‌توان تعریف کرد.

$$S^{\frac{1}{n}} = \{f^{\frac{1}{n}} | f \in S\},$$

که در آن برای هر $x \in X$، $(f^{\frac{1}{n}})(x) = (f(x))^{\frac{1}{n}}$. پس اگر $A(X)$ یک زیرحلقه از $F(X)$ باشد که در شرط (۲.۳) صدق کند و I یک ایدآل در $A(X)$ باشد، آن‌گاه $I \subseteq I^{\frac{1}{n}} \subseteq A(X)$. واضح است که اگر I یک ایدآل اول یا یک zـ ایدآل در $A(X)$ باشد، آن‌گاه $I = I^{\frac{1}{n}}$ یک ایدآل در $A(X)$ است.

گزاره ۲.۳۰. *فرض کنیم $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ باشد که در شرط (۲.۳) صدق می‌کند و P_* و Q_* دو ایدآل سره در $A(X)$ باشد. اگر ایدآل‌های سره $P_*^{\frac{1}{3}}, Q_*^{\frac{1}{5}}$ در $A(X)$ اول باشند، آن‌گاه $P_*^{\frac{1}{3}} Q_*^{\frac{1}{5}} = P_*^{\frac{1}{3}} \cap Q_*^{\frac{1}{5}}$ و ایدآل‌های P_* و Q_* در $A(X)$ اول هستند.*

اثبات. قرار می‌دهیم $Q = Q_*^{\frac{1}{5}}$ و $P = P_*^{\frac{1}{3}}$. اگر $f \in P \bigcap Q$، آن‌گاه $(f^{\frac{1}{3}})^3 = f \in P$ و اول بودن P ایجاب می‌کند $f^{\frac{1}{3}} \in P$ و به‌طور مشابه $f^{\frac{1}{3}} \in Q$. پس، $f = f^{\frac{1}{3}} f^{\frac{2}{3}} \in PQ$ و در نتیجه $P \bigcap Q \subseteq PQ$. اما عکس این رابطه شمول همواره برقرار است، بنابراین $P \bigcap Q = PQ$. فرض کنیم برای $a, b \in A(X)$ داشته باشیم $t = ab \in P_*$. از $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = t^{\frac{1}{3}} \in P_*^{\frac{1}{3}} = P$ نتیجه می‌گردد که $a^{\frac{1}{3}} \in P_*^{\frac{1}{3}}$ یا $b^{\frac{1}{3}} \in P_*^{\frac{1}{3}}$ و در نتیجه $a \in P_*$ یا $b \in P_*$. پس P_* ایدآلی اول در $A(X)$ است. به‌طور مشابه ثابت می‌شود Q_* ایدآل اول است. $\square$

تبصره ۲.۳۱. فرض کنیم J ایدآل تولید شده توسط تابع همانی روی اعداد حقیقی در $C(\mathbb{R})$ است. پس، J نه یک zـ ایدآل در $C(\mathbb{R})$ است و نه ایدآل اول، اما $J^{\frac{1}{3}}$ ایدآلی است که به‌طور سره شامل J است.

اگر شرط (۲.۳) برای یک زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ برقرار باشد، آن‌گاه از گزاره بالا نتیجه می‌شود برای هر ایدآل اول P در $A(X)$ و برای هر عدد طبیعی m, n، $P^n = P$ و بنابراین $(P^n)^{\frac{1}{m}} = P$.

واضح است که به‌جای اعداد $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ در گزاره ۲.۳۰ می‌توان هر عدد کسری که صورتش عدد یک و مخرجش عددی فرد باشد را قرار داد.

فرض کنید زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ شامل تمام توابع با مقدار ثابت است که در شرط (۲.۳) صدق می‌کند. پس برای هر $f, g \in A(X)$، $|f - g| \in A(X)$ و در نتیجه $f \vee g = 2^{-1}(f + g + |f - g|) \in A(X)$. بنابراین $A(X)$ یک زیرحلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب $F(X)$ است. این مطلب و گزاره بعد در رسیدن به هدف بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

گزاره ۲.۳۲. *فضاهای توپولوژی X و Y داده شده است. فرض کنیم زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ و زیرحلقه $A(Y)$ از $F(Y)$ شامل همه توابع ثابت باشند و در شرط (۲.۳) صدق کنند. اگر $\phi : A(X) \to A(Y)$ یک همریختی حلقه باشد، آن‌گاه ϕ یک همریختی شبکهٔ جزئا مرتب است.*

اثبات. چون حلقه‌های $A(X)$ و $A(Y)$ در شرط (۲.۳) صدق می‌کنند و شامل $\mathbb{R}(X)$ هستند، این حلقه‌ها بنا به مطالب قبل، شبکهٔ جزئا مرتب هستند. اگر $h \in A(X)$ عضو بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، آن‌گاه بنا به شرط (۲.۳)، $k = \sqrt{h} = \sqrt{|h|} \in A(X)$ و بنابراین $\phi(h) = \phi(k^2) = \phi(k)^2$ عضو بزرگ‌تر مساوی صفر است، یعنی، ϕ ترتیب را حفظ می‌کند. پس از بزرگ‌تر مساوی صفر بودن $\phi(|h|)$ و $\phi(|h|)^2 = \phi(h^2) = \phi^2(h) = |\phi(h)|^2$ نتیجه می‌شود $|\phi(h)| = \phi(|h|)$. برای هر $f, g \in A(X)$،

$\phi(f\vee g+f\vee g)=\phi(f+g+|f-g|)=\phi(f)+\phi(g)+|\phi(f)-\phi((g)|=\phi(f)\vee\phi(g)+\phi(f)\vee\phi(g)$.

پس $\phi(f\vee g)=\phi(f)\vee\phi(g)$ که اثبات را تمام می‌کند. $\square$

فضای توپولوژی X مفروض است. زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ که دارای ویژگی زیر است را در نظر می‌گیریم.

