http://math-sci.ui.ac.ir
ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷ – ۲۳۴۵
جلد ۶، شماره ۴ (۱۴۰۰)، صص. ۱-۵

http://www.ui.ac.ir

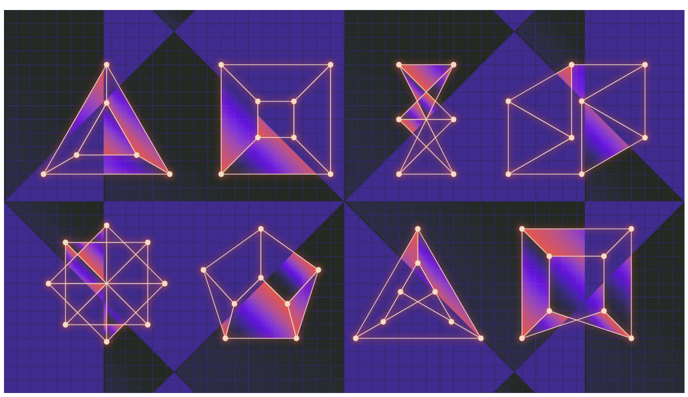
# نقطه بازی ریاضی چگونه از ظهور ساختارهای منظم پرده برمی‌دارد؟

نویسنده: لیلا سلومان
مترجم: علیرضا عبدالهی

**چکیده.** برهانی جدید نشان می دهد که یک گراف ریاضی چقدر باید بزرگ باشد تا شامل زیرساختاری منظم شود. این مقاله ترجمه [۷] است.

تصور کنید ۱۰۰ نقطه جلوی شما پراکنده شده باشد. با یک قاعده کاملاً تصادفی در بازی نقاط، شروع به کشیدن خط بین آنها کنید. چند تا خط می‌توانید بکشید بی‌آنکه مثلثی درست شود؟ یا یک مربع؟ یا یک ستاره ۱۱ ـ نقطه‌ای؟

این نوع مسایل قدمت زیادی در ریاضیات دارند. در مقاله‌ای [۴] که در ۲۶ آوریل ۲۰۲۲ الیور جانزر [۱] و بنی سوداکف [۲] از مؤسسه صنعتی فدرال سوئیس زوریخ منتشر کردند، به سوالی مشابه با قدمت ۴۷ سال پاسخ دادند. آنها ساختاری از نقاط و خطوط را که توسط ریاضیدانان گراف نامیده می‌شود، در نظر گرفتند. در یک گراف منظم، به هر نقطه (یا «گره») تعداد ثابتی خط (یا «یال») متصل می‌شود. در یک گراف ۲ ـ منظم، هر گره دقیقا روی ۲ یال می‌نشیند؛ آن گره «درجه ۲» دارد. در یک گراف ۶۰۰ ـ منظم، هر گره درجه ۶۰۰ دارد.



**شکل ۱.** در این گراف‌های ۳ ـ منظم، هر نقطه درست به سه خط وصل است.

عبارات و کلمات کلیدی: نظریه گراف، نظریه حدی گراف، ترکیبیات.
دبیرتخصصی رابط: محمد شهریاری
نوع مقاله: ترجمه‌ای
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۰۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۲۰
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.100342.1513 .

[1] https://sites.google.com/view/oliver-janzer/home [2] https://people.math.ethz.ch/~sudakovb/

اگر مجدداً با ۱۰۰ نقطه که داشتید شروع کنید و به اضافه کردن یال‌ها ادامه دهید، یک دسته از نقاط و یال‌ها، درنهایت تشکیل گراف‌های منظم خواهند داد. سرانجام در آستانه‌ای، حضور آنها اجتناب ناپذیر است، مثلاً وقتی سعی دارید پنج یال را بین چهار نقطه بکشید به‌طوری‌که مثلثی ساخته نشود ولی مثلث‌ها به‌ناچار ظاهر می‌شوند. جانزر و سوداکف این آستانه را مشخص کردند و بدین ترتیب سوالی را که برای اولین بار توسط پال اردوش و نوربرت ساور [۱] در ۱۹۷۵ پرسیده شده بود پاسخ دادند.

جانزر می‌گوید: «آنچه از این مساله مرا مجذوب خود کرده بود در کنار داشتن قدمت طولانی و تعداد زیادی نتایج مهم و فوری و بیان بسیار راحت آن بود.»

برای گراف های ۱ و ۲ـ منظم جواب مساله اردوش و ساور خیلی قبل تر از ۱۹۷۵ شناخته شده بود به این علت که چنین گراف هایی خیلی ساده هستند. یک گراف ۱ـ منظم از دو گره و تنها یک یال تشکیل یافته، لذا هر گراف ناتهی آن را دارد. یک گراف ۲ـ منظم تنها یک طوقه بسته است — به مرز یک چندضلعی فکر کنید. اما گراف‌های ۳ـ منظم و یا گراف‌های با درجه نظم بالاتر، از لحاظ ساختاری بسیار پیچیده‌تر و متنوع‌تر هستند. گیل کالای [۳]، استاد دانشگاه ریچمان و دانشگاه عبری اورشلیم می‌گوید: «احساس این بود که وقتی حالت ۳ـ منظم را حل کنید، حالات کلی‌تر را هم قادر خواهید بود حل کنید.»

