

مسابقات اعداد اول*

اندرو گرانویل** و گرگ مارتین
مترجم: محمدرضا اسفندیاری

این نوشته به پروفیسور اندرو گرانویل به مناسبت جشن ۶۰ سالگی‌اش، تقدیم می‌گردد

چکیده. چکیده مترجم این نوشته به یکی از موضوعات مهم و جالب در نظریه اعداد تحت عنوان مسابقات اعداد اول می‌پردازد که در متون فارسی کمتر به آن پرداخته شده است. هر عدد اول (غیر از ۲) به صورت $4n + 1$ یا $4n + 3$ است. سوالی که به طور طبیعی مطرح می‌شود، این است که کدام دسته شامل اعداد اول بیشتری است؟ بی‌تردید نامتناهی بودن اعداد اول، پیش‌بینی مسابقه را برای بیننده سخت می‌کند! مقاله حاضر که توسط دو تن از ریاضیدان‌های برجسته نگاشته شده است، به طور جامع به تاریخچه‌ی این مساله، انواع مسابقات اعداد اول و کارهای پژوهشی انجام شده در این راستا می‌پردازد. امیدوارم ترجمه حاضر مورد توجه خوانندگان واقع شود و باعث علاقه‌مندی بیشتر به این مبحث زیبا و چالش برانگیز ریاضیات شود.

۱. مقدمه

گویا هیچ چیز شبیه یک مسابقه واقعی نیست ... به محض شنیدن صدای تپانچه، ضربان و تپش قلب بالا می‌رود، هیجان و شادی وقتی که بازیکن محبوب شما جلو می‌زند (یا پریشانی و اضطراب اگر بازیکن دیگری به سرعت از بازیکن شما جلو بزند)، و ترس (یا امید) برای این‌که هر لحظه ممکن است نتیجه تغییر کند. حال اگر این مسابقه یک ماراتن باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ شاید یکی از شرکت‌کنندگان بسیار قوی‌تر از بقیه باشد و جلو بیفتد و در تمام طول مسابقه نیز پیش‌تاز گروه باشد. همچنین، ممکن است مسابقه بالا و پایین بسیاری داشته باشد، و مادامی که بیننده مسابقه را تماشا می‌کند، فرد برنده بارها و بارها تغییر کند.

شرکت‌کنندگان مسابقه ما اعداد اول هستند، بسته به این‌که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۴ چه باشد، به دو تیم به صورت زیر تقسیم می‌شوند:

۳، ۷، ۱۱، ۱۹، ۲۱، ۳۱، ۴۳، ۴۷، ۵۹، ۶۷، ۷۱، ۷۹، ۸۳، ... : تیم ۳ مسابقه به پیمانه ۴

دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالمی

نوع مقاله: ترجمه‌ای

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۴/۰۷

* A. Granville and G. Martin, Prime number races, *Amer. Math. Monthly*, **113** (2006) 1–33.

** Andrew Granville

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131590.1480>

۴ ... ۱۰۱, ۹۷, ۸۹, ۷۳, ۶۱, ۵۳, ۴۱, ۳۷, ۲۹, ۱۷, ۱۳, ۵ : تیم ۱ مسابقه به پیمانه ۴

در مسابقه به پیمانه ۴، تیم ۳ شامل اعداد اول به شکل $4n+3$ و تیم ۱ شامل اعداد اول به شکل $4n+1$ است^۱. مسابقه به پیمانه ۴ فقط دو شرکت‌کننده دارد و یک ماراتن واقعی است چرا که پایانی ندارد و برای همیشه ادامه دارد. از داده‌هایی که ارائه شد این‌طور به نظر می‌رسد که تیم ۳ همیشه پیشتاز و جلو است. یعنی تا هر عدد مشخص، به نظر می‌رسد، تعداد اعداد اول به شکل $4n+3$ از تعداد اول به شکل $4n+1$ بیشتر است. بررسی داده‌های بیشتر نیز مشاهدات اولیه ما را تایید می‌کند (جدول ۱):

جدول ۱. مقایسه تعداد اعداد اول به شکل $4n+1$ و $4n+3$.