اگر Y یک فضای توپولوژی و $g:X\to Y$ پیوسته باشد، آن‌گاه برای هر $f\in A(Y)$ داریم $f\circ g\in A(X)$. (۴.۲)

در ادامه این بخش، زیرحلقه‌هایی که در شرط بالا صدق می کنند را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳۳.۲. واضح است که زیرحلقه‌های $B_1(X)$ و $C(X)$ در شرط (۴.۲) صدق می‌کنند.

با توجه به مطالب قبل، گزاره زیر به‌دست می‌آید.

گزاره ۳۴.۲. *فرض کنید X یک فضای توپولوژی و زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ در شرط (۴.۲) صدق کند. اگر $\phi:X\to Y$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه تابع $A(\phi):A(Y)\to A(X)$ که به‌صورت*

$$A(\phi)(f)=f\circ\phi$$

تعریف می‌گردد یک همریختی حلقه تعویض‌پذیر یکدار است و

$$\mathcal{A}:X\to A(X),\ \phi\to A(\phi);$$

یک تابعگون پادوردا از رسته‌ی تمام فضاهای توپولوژی و نگاشت‌های پیوسته بین آنها بتوی رسته‌ی حلقه‌های تعویض‌پذیر یکدار و همریختی‌های حافظ عضو همانی ضربی بین آنها است.

اثبات. برقرای شرط (۴.۲) خوشتعریفی تابع $A(\phi)$ را نتیجه می‌دهد. واضح است که $A(\phi)$ همریختی حلقه است و حافظ عضو همانی ضربی است. اگر $\psi:Y\to Z$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه

$$A(\psi\circ\phi)(f)=(\psi\circ\phi)(f)=f\circ(\psi\circ\phi)=(f\circ\psi)\circ\phi=A(\phi)(f\circ\psi)=A(\phi)(A(\psi)(f))=(A(\phi)\circ A(\psi))(f).$$

پس $\mathcal{A}(\psi\circ\phi)=\mathcal{A}(\phi)\circ\mathcal{A}(\psi)$ و این اثبات را تمام می‌کند. $\square$

نتیجه ۳۵.۲. *فضای توپولوژی X، Y و همسان‌ریختی $\phi:X\to Y$ مفروض است. اگر زیرحلقه‌های $A(X)$ از $F(X)$ و $A(Y)$ از $F(Y)$ در شرط (۴.۲) صدق کنند، آن‌گاه یک یکریختی حلقه بین $A(X)$ و $A(Y)$ وجود دارد.*

نتیجه ۳۶.۲. *فضاهای توپولوژی X و Y داده شده است. فرض کنیم زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ و زیرحلقه $A(Y)$ از $F(Y)$ شامل همه توابع ثابت باشند و در شرط‌های (۳.۲) و (۴.۲) صدق کنند. اگر $\phi:X\to Y$ تابعی پیوسته باشد، آن‌گاه تابع $A(\phi):A(Y)\to A(X)$ که به‌صورت*

$$A(\phi)(f)=f\circ\phi$$

تعریف می‌گردد یک همریختی شبکهٔ جزئا مرتب است و

$$\mathcal{A}:X\to A(X),\ \phi\to A(\phi);$$

یک تابعگون پادوردا از رسته‌ی تمام فضاهای توپولوژی و نگاشت‌های پیوسته بین آنها بتوی رسته‌ی شبکهٔ جزئا مرتب و همریختی‌های بین آنها است.

اثبات. حکم از گزاره‌های ۳۲.۲ و ۳۴.۲ به‌دست می‌آید. $\square$

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

تبصره ۳۷.۲. توجه می‌کنیم که شرط (۴.۲) برای تمام زیرحلقه‌های $F(X)$ درست نیست و در نتیجه گزاره ۳۴.۲ برای تمام این زیرحلقه‌ها برقرار نیست. به‌عنوان مثال، فرض کنید $X = Y = \mathbb{R}$ و f تابع علامت روی $\mathbb{R}$ است. اگر $g(x) = sin(x)$، آن‌گاه مشاهده می‌کنیم که $f \in C(\mathbb{R})_F, f \circ g \notin C(\mathbb{R})_F$.

یادآوری می‌کنیم که ایدآل I در حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب R را محدب گوییم هرگاه از $b \in R,\ a, c \in I$ و $a \leq b \leq c$ نتیجه گردد $b \in I$ یا به‌طور معادل، برای هر $a, b \in R$، $0 \leq a \leq b$ و $b \in I$ نتیجه شود $a \in I$.

قضیه ۳۸.۲. [۸، قضیه ۲.۵] *فرض کنید I ایدآلی در حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب R باشد. حلقه متناظر خارج‌قسمتی R/I با رابطه ترتیب $\geq$ حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب است اگر و تنها اگر I ایدآلی محدب باشد، که در آن $\geq$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.*

برای هر $r \in R$، $r + I \geq 0$ اگر و تنها اگر $s \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $s \geq 0$ و $r + I = s + I$.

ایدآل J در حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب R را مطلقا محدب گوییم هرگاه از $a \in R,\ b \in J$ که $|a| \leq |b|$ نتیجه گردد $a \in J$.