اردوش و ساور وقتی این مساله را مطرح کردند، خودشان ایده‌هایی برای حالت ۳ـ منظم داشتند. آنها گراف‌هایی با $n$ گره و حدود $۳n$ یال را می‌شناختند که هیچ زیرساختار ۳ـ منظم نداشتند. البته آنها می‌دانستند [۳] که یک گراف با بیش از حدود $n^{۸/۵}$ یال بایستی یک زیرساختار ۳ـ منظم در داخل خودش داشته باشد. بنابراین آستانه درست جایی بین مرتبه $n$ و $n^{۸/۵}$ است، که در اینجا «مرتبه $n$» یعنی مضرب ثابتی از $n$. اما این هنوز حالات زیادی را باقی می‌گذارد.

لازلو پیبر [۵] در سال ۱۹۸۵ حالات باقی مانده را به‌نحو قابل ملاحظه‌ای کم کرد، زمانی که نشان داد جواب باید کمتر از مرتبه $n\log(n)$ باشد، که بسیار کمتر از $n^{۸/۵}$ است. (در اینجا خوب است این نکته گفته شود که برای ریاضیدانان مهم است که وقتی یک گراف تعداد زیادی راس دارد چه اتفاقی می‌افتد. اگر $n$ واقعا بزرگ باشد، مثلاً $۱۰^{۱۰۰}$ در اینصورت $n^{۸/۵}$ حدوداً $۱۰^{۵۸}$ برابر بزرگتر از $n\log(n)$ است.)

بعد از آن، پیبر، رودل و زمردی [۶] ، گرافی را از مرتبه $n\log(\log(n))$ یال ساختند که شامل هیچ زیرگراف منظمی از درجه ۳ یا بیشتر نبود. در نتیجه، $n\log(\log(n))$ یک کران پایین مرتبه‌ی جواب‌های ممکن مساله اردوش و ساور و $n\log(n)$ یک کران بالای آن می‌باشد.

تا ماه مارس ۲۰۲۲ ، به مدت ۴ دهه پیشرفت دیگری در حل این مسئله حاصل نشد، تا اینکه جانزر و سوداکف تصمیم گرفتند تا بر روی آن کار کنند. جانزر می‌گوید: «این یکی از مسائلی است که برای حل آن نیاز به تلاش بسیاری است و رراه حل آن به سادگی به دست نمی‌آید. شما از این که نمی‌توانید آن را حل کنید ناراحت نمی‌شوید، اما بعضی وقت‌ها باید سعی خودتان را بکنید.»

این دو نفر با تحلیل جزئیات و وارسی مقاله پیبر، رودل و زمردی شروع کردند، به این امید که دریابند این سه نفر چگونه توانسته بودند از تولید گراف‌های منظم اجتناب کنند. در گراف آن‌ها، تعدادی از گره ها به تعداد زیادی یال وصل می‌شوند، در حالی که سایر گره‌ها به تعداد کمی یال متصل هستند. این دو دسته از گره‌ها ارتباط بسیار تنگاتنگی با هم دارند به‌طوری‌که ساختن یک زیرساختار منظم دیگر را ناممکن می‌سازند.

ژاک ورسترت [۴] ریاضی‌دانی از دانشگاه کالیفرنیا، سانتیاگو که با سوداکف همکاری علمی داشته است، می‌گوید: «ساختار گراف الهام‌بخش است، چون به نوعی به شما می‌گوید آن چیزی که مانع است چیست.»

[3] https://www.quantamagazine.org/gil-kalais-argument-against-quantum-computers-20180207/

[4] https://math.ucsd.edu/people/profiles/jacques-verstraete


http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.100342.1513

جانزر و سوداکف کشف کردند که اگر برای ساختن یک نسخه چگال‌تر از گراف پیبر، رودل و زمردی یال‌های بیشتری، بیشتر از مرتبه $n\log(\log(n))$، اضافه کنید، کل ماجرا عوض می‌شود. ناگهان گراف‌های منظم ظاهر می‌شوند. این مطلب اجازه داد تا دو نویسنده یک گراف منظم را از انواع مختلف گراف‌ها استخراج کنند: هر گراف با تعداد کافی یال شامل گرافی است که شبیه به یکی از این ساختارهای فوق چگال پیبر_ رودل_ زمردی عمل می‌کند، و در نتیجه شامل یک گراف منظم است.

این نتیجه به آنها امکان داد که ثابت کنند در یک گراف $n$_ گره‌ای با تعداد یال از مرتبه $n\log(\log(n))$ مطمئناً یک گراف منظم از درجه ۳ یا بیشتر وجود دارد. نحوه اثبات، چه برای پیدا کردن یک گراف ۳_ منظم چه برای یافتن یک گراف ۱,۰۰۰,۰۰۰_ منظم، هر دو یک جور هست، اگر چه برای دومی به چندین برابر بیشتر یال نیاز دارید. و دست آخر نتیجه قدیمی پیبر، رودل و زمردی نتیجه می‌دهد که مرتبه یال‌ها نمی‌تواند کمتر شود، که متعاقباً سوال اردوش و ساور کاملاً حل می‌شود. ورسترت می‌گوید: «این نتیجه نه تنها از این جهت که یک بهبود فوق‌العاده کران‌ها است، اهمیت دارد، بلکه از این باب که مساله‌ای پس از ۳۰ سال ایستادگی حل شده است نیز حائز اهمیت می‌باشد.»