x	تعداد اعداد اول به شکل $4n+3$	تعداد اعداد اول به شکل $4n+1$
۱۰۰	۱۳	۱۱
۲۰۰	۲۴	۲۱
۳۰۰	۳۲	۲۹
۴۰۰	۴۰	۳۷
۵۰۰	۵۰	۴۴
۶۰۰	۵۷	۵۱
۷۰۰	۶۵	۵۹
۸۰۰	۷۱	۶۷
۹۰۰	۷۹	۷۴
۱۰۰۰	۸۷	۸۰
۲۰۰۰	۱۵۵	۱۴۷
۳۰۰۰	۲۱۸	۲۱۱
۴۰۰۰	۲۸۰	۲۶۹
۵۰۰۰	۳۳۹	۳۲۹
۶۰۰۰	۳۹۹	۳۸۳
۷۰۰۰	۴۵۷	۴۴۲
۸۰۰۰	۵۰۷	۴۹۹
۹۰۰۰	۵۶۲	۵۵۴
۱۰۰۰۰	۶۱۹	۶۰۹
۲۰۰۰۰	۱۱۳۶	۱۱۲۵
۵۰۰۰۰	۲۵۸۳	۲۵۴۹
۱۰۰۰۰۰	۴۸۰۸	۴۷۸۳

حتی با وجود داده‌های بیشتر و اعداد بزرگتر (با توجه به جدول ۱)، اگرچه رقابت بین دو تیم خیلی نزدیک می‌شود، ولی باز تیم ۳ برتری نزدیک و ناچیز خود را حفظ می‌کند. این پدیده نخستین بار در نامه چیشف به M. Fuss در ۲۳ مارس ۱۸۵۳ مشاهده شد:

^۱ به اعداد صحیحی در دنباله حسابی $qn+a$ اغلب گفته می‌شود اعداد صحیح «هم‌نهی به پیمانه q »، بنابراین داریم «مسابقه به پیمانه q ».

اختلاف قابل توجهی در تقسیم‌بندی اعداد اول به دو شکل $4n + 1$ و $4n + 3$ وجود دارد؛
 شکل اول نسبت به شکل دوم فراوانی بیشتری دارد.

این سوگیری ممکن است در پرتو نتیجه مهمی در نظریه تحلیلی اعداد که تحت عنوان «قضیه اعداد اول در دنباله‌های حسابی» شناخته شده است، غیرمنتظره باشد. این قضیه بیان می‌کند تعداد اعداد اول در میان شکل‌های مختلف $qn + a$ با شرط $\gcd(q, a) = 1$ ^۲، برای هر پیمانه q ، از لحاظ حدی یکسان هستند. به‌طور دقیق‌تر، برای مقادیر a و b واجد شرایط، داریم:

$$(1.1) \quad \frac{\#\{qn + a \text{ اعداد اول} \leq x\}}{\#\{qn + b \text{ اعداد اول} \leq x\}} \rightarrow 1, \quad (as \ x \rightarrow \infty).$$

این حد به ما کمک نمی‌کند که در مسابقه به پیمانه q چه کسی برنده است^۳. در حقیقت این رفتار مجانبی قضیه اعداد اول در دنباله‌های حسابی، جزئیات دقیقی از شمارش اعداد اول در دنباله‌های حسابی به دست نمی‌دهد. بنابراین مشاهدات ما مبنی بر این‌که تیم ۳، پیش‌تاز و جلوتر از تیم ۱ است را نه تأیید می‌کند و نه نقض.

اکنون وقت آن است که دقیق‌تر باشیم: ما در نحوه ارائه داده‌ها در جدول ۱ فریب خوردیم. در رقابت بین دو تیم ۱ و ۳، اگر برای شمارش اعداد اول برای هر مقدار x ، خود را به زحمت بیندازیم، نه فقط به موارد ذکر شده در جدول ۱ می‌رسیم، بلکه متوجه می‌شویم که گاهی اوقات درام‌هایی در این مسابقه وجود دارد، به این ترتیب تیم ۱ هم گاهی پیش‌تاز است اما برای مدت خیلی کوتاه.