گزاره ۳۹.۲. *فرض کنید شرط (۳.۲) برای زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ که شامل $\mathbb{R}(X)$ است برقرار باشد. در این‌صورت هر zـ ایدآل در $A(X)$، مطلقا محدب است.*

اثبات. از مطالب قبل از گزاره ۳۲.۲ نتیجه می‌شود $A(X)$ حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب است. اگر I یک zـ ایدآل باشد، آن‌گاه برای هر $f \in A(X)$ و $g \in I$ که در شرط $|f| \leq |g|$ صدق کند نتیجه می‌گیریم $Z(g) \subseteq Z(f)$. پس قسمت سوم گزاره ۱۴.۲ ایجاب می‌کند $f \in I$ و این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۴۰.۲. [۸، قضیه ۳.۵] *برای ایدآل محدب I در حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب R شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) *I یک ایدآل مطلقا محدب است.*

(۲) *از $x \in I$ نتیجه شود $|x| \in I$.*

(۳) *از $x, y \in I$ نتیجه شود $x \vee y \in I$.*

(۴) *برای هر $r \in R$، $I + r \geq 0$ اگر و تنها اگر $r + I = |r| + I$.*

(۵) *برای هر $a, b \in R$ داریم $(a \vee b) + I = (a + I) \vee (b + I)$، یعنی، حلقه خارج‌قسمتی R/I یک حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب است.*

تعریف ۴۱.۲. یک زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ را که شامل $\mathbb{R}(X)$ است و در شرط (۳.۲) صدق می‌کند را Pـ محدب می‌نامیم هرگاه هر ایدآل اول در $A(X)$ مطلقا محدب باشد.

به آسانی قابل اثبات است که هر اشتراک از ایدآل‌های مطلقا محدب در یک حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب ایدآلی مطلقا محدب است [۸، 1B5]. پس لم زیر را داریم.

لم ۴۲.۲. *هر اشتراک از ایدآل‌های اول در یک زیرحلقه Pـ محدب از $F(X)$ ایدآلی مطلقا محدب است.*

قضیه زیر نشان می‌دهد که $C(X)$ یک زیرحلقه Pـ محدب $F(X)$ است.

قضیه ۴۳.۲. [۸، قضیه ۵.۵] *هر ایدآل اول در $C(X)$ مطلقا محدب است.*

قضیه زیر نشان می‌دهد که $C(X)_F$ یک زیرحلقه Pـ محدب $F(X)$ است.

قضیه ۴۴.۲. [۷، گزاره ۸.۴] *هر ایدآل اول در $C(X)_F$ مطلقا محدب است.*

قضیه ۴۵.۲. *فرض کنید شرط‌های (۳.۲) و (۱.۲) برای زیرحلقه $A(X)$ از $F(X)$ که شامل $\mathbb{R}(X)$ است درست باشند. اگر $A(X)$ حلقه‌ای Pــ محدب باشد، ایدآل I در $A(X)$ برابر اشتراکی از ایدآل‌های اول باشد و برای $f \in A(X)$، عضو $I + f$ در $A(X)/I$ بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، آن‌گاه $Z \in Z[I]$ وجود دارد به‌طوری که تابع f روی Z نامنفی است.*

اثبات. بنا به لم ۴۲.۲، I ایدآلی مطلقا محدب است. از قضیه ۴۰.۲ نتیجه می‌شود $I + f = I + |f|$ زیرا بنا به فرض $I + f$ نامنفی است. بنابراین $f - |f| \in I$ و در نتیجه $Z = Z(f - |f|) \in Z[I]$ و $Z \neq \emptyset$ بنا به شرط (۱.۲). واضح است که برای هر $z \in Z$، $f(z) = |f(z)| \geq ۰$. □

گزاره ۴۶.۲. *اگر $A(X)$ یک زیرحلقه از $F(X)$ باشد، آن‌گاه هر zــ ایدآل در $A(X)$ برابر اشتراکی از ایدآل‌های اول در $A(X)$ است.*

اثبات. اگر I یک zــ ایدآل در $A(X)$ باشد و برای $f \in A(X)$ و $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $f^n \in I$، آن‌گاه از $Z(f^n) = Z(f)$ و فرض نتیجه می‌شود $f \in I$. پس از [۸، نتیجه ۰.۱۸] نتیجه می‌شود، I اشتراکی از ایدآل‌های اول است. □

در قضیه زیر، نشان داده شده است که برای برخی ایدآل‌ها در یک زیرحلقه خاص $F(X)$ عکس قضیه ۴۵.۲ برقرار است.

قضیه ۴۷.۲. *فرض کنید شرط‌های (۳.۲) و (۱.۲) برای زیرحلقه Pــ محدب $A(X)$ از $F(X)$ که شامل $\mathbb{R}(X)$ است برقرار باشند و $f \in A(X)$. اگر I یک zــ ایدآل سره در $A(X)$ باشد و $Z \in Z[I]$ وجود داشته باشد به‌طوری که f روی Z نامنفی باشد، آن‌گاه $I + f$ عضوی بزرگ‌تر مساوی صفر در $A(X)/I$ است.*

اثبات. بنا به گزاره ۳۹.۲، ایدآل I مطلقا محدب است. چون f و $|f|$ روی Z با هم مساوی است، داریم $Z \subseteq Z(f - |f|)$. اما $Z \in Z[I]$ ایجاب می‌کند $Z(f - |f|) \in Z[I]$ و از zــ ایدآل بودن I نتیجه می‌گیریم $f - |f| \in I$، یعنی، $I + f = I + |f|$. پس قضیه ۴۰.۲ ایجاب می‌کند که حکم برقرار است. □

قضیه ۴۸.۲. *فرض کنید شرط‌های (۳.۲) و (۱.۲) برای زیرحلقه Pــ محدب $A(X)$ از $F(X)$ که شامل $\mathbb{R}(X)$ است برقرار باشند و $f \in A(X)$. اگر I یک zــ ایدآل در $A(X)$ باشد و $Z \in Z[I]$ وجود داشته باشد به‌طوری که f روی Z مثبت باشد، آن‌گاه $I + f$ عضوی مثبت در $A(X)/I$ است.*

اثبات. قضیه ۴۷.۲ ایجاب می‌کند $I + f$ عضو بزرگ‌تر مساوی صفر باشد. اما $Z \cap Z(f) = \emptyset$ و بنا به شرط (۱.۲) و سره بودن I داریم $\emptyset \notin Z[I]$. پس $I + f$ نمی‌تواند برابر صفر باشد و در نتیجه $I + f$ عضو مثبت $A(X)/I$ است. □

سرانجام قضیه زیر را بیان می‌کنیم که می‌توان از آن نتیجه گرفت تحت شرایطی عکس قضیه بالا برقرار است.