جانزر و سوداکف روش‌هایی برای به‌کارگیری نتایج‌شان برای حل مسائل دیگر هم یافتند. برای مثال، در سال ۱۹۸۳ ریاضیدانی به نام کارستن توماسن [۸] مساله‌ای را مطرح کرد. توماسن گرافی را برای به‌دست آوردن زیرساختاری از آن با شرایطی نظیر نداشتن دورهای کوچک از یال‌ها و وصل بودن هر گره به یک حداقل تعداد مشخصی از یال‌ها در نظر گرفت. ممکن بودن این مساله قبلاً معلوم بود با این شرط که گرافی که با آن شروع می‌کنیم دارای یک حداقل تعداد یال باشد؛ جانزر و سوداکف این تعداد حداقل یال را کم کردند. آن‌ها همچنین با استفاده از نتایج‌شان در پاسخ به سوالی [۲] که در سال ۱۹۷۰ قبل از مساله اردوش و ساور مطرح شده بود نیز مطالبی به‌دست آورده‌اند.

برای سوداکف این مقاله مثل قطعه آخر یک سمفونی ریاضی است که از مدت‌ها پیش در حال نواخته شدن بوده است. او می‌گوید: «این مقاله از تمام دست‌آوردهای افراد قبلی که روی آن کار کردند، استفاده می‌کند. شگفت‌آور است که همه کسانی که روی این مساله کار کرده‌اند، در راستای صحیحی فکر کرده‌اند.»

## مراجع


[1] P. Erdős, Some recent progress on extremal problems in graph theory, *Proceedings of the Sixth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1975) Congressus Numerantium, No. XIV, Utilitas Math., Winnipeg, Man., (1975) 3–14.. https://users.renyi.hu/~p_erdos/1975-42.pdf

[2] P. Erdős and M. Simonovits, *Some extremal problems in graph theory, Combinatorial theory and its applications*, I (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969), North-Holland, Amsterdam, 1970 377-390. https://users.renyi.hu/~miki/1970-22ErdSimCube.pdf

[3] P. Erdős and M. Simonovits, *Cube-supersaturated graphs and related problems*, Progress in graph theory (Waterloo, Ont., 1982), Academic Press, Toronto, ON, 1984 203-218. https://users.renyi.hu/~p_erdos/1984-04.pdf

[4] O. Janzer and B. Sudakov, Resolution of the Erdős-Sauer problem on regular subgraphs, https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.12455

[5] L. Pyber, Regular subgraphs of dense graphs, *C*ombinatorica, **5** (1985) 347–349. https://doi.org/10.1007/BF02579250

[6] L. Pyber, V. Rödl and E. Szemerédi, Dense graphs without 3-regular subgraphs, *J.* Combin. Theory Ser. B, **6**3 (1995) 41-54. https://doi.org/10.1006/jctb.1995.1004

[7] L. Sloman, Mathematical Connect-the-Dots Reveals How Structure Emerges, Quanta Magazine, June 23, 2022. https://www.quantamagazine.org/new-proof-shows-when-structure-must-emerge-in-graphs-20220623/

[8] C. Thomassen, Girth in graphs, *J.* Combin. Theory Ser. B, **3**5 (1983) 129-141. https://doi.org/10.1016/0095-8956(83)90067-9



http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.100342.1513

**علیرضا عبدالهی**
گروه ریاضی محض، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران.
a.abdollahi@math.ui.ac.ir

علیرضا عبدالهی متولد ۱۳۵۳ است. وی در سال ۱۳۷۱ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض شد. در سال ۱۳۷۶ وارد مقطع دکتری ریاضی دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۷۹ از پایان نامه دکتری خود دفاع کرد و دومین مدرک دکتری ریاضی خود را در سال ۱۳۸۰ از دانشگاه پروانس فرانسه اخذ کرد. وی از سال ۱۳۸۰ تا الان عضو هیات علمی دانشگاه اصفهان است و در سال ۱۳۸۸ به مرتبه استادی ارتقاء یافت.


http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.100342.1513

# Mathematical Connect-the-Dots Reveals How Structure Emerges

Alireza Abdollahi

**Abstract:** A new proof identifies precisely how large a mathematical graph must be before it contains a regular substructure.

**Alireza Abdollahi**
Department of Pure Mathematics, Hazar Jarib St., Isfahan University, Isfahan, Iran.
Email: a.abdollahi@math.ui.ac.ir

Communicated by Mohammad Shahryari.
Article Type: Translation Paper.
Received: 27/06/2022, Accepted: 11/07/2022.

 http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.100342.1513