تیم ۱ برای اولین بار در عدد ۲۶۸۶۱، پیش‌تاز می‌شود. با این حال، از آنجایی که ۲۶۸۶۳ نیز عدد اول (به شکل $4n + 3$) است، در این جا تیم ۳ در تعداد با تیم ۱ برابر می‌شود و دوباره پیش‌تاز می‌شود تا این‌که تیم ۱ دوباره در عدد اول ۶۱۶۸۴۱ پیش‌تاز می‌شود با عددهای مختلفی و این پیش‌تازی را تا عدد ۶۳۳۷۹۸ حفظ می‌کند. تیم ۳ دوباره برتری خود را از تیم ۱ در عدد ۱۳۷، ۳۰۶، ۱۲، تا عدد ۳۲۶، ۳۸۲، ۱۲، پس می‌گیرد و پیش‌تاز می‌شود. با ادامه مسابقه، تیم ۳ در عدد ۴۸۱، ۷۸۴، ۹۵۱، دوباره پیش‌تاز می‌گیرد و آن را تا ۵۰۶، ۲۲۳، ۹۵۲، حفظ می‌کند. دوباره تیم سه در عدد ۶۹۷، ۲۸۰، ۳۰۹، تا عدد ۳۶۲، ۱۵۰، ۴۰۳، ۶، پیش‌تاز می‌شود. تیم ۳ دوباره پیش‌تازی را از تیم ۱ در ۲۱۷، ۱۲۶، ۴۶۵، ۱۸، پس می‌گیرد و این پیش‌تازی با عددهای مختلفی تا ۵۳۸، ۵۲۴، ۳۳، ۱۹، ادامه دارد. تیم ۳ مجدداً پیش‌تازی را از تیم ۱ پس می‌گیرد و این برتری را حداقل تا بیست بلیون حفظ می‌کند.

بنابراین، گاهی، تعداد اعداد اول به شکل $4n + 1$ ، بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل $4n + 3$ است، اما این برتری خیلی نادر است و در موارد بسیاری نقض می‌شود. با این وجود با توجه به این داده‌ها و مشاهدات عددی، با تماشای این ماراتن، می‌توان حدس زد $4n + 1$ گاهی پیش‌تاز است. در واقع، این حقیقتی است که لیتلود در سال ۱۹۱۴ پرده از آن برداشت [۱۸]:

قضیه ۱.۱ (لیتلود - ۱۹۱۴). مقادیر به اندازه دلخواه بزرگ x وجود دارد، به‌طوری که برای اعداد نابیشتر از x ، تعداد اعداد اول به شکل $4n + 1$ بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل $4n + 3$ است. در حقیقت، مقادیر به اندازه دلخواه بزرگ x وجود

^۲توجه داشته باشید این شرط ضروری است، زیرا هر عدد صحیح به شکل $qn + a$ ، بر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه q و a بخش‌پذیر است، بنابراین اگر $\gcd(a, q) > 1$ باشد نمی‌تواند اول باشد.

^۳وقتی که $x \rightarrow \infty$ ، اگر نسبت $\frac{\#\{4n + 3 \text{ اعداد اول} \leq x\}}{\#\{4n + 1 \text{ اعداد اول} \leq x\}}$ به عددی بزرگ‌تر از یک همگرا باشد، بنابراین برای x های به قدر کافی بزرگ می‌دانیم $\#\{4n + 1 \text{ اعداد اول} \leq x\} > \#\{4n + 3 \text{ اعداد اول} \leq x\}$ است، لذا در دراز مدت تیم ۳ همواره از تیم ۱ جلو است. ولی اگر به عددی کوچک‌تر از یک همگرا باشد، در دراز مدت تیم ۱ همیشه از تیم ۳ جلوتر است.