قضیه ۴۹.۲. *فرض کنید شرط‌های (۳.۲) و (۱.۲) برای زیرحلقه Pــ محدب $A(X)$ از $F(X)$ که شامل $\mathbb{R}(X)$ است برقرار باشند. اگر $f \in A(X)$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر $۱ \leq i \leq n$، ایدآل M_i در $A(X)$ ماکسیمال باشد و $f + M_i$ در $A(X)/M_i$ مثبت باشد، آن‌گاه $Z \in Z[\bigcap_{i=۱}^{i=n} M_i]$ وجود دارد به‌طوری که f روی Z مثبت است.*

اثبات. قضیه ۴۵.۲ ایجاب می‌کند برای هر $۱ \leq i \leq n$، یک $Z_i \in Z[M_i]$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $z \in Z_i$، $f(z) \geq ۰$. اما برای هر i، $f + M_i$ در $A(X)/M_i$ مثبت است، پس $f \notin M_i$ و در نتیجه بنا به قضیه ۴.۲، $g_i \in M_i$ وجود دارد به‌طوری که $Z(f) \cap Z(g_i) = \emptyset$. اگر برای هر i، $Z'_i = Z_i \cap Z(g_i)$، آن‌گاه $\emptyset \neq Z'_i \in Z[M_i]$. واضح است که $Z = \bigcup_{i=۱}^{i=n} Z'_i$ عضوی از $Z[\bigcap_{i=۱}^{i=n} M_i]$ است که f روی Z مثبت است. □

نتیجه ۵۰.۲. *فرض کنید شرط‌های (۳.۲) و (۱.۲) برای زیرحلقه Pــ محدب $A(X)$ از $F(X)$ که شامل $\mathbb{R}(X)$ است برقرار باشند و I اشتراک تعداد متناهی ایدآل ماکسیمال در $A(X)$ باشد. $Z \in Z[I]$ و $f \in A(X)$ وجود دارد به‌طوری که f در هر نقطه Z مثبت است اگر و تنها اگر $I + f$ عضوی مثبت در $A(X)/I$ باشد.*

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

در حالت $A(X)=C(X)$، نتیجهٔ بالا نشان می‌دهد که ایدآل ماکسیمال I در [۸، (b) ۴. ۵] می‌تواند برابر اشتراک تعداد متناهی ایدآل ماکسیمال نیز باشد.

۳. مطالعه $B_1(X)$ از منظر نتایج بخش قبل

ظهور و پیدایش $B_1(X)$ با آثار متخصصانی نظیر هاسدورف [۹] آغاز شد و تحقیقات عمیقی در این زمینه صورت گرفت که از بین آنها می‌توان به [۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۵] اشاره نمود. معرفی و بررسی خواص حلقه $B_1(X)$ به کمک الگوی کاملا آشنای حلقه توابع پیوسته $C(X)$ برای نخستین بار در [۴] انجام شد و در این منبع نشان داده شد که اگر X فضای توپولوژی نرمال باشد، آن‌گاه $B_1(X)$ در شرط (۱.۲) صدق می‌کند:

قضیه ۱.۳. [۴، قضیه ۲.۲] *برای فضای نرمال X، $f\in B_1(X)$ در $B_1(X)$ دارای وارون ضربی است اگر و تنها اگر $Z(f)=\emptyset$.*

در قضیه زیر محکی برای وارون ضربی داشتن عناصر $B_1(X)$ در حالت کلی داده شده است:

قضیه ۲.۳. [۴، قضیه ۳.۲] *فضای توپولوژیک X و عضو $f\in B_1(X)$ که برای هر $x\in X$، $f(x)>0$ (یا $f(x)<0$) مفروض است. در این صورت $\frac{1}{f}$ وجود دارد و به $B_1(X)$ متعلق است.*

نگارنده توسط داور این مقاله مطلع شده است که ۴۹ سال قبل از بیان قضیه ۱.۳ و در حالتی کلی‌تر معیاری برای وارون ضربی داشتن عناصر در $B_1(X)$ وجود داشته است [۱۴]. برای بیان این معیار، لازم به یادآوری است که یک فضای برداری مرتب G یک فضای برداری حقیقی با رابطهٔ ترتیب جزئی $\leq$ است به‌طوری که برای هر $x,y\in G$ که $x\leq y$،

(الف) نامساوی $a+x\leq a+y$ برای هر $a\in G$ برقرار باشد و

(ب) نامساوی $\lambda.x\leq\lambda.y$ برای هر عدد حقیقی λ نامنفی برقرار باشد.

یک فضای برداری مرتب که یک مشبکه نیز باشد را یک مشبکه خطی یا یک فضای ریس می‌نامند. پس برای هر فضای توپولوژیک X، $G=F(X)$، $G=C(X)$ و $G=B_1(X)$ یک مشبکه خطی است.

قضیه ۳.۳. [۱۴، قضیه ۸] *اگر G یک مشبکه خطی از توابع حقیقی‌ـ مقدار بر مجموعه X باشد که شامل همه توابع ثابت است، در این صورت $B_1(G)$ که متشکل از تمام حدود نقطه به نقطه توابع در G است، در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:*

(الف) *$B_1(G)$ یک مشبکه خطی از توابع حقیقی‌ـ مقدار بر مجموعه X است.*

(ب) *$B_1(G)$ نسبت به عمل ضرب بسته است.*

(پ) *اگر برای $f\in B_1(G)$، مجموعه $Z(f)$ تهی باشد، در این‌صورت f^{-1} به $B_1(G)$ متعلق است.*