دارد که

$$(۲.۱) \quad \#\{x \leqslant \text{اعداد اول به شکل } 4n+1\} - \#\{x \leqslant \text{اعداد اول به شکل } 4n+3\} \geqslant \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \ln \ln \ln x.$$

در نگاه اول، به نظر می‌رسد این پایان ماجراست. با این وجود، بعد از دیدن این‌که تیم ۱ چگونه به ندرت موفق به حفظ برتری خود است، دشوار است که شک کنیم که تیم ۳ بیشتر اوقات پیشرو است؛ بر خلاف نتایج لیتلوود، تعداد اعداد اول به شکل $4n+3$ ، از تعداد اعداد اول به شکل $4n+1$ بیشتر است. در سال ۱۹۶۲، ناپوسکی^۴ و تیوران^۵ حدسی مطرح کردند که با نتیجه لیتلوود در تناقض نیست و همچنین مشاهدات چیشیف را نیز تایید می‌کند:

حدس ۲.۱. وقتی که $X \rightarrow \infty$ ، درصد اعداد صحیح $x \leqslant X$ که تعداد اعداد اول به شکل $4n+3$ تا x بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل $4n+1$ است، به ۱۰۰٪ میل می‌کند.

با توجه به این حدس، ممکن است این گونه تفسیر شود که «مشاهدات چیشیف تقریباً همیشه درست بوده است». بیایید اطلاعات و مشاهدات عددی خود را با توجه به این حدس، برای مقادیر مختلف X ، مورد ارزیابی و تجدیدنظر قرار دهیم. حداکثر درصد از مقادیر $x \leqslant X$ که اعداد اول به شکل $4n+1$ ، با $x \leqslant 4n+1$ ، از اعداد اول به شکل $4n+3$ بیشتر است، در جدول زیر نشان داده شده است:

محدوده x	حداکثر درصد از $x \leqslant X$
$0 - ۲۶,۸۶۰$	۰٪
$0 - ۵۰۰,۰۰۰$	۰/۱٪
$0 - ۱۰^۷$	۲/۶٪
$۱۰^۷ - ۱۰^۸$	۰/۶٪
$۱۰^۸ - ۱۰^۹$	۰/۱٪
$۱۰^۹ - ۱۰^{۱۰}$	۱/۶٪
$۱۰^{۱۰} - ۱۰^{۱۱}$	۲/۸٪

آیا این شما را متقاعد می‌کند که حدس ناپوسکی-تیوران احتمالاً درست است؟ آیا با افزایش مقادیر x ، درصد تغییرات در ستون سمت راست به سمت صفر میل می‌کند؟ به وضوح درصدها خیلی پایین هستند، ولی با مشاهده این داده‌های محدود، مشخص و بدیهی نیست که آیا به سمت صفر میل می‌کنند. چند سال قبل مقاله شگفت‌انگیزی توسط ریچارد گای^۶ در مجله مانتلی^۷ تحت عنوان The Law of Small Numbers انتشار یافت [۱۱] که در آن ریچارد گای به چندین پدیده جذاب اشاره کرده بود که برای اعداد صحیح در مقیاس کوچک درست بودند ولی برای اعداد صحیح بزرگ این ویژگی‌ها برقرار نبودند. آیا این (مسابقه) می‌تواند یکی از این پدیده‌ها باشد؟

۱.۱. مسابقه دیگر مرتبط با اعداد اول: اعداد اول به شکل $3n+2$ و $3n+1$. مسابقات دیگری در بین دنباله اعداد اول به غیر از اعداد اول به شکل $4n+1$ و $4n+3$ وجود دارد. برای مثال به پیمانه ۳، مسابقه بین اعداد اول به شکل $3n+2$ و اعداد اول به شکل $3n+1$ است. مسابقه به صورت زیر آغاز می‌شود:

تیم ۲ : ۲, ۵, ۱۱, ۱۷, ۲۳, ۲۹, ۴۱, ۴۷, ۵۳, ۵۹, ۷۱, ... مسابقه به پیمانه ۳

تیم ۱ : ۷, ۱۳, ۱۹, ۳۱, ۳۷, ۴۳, ۶۷, ۷۳, ۷۹, ۹۷, ... مسابقه به پیمانه ۳

^۴Knapowski ^۵Turan ^۶Richard Guy ^۷This Monthly

در این مسابقه تیم ۲ برتری زود هنگام خود را حفظ می‌کند. یعنی به نظر می‌رسد همیشه تا مقدار مشخص x ، تعداد اعداد اول به شکل $3n + 2$ بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل $3n + 1$ است. در حقیقت تیم ۲ برتری خود را تا ده میلیون و بالاتر از آن، حفظ می‌کند (جدول ۲ را ببینید)^۸.