(ت) *$B_1(G)$ تحت همگرایی یکنواخت دنباله توابع بسته است.*

شکل مبسوط قضیه جذاب بالا توسط داور محترم این مقاله پیشنهاد داده شده است. صادق بودن زیرحلقه $B_1(X)$ در شرط (۱.۲) را می‌توان از قسمت (پ) قضیه ۳.۳ نتیجه گرفت زیرا $B_1(X)$ با نمادگذاری بکار رفته در قضیه ۳.۳ دقیقاً برابر $B_1(C(X))$ است. اما به دلیل کامل بودن مطالب، ما در قضیه زیر این مطلب را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۴.۳. *برای فضای توپولوژیک داده شده X حلقه $B_1(X)$ در شرط (۱.۲) صدق می‌کند.*

اثبات. فرض کنیم به ازای $f\in B_1(X)$ داشته باشیم $Z(f)=\emptyset$. پس $g=f^2$ عضو بزرگ‌تر از صفر در $B_1(X)$ است و در نتیجه از قضیه ۲.۳ نتیجه می‌شود که $g=f^2$ دارای وارون ضربی در $B_1(X)$ است. بنابراین f دارای وارون ضربی در $B_1(X)$ است. واضح است که صفرـ مجموعه هر عنصر از $B_1(X)$ که دارای وارون ضربی است باید تهی باشد. □

بنا به مثال ۲۷.۲، شرط (۳.۲) برای حلقهٔ شبکهٔ جزئا مرتب $B_1(X)$ برقرار است. قضیه زیر نشان می‌دهد که هر ایدآل اول $B_1(X)$ مطلقا محدب است.

قضیه ۵.۳. *فضای توپولوژیک X مفروض است. در این‌صورت زیرحلقه $B_1(X)$، یک زیرحلقه P ـ محدب است.*

اثبات. ایدآل اول دلخواه P در حلقه $B_1(X)$ داده شده است. اگر برای $g \in P,\ f \in B_1(X)$ داشته باشیم $|f| \leq |g|$، آن‌گاه $|g| \in P$ و دو دنباله $\{g_n\}$, $\{f_n\}$ در $C(X)$ وجود دارند به‌طوری که به‌ترتیب به $|g|$, $|f|$ نقطه به نقطه همگرا هستند. برای هر $n \in \mathbb{N}$، واضح است که $h_n = |f_n| \vee |g_n|$ تابعی در $C(X)$ است و دنباله $\{h_n\}$ به تابع $|g|$ نقطه به نقطه همگرا است. اکنون، تابع $k_n : X \to \mathbb{R}$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم.

$$k_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n^2(x)}{h_n(x)} & x \in X \setminus Z(h_n), \\ 0 & x \in Z(h_n). \end{cases}$$

تابع k_n در هرنقطه از زیرمجموعه باز $X \setminus Z(h_n)$ از X پیوسته است. فرض کنیم $x_0 \in Z(h_n)$ و $\varepsilon > 0$. طبق پیوستگی f_n در x_0، همسایگی V حول x_0 وجود دارد به‌طوری که $f_n[V] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. از طرفی برای هر $x \in V$، داریم $|k_n(x)| \leq |f_n(x)|$، پس $k_n[V] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$، یعنی، k_n در x_0 پیوسته است. بنابراین $k_n \in C(X)$. اکنون تابع $k : X \to \mathbb{R}$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم.

$$k(x) = \begin{cases} \frac{f^2(x)}{|g|(x)} & x \in X \setminus Z(g), \\ 0 & x \in Z(g). \end{cases}$$

واضح است که دنباله $\{k_n\}$ به k نقطه به نقطه همگرا است و بنابراین $k \in B_1(X)$. پس $f^2 = |g|k \in P$ و بنابراین $f \in P$ که اثبات را تمام می‌کند. □

نتیجه زیر از قضیه ۵.۳ و لم ۴۲.۲ حاصل می‌گردد.

نتیجه ۶.۳. *هر اشتراک از ایدآل‌های اول در $B_1(X)$، یک ایدآل مطلقا محدب است.*

نتیجه ۷.۳. *برای هر ایدآل اول P در $B_1(X)$، حلقه خارج‌قسمتی $B_1(X)/P$ کلا مرتب است.*

اثبات. برای هر $f \in B_1(X)$، از $(f - |f|)(f + |f|) = 0 \in P$ و اول بودن P داریم $f - |f| \in P$ یا $f + |f| \in P$. پس $f + P = |f| + P$ یا $f + P = -|f| + P$. اما بنا به قضیه ۵.۳ ایدآل P مطلقا محدب است پس قضیه ۴۰.۲ نتیجه می‌دهد در خارج‌قسمتی $B_1(X)/P$ داریم $f + P \geq P$ یا $f + P \leq P$ که اثبات را تکمیل می‌کند. □

نتیجه ۸.۳. *برای فضای کاملاً منظم X، $B_1(X)$ یک PM ـ حلقه است، یعنی، هر ایدآل اول فقط مشمول در یک ایدآل ماکسیمال است.*

اثبات. نخست نشان می‌دهیم اگر P ایدآلی اول در $B_1(X)$ باشد، آن‌گاه تمام ایدآل‌های اول $B_1(X)$ که شامل P باشند تشکیل یک زنجیر می‌دهند. گیریم دو ایدآل اول $P_1,\ P_2$ در $B_1(X)$ شامل P باشند. اگر $P_1 \nsubseteq P_2$، آن‌گاه $p_1 \in P_1 \setminus P_2$ وجود دارد. اول بودن P_2 ایجاب می‌کند $p_1^2 \notin P_2$. پس، بدون از دست رفتن کلیت موضوع می‌توان فرض کرد که $p_1 \in P_1 \setminus P_2$ نامنفی است. اکنون عنصر دلخواه و نامنفی $p_2 \in P_2$ را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $f = p_1 - p_2$. از $(f - |f|)(f + |f|) = 0$ و اول بودن P داریم $f - |f| \in P$ یا $f + |f| \in P$. از $f + |f| \in P \subseteq P_2$ داریم $p_1 - p_2 + |f| = f + |f| \in P \subseteq P_2$ داریم $p_1 + |f| \in P_2$. اما بنا به قضیه ۵.۳، ایدآل‌های اول $P_1,\ P_2$ مطلقا محدب است و در نتیجه از $p_1 = |p_1| \leq |p_1 + |f||$ نتیجه می‌شود $p_1 \in P_2$ که تناقض است. پس $f - |f| = p_1 - p_2 - |f| \in P$ و در نتیجه از $P \subseteq P_1$ داریم $p_2 + |f| \in P_1$. اما $p_2 = |p_2| \leq |p_2 + |f|| \in P_1$

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

ایجاب می‌کند $p_2 \in P_1$. پس $P_2 \subseteq P_1$ که نشان می‌دهد تمام ایدآل‌های اول شامل P یک زنجیر تشکیل می‌دهد. از اینکه اجتماع هر زنجیر از ایدآل‌های اول یک ایدآل اول است و هر ایدآل ماکسیمال نیز اول است نتیجه می‌شود که ایدآل اول P فقط مشمول در یک ایدآل ماکسیمال است. □

از قسمت (ت) قضیه ۳.۳ نتیجه می‌شود که جمع دو zــایدآل در $B_1(X)$ یک zــایدآل است، قضیه ۵.۳ از منبع [۱۰] را ببینید. برای کامل بودن مطالب این حکم را فقط با استفاده از نتایج بخش قبل اثبات می‌کنیم.

گزاره ۹.۳. *مجموع دو zــایدآل سره در $B_1(X)$ یا یک zــایدآل سره است و یا برابر است با $B_1(X)$.*

اثبات. فرض کنیم I و J دو zــایدآل سره در $B_1(X)$ باشد و به ازای $a \in I$ و $b \in J$ و $f \in B_1(X)$ داشته باشیم $Z(f) = Z(a+b)$. با توجه به خواص صفرــمجموعه‌ها داریم $Z(a^2) \cap Z(b^2) \subseteq Z(a+b) = Z(f)$. پس دنباله‌های $\{f_n\}$، $\{a'_n\}$ و $\{b'_n\}$ در $C(X)$ وجود دارند که به‌ترتیب به‌طور نقطه به نقطه به f، a^2 و b^2 همگرا هستند. برای هر $n \in \mathbb{N}$، توابع پیوسته $a_n = \frac{1}{\mathbf{n}} + |a'_n|$ و $b_n = \frac{1}{\mathbf{n}} + |b'_n|$ مثبت هستند و دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌ترتیب به‌طور نقطه به نقطه به a^2 و b^2 همگرا هستند. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$، تابع $h_n \in C(X)$ با ضابطه $h_n(x) = f_n(x)\frac{a_n(x)}{a_n(x)+b_n(x)}$ و تابع $k_n \in C(X)$ با ضابطه $k_n(x) = f_n(x)\frac{b_n(x)}{a_n(x)+b_n(x)}$ وجود دارند. اگر $x \in X \setminus (Z(a^2) \cap Z(b^2))$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)\frac{a^2(x)}{a^2(x)+b^2(x)}$ و اگر $x \in Z(a^2) \cap Z(b^2)$ و $\varepsilon > 0$، آن‌گاه $f(x) = 0$ و در نتیجه $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $n > N$ نتیجه دهد $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$. اما برای هر $z \in X$، $|h_n(z)| \leq |f_n(z)|$ و در نتیجه برای هر $n > N$، داریم $|h_n(x)| < \varepsilon$ که نشان می‌دهد $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$. بنابراین تابع $h \in F(X)$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود حد نقطه به نقطه دنباله $\{h_n\}$ است.

$$h(x) = \begin{cases} f(x)\frac{a^2(x)}{a^2(x)+b^2(x)} & x \in X \setminus (Z(a^2) \cap Z(b^2)), \\ 0 & x \in Z(a^2) \cap Z(b^2). \end{cases}$$

پس $h \in B_1(X)$. به‌طور مشابه تابع $k \in F(X)$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود حد نقطه به نقطه دنباله $\{k_n\}$ است.

$$k(x) = \begin{cases} f(x)\frac{b^2(x)}{a^2(x)+b^2(x)} & x \in X \setminus (Z(a^2) \cap Z(b^2)), \\ 0 & x \in Z(a^2) \cap Z(b^2). \end{cases}$$

پس $k \in B_1(X)$. واضح است که $f = h + k$ و از $Z(a) \subseteq Z(h)$ ($Z(b) \subseteq Z(k)$) و zــایدال بودن I (J) و گزاره‌های ۱۲.۲ و ۱۵.۲ نتیجه می‌گیریم $h \in I$ ($k \in J$). پس $f = h + k \in I + J$ و در نتیجه $I + J$ یک zــایدآل است. □

گزاره ۱۰.۳. *برای فضای کاملا منظم X، هر zــایدآل در $C(X)$، انقباضی از یک zــایدآل در $B_1(X)$ است، یعنی، هر zــایدآل در $C(X)$ را می‌توان به‌صورت اشتراک یک zــایدآل از $B_1(X)$ و $C(X)$ نوشت.*

اثبات. گیریم I یک zــایدآل سره در $C(X)$ باشد و $\mathcal{F}$ گردآیه تمام صفرــمجموعه‌ها در $B_1(X)$ باشد که شامل اعضای $Z[I]$ باشد. پس $\mathcal{F}$ کوچکترین $Z_{B_1(X)}$ــپالایه روی X است که شامل $Z[I]$ است و در نتیجه بنا به گزاره ۳.۲،

$$J = Z^{-1}[\mathcal{F}] \cap A(X) = \{f \in B_1(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$$

یک ایدآل سره در $B_1(X)$ است و براحتی دیده می‌شود که J یک zــایدآل در $B_1(X)$ است. واضح است که J شامل I است و در نتیجه $I \supseteq J \cap C(X)$. اگر $f \in J \cap C(X)$، آن‌گاه $Z(f) \in \mathcal{F}$ و در نتیجه $Z(f)$ شامل عضوی از $Z[I]$ است. zــایدال بودن I در $C(X)$ ایجاب می‌کند که $f \in I$، یعنی، $J \cap C(X) \subseteq I$. پس $I = J \cap C(X)$ که اثبات را کامل می‌کند. □

گزاره ۱۱.۳. *برای هر $f, g \in B_1(X)$، با شرط $0 \leq f \leq g^2$، تابع $k \in B_1(X)$ وجود دارد به‌طوری که $f = kg$.*

اثبات. فرض کنیم f و g به‌ترتیب حد نقطه به نقطه دنباله‌های $\{f'_n\}$ و $\{g'_n\}$ از توابع در $C(X)$ باشند. برای هر $n\in\mathbb{N}$، توابع پیوسته $f_n=0\vee f'_n$ و $g_n=0\vee g'_n$ نامنفی هستند و اگر $h_n=f_n\wedge g_n^2$، آن‌گاه برای هر $x\in X$، $0\leq h_n(x)\leq g_n^2(x)$. تابع k_n در $F(X)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$k_n(x)=\begin{cases}\frac{h_n(x)}{g_n(x)} & x\in U=X\setminus Z(g_n),\\ 0 & x\in Z(g_n).\end{cases}$$

پس برای هر $x\in U=X\setminus Z(g_n)$، $|k_n(x)|=\frac{h_n(x)}{g_n(x)}\leq\frac{g_n^2(x)}{g_n(x)}=g_n(x)$. اگر $x\in U$، آن‌گاه واضح است که k_n در x پیوسته است زیرا U در X باز است. فرض کنیم $x_0\in Z(g_n)$ و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. از پیوستگی g_n در x_0 وجود همسایگی V از x_0 نتیجه می‌شود به‌طوری که $g_n[V]\subseteq(-\varepsilon,\varepsilon)$. پس $k_n[V]\subseteq(-\varepsilon,\varepsilon)$ زیرا، برای هر $x\in X$، داریم $|k_n(x)|\leq|g_n(x)|$ و بنابراین $k_n\in C(X)$. اگر $x\in X\setminus Z(g)$، آن‌گاه $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $n\geq N$، داریم $g_n(x)\neq 0$. پس $\lim_{n\to\infty}k_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{h_n(x)}{g_n(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$. اگر $x\in Z(g)$، آن‌گاه برای هر $\varepsilon>0$، $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $N\leq n$ ایجاب می‌کند $|g_n(x)|<\varepsilon$ و در نتیجه $|k_n(x)|\leq|g_n(x)|<\varepsilon$ که نشان می‌دهد $\lim_{n\to\infty}k_n(x)=0$. پس تابع $k\in F(X)$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود در $B_1(X)$ است

$$k(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{g(x)} & x\in X\setminus Z(g),\\ 0 & x\in Z(g).\end{cases}$$

بنابراین $f=kg$. □

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم $A(X)$ یک زیرحلقه $F(X)$ باشد. ایدآل سره I در $A(X)$ را یک $\sqrt{z}$ــ ایدآل گویند هرگاه ایدآل

$$\sqrt{I}=\{f\in A(X)\mid \exists n\in\mathbb{N}\ s.t.\ f^n\in I\}$$

یک zــ ایدآل در $A(X)$ باشد.

مفاهیم zــ ایدآل و $\sqrt{z}$ــ ایدآل در $C(X)$ بر هم منطبق است [۳، ۱۶]. در نتیجه زیر نشان می‌دهیم که مطلب مشابه برای $B_1(X)$ نیز برقرار است.

نتیجه ۱۳.۳. *فرض می‌کنیم I یک ایدآل در $B_1(X)$ باشد. I یک zــ ایدآل در $B_1(X)$ است اگر و تنها اگر I یک $\sqrt{z}$ــ ایدآل در $B_1(X)$ باشد.*

اثبات. فرض می‌کنیم I یک zــ ایدآل در $B_1(X)$ باشد. اگر $f\in\sqrt{I}$، آن‌گاه عدد طبیعی n وجود دارد که $f^n\in I$ و در نتیجه از $Z(f)=Z(f^n)$ و گزاره ۱۴.۲ نتیجه می‌شود $f\in I$. پس $\sqrt{I}\subseteq I$ و از برقرار بودن عکس این رابطه شمول نتیجه می‌گیریم $\sqrt{I}=I$ یک $\sqrt{z}$ــ ایدآل است.
به‌عکس، فرض کنیم $\sqrt{I}$ یک $\sqrt{z}$ــ ایدآل باشد. اگر $f_1\in\sqrt{I}$، آن‌گاه از گزاره ۱۵.۲ داریم $M_{f_1}\subseteq\sqrt{I}$. پس، واضح است که $f=\frac{f_1}{1+f_1^2}\in M_{f_1}$ و $|f|\leq 1$. بنا به قسمت (ت) قضیه ۳.۳، $B_1(X)$ نسبت به حد یکنواخت دنباله توابع بسته است (همچنین [۴، لم ۴.۴] را ببینید)، پس $h=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}|f|^{\frac{1}{n}}\in B_1(X)$. از zــ ایدآل بودن M_{f_1} و $Z(h)=Z(f)$ نتیجه می‌شود که $h\in M_{f_1}$. پس از $h\in\sqrt{I}$ وجود عدد طبیعی $m\in\mathbb{N}$ نتیجه می‌شود که $h^m\in I$. برای هر $n\in\mathbb{N}$، نامساوی $2^{-n}|f|^{\frac{1}{n}}\leq h$ برقرار است. پس $2^{-2m}|f|^{\frac{1}{2m}}\leq h$ و بنابراین $2^{-2m^2}|f|^{\frac{1}{2}}\leq h^m$. پس از گزاره ۱۱.۳ داریم $f=kh^m$ که در آن $k\in B_1(X)$ و در نتیجه $f\in I$. بنابراین $f_1\in I$ که ایجاب می‌کند $\sqrt{I}\subseteq I$. پس $I=\sqrt{I}$ یک zــ ایدآل است. □

http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502

۴. تشکر وقدردانی

نویسنده از داور/داوران این مقاله برای دقت نظر در مطالعه آن، نظرات، بهبود بخشیدن نتایج و پیشنهادهای زیاد آن‌ها (نظیر اضافه شدن همه مطالب بخش ۳ به‌جز قضیه‌های ۴.۳ و ۵.۳) که موجب بهبود کیفیت و کمیت این مقاله شد، تشکر و قدردانی می‌نماید.

مراجع

[1] M. R. Ahmadi Zand, An algebraic characterization of Blumberg spaces, *Quaest. Math.*, **33** (2010) 223–230.

[2] M. R. Ahmadi Zand and Z. Khosravi, Remarks on the rings of functions which have a finite number of discontinuities, *Appl. Gen. Topol.*, **22** (2021) 139–147.

[3] F. Azarpanah and M. Mohamadian, $\sqrt{z}$-ideals and $\sqrt{z^\circ}$-ideals in $C(X)$, *Acta Math. Sin.*, **23** (2007) 989–996.

[4] A. Deb Ray and A. Mondal, On rings of Baire one functions, *Appl. Gen. Topol.*, **20** (2019) 237–249.

[5] A. Deb Ray and A. Mondal, Ideals in $B_1(X)$ and residue class rings of $B_1(X)$ modulo an ideal, *Appl. Gen. Topol.*, **20** (2019) 379–393.

[6] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann-Verlag, Berlin, 1989.

[7] Z. Gharabaghi, M. Ghirati and A. Taherifar, On the rings of functions which are discontinuous on a finite set, *Houston J. Math.*, **44** (2018) 721–739.

[8] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Funcions*, Springer, London, 1976.

[9] F. Hausdorff, *Set Theory*, 2nd ed., Chelsea, NewYork, 1962.

[10] C. B. Huijsmans and B. de Pagter, On z-ideals and d-ideals in Riesz spaces I, *Ned. Akad. Wet. Indag. Math.*, **42** (1980) 183–195.

[11] J. E. Jayne, *Spaces of Baire functions, Baires classes and Suslin sets*, Ph. D. Dissertation, Columbia University, 1971.

[12] E. R. Lorch, Compactifications, Baire functions and Daniell integration, *Acta. Sci. Math. (Szeged)*, **24** (1963) 204–218.

[13] G. Mason, Z-ideals and prime ideals, *J. Algebra*, **26** (1973) 280–297.

[14] R. D. Mauldin, On the Baire system generated by a linear lattice of functions, *Fund. Math.*, **68** (1970) 51–59.

[15] P. R. Meyer, Function spaces and the Alcksander-Urysohn Conjecture, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **86** (1970) 25–29.

[16] M. A. Mulero, Algebraic properties of rings of continuous functions, *Fund. Math.*, **149** (1996) 55–66.

محمدرضا احمدی زند
گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، بلوار دانشگاه، یزد.
mahmadi@yazd.ac.ir

محمدرضا احمدی زند متولد خرداد ماه ۱۳۴۵ در شهر یزد است. وی در سال ۱۳۶۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه تهران شد و در سال ۱۳۶۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه شهید بهشتی شد. سپس در سال ۱۳۸۴ موفق به دفاع از رساله دکتری خود در رشته ریاضی محض از دانشگاه شهید چمران اهواز شد. وی از سال ۱۳۷۳ عضو هیات علمی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد بوده است.

Common Properties of some subrings of $\mathbb{R}^X$

Mohammad Reza Ahmadi Zand

Abstract: For a nonempty topological space X, the ring of all real-valued functions on X with pointwise addition and multiplication is denoted by $F(X)$ and contonuous members of $F(X)$ is denoted by $C(X)$. The collection of all pointwise limit functions of sequences in $C(X)$ is denoted by $B_1(X)$ which is a subring of $F(X)$. It is shown that the sum of two z-ideals in $B_1(X)$ is a z-ideal. It is shown that an ideal I in $B_1(X)$ is a z-ideal if and only if $\sqrt{I}$ is a z-ideal. For any $f \in F(X)$, $f^{-1}(0)$ is denoted by $Z(f)$ and it is called a zero-set. If $A(X)$ is a subring of $F(X)$, $\emptyset \neq B \subseteq A(X)$ and $S = \bigcup_{b \in B}(X \setminus Z(b))$, then it is shown that there exists a ring homomorphism $\phi : A(X) \to A(S)$ such that ker $\phi = Ann(B)$. An ideal I in $A(X)$ is called a pseudofixed ideal if $\{cl_X Z(f) | f \in I\}$ has nonempty intersection. Some characterizations of pseudofixed ideals in some subrings of $F(X)$ are given. As a consequence, it is shown that if X is connected, I is a proper free ideal in $C(X)$ and $p \in X$, then there exists nonzero ideal J contained in I such that $p \in \cap Z[J]$. An arbitrary subring $A(X)$ of $F(X)$ such that every $f \in A(X)$ with $Z(f) = \emptyset$ is unit are studied. A subring $A(X)$ of $F(X)$ such that $g \circ f \in A(X)$, where $g \in C(\mathbb{R})$ and $f \in A(X)$ are investigated. A contravariant fanctor from category of topological spaces and continuous maps between them to category of commutative rings with ring homomorphism is investigated.

Keywords: $A(X)$, rings of functions, pseudofixed ideal, P-convex ring, compact space.

Mohammad Reza Ahmadi Zand

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics, Yazd University,Yazd, Iran.

Email: mahmadi@yazd.ac.ir

Communicated by Omid Ali Karamzadeh.

Article Type: Research Paper.

Received: 26/03/2022, Accepted: 30/07/2022.

 http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.133142.1502