جدول ۲. مقایسه تعداد اعداد اول به شکل $3n + 1$ و $3n + 2$

تیم ۱	تیم ۲	x	تیم ۱	تیم ۲	x
۱۶۱۰	۱۶۳۴	۳۰۰۰۰	۱۱	۱۳	۱۰۰
۲۰۸۹	۲۱۱۳	۴۰۰۰۰	۲۱	۲۴	۲۰۰
۲۵۵۶	۲۵۷۶	۵۰۰۰۰	۲۸	۳۳	۳۰۰
۳۰۱۴	۳۰۴۲	۶۰۰۰۰	۳۷	۴۰	۴۰۰
۳۴۴۳	۳۴۹۱	۷۰۰۰۰	۴۵	۴۹	۵۰۰
۳۸۹۸	۳۹۳۸	۸۰۰۰۰	۵۰	۵۸	۶۰۰
۴۳۳۸	۴۳۷۴	۹۰۰۰۰	۵۹	۶۵	۷۰۰
۴۷۸۴	۴۸۰۷	۱۰۰۰۰۰	۶۷	۷۱	۸۰۰
۸۹۸۸	۸۹۹۵	۲۰۰۰۰۰	۷۴	۷۹	۹۰۰
۱۲۹۷۰	۱۳۰۲۶	۳۰۰۰۰۰	۸۰	۸۷	۱۰۰۰
۱۶۸۹۲	۱۶۹۶۷	۴۰۰۰۰۰	۱۴۸	۱۵۴	۲۰۰۰
۲۰۷۳۳۳	۲۰۸۰۴	۵۰۰۰۰۰	۲۰۷	۲۲۲	۳۰۰۰
۲۴۵۲۴	۲۴۵۷۳	۶۰۰۰۰۰	۲۷۱	۲۷۸	۴۰۰۰
۲۸۲۳۶	۲۸۳۰۶	۷۰۰۰۰۰	۳۳۰	۳۳۸	۵۰۰۰
۳۱۹۱۸	۳۲۰۳۲	۸۰۰۰۰۰۰	۳۸۴	۳۹۸	۶۰۰۰
۳۵۵۹۷	۳۵۶۷۶	۹۰۰۰۰۰۰	۴۴۴	۴۵۵	۷۰۰۰
۳۹۲۳۱	۳۹۲۶۶	۱۰۰۰۰۰۰۰	۴۹۵	۵۱۱	۸۰۰۰
۷۴۴۱۲	۷۴۵۲۰	۲۰۰۰۰۰۰۰	۵۵۲	۵۶۴	۹۰۰۰
۱۷۴۱۹۰	۱۷۴۳۲۲	۵۰۰۰۰۰۰۰	۶۱۱	۶۱۷	۱۰۰۰۰
۳۳۲۱۹۴	۳۳۲۳۸۴	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۱۲۴	۱۱۳۷	۲۰۰۰۰

شاید تجربه ما از مسابقه به پیمان ۴ شما را دچار شک و تردید کند که آیا در مسابقه به پیمان ۳، تیم ۲ همواره برتری خود را حفظ می‌کند. در این صورت، شما حق دارید که شک کنید زیرا مقاله لیتلود در سال ۱۹۱۴، این مسابقه را نیز تصدیق می‌کند: مقادیر x به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که تا x ، اعداد اول به شکل $3n + 1$ بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل $3n + 2$ است. (همچنین یک نامساوی شبیه (۲.۱) برای این مسابقه وجود دارد). بنابراین (در این مسابقه) اغلب به صورت نامتناهی تیم ۱ از تیم ۲ جلو می‌افتد، اما اولین مقدار x چند است؟ می‌دانیم که این مقدار بیشتر از ده میلیون است. در حقیقت تیم ۱ برای اولین بار در $x = ۶۰۸,۹۸۱,۸۱۳,۰۲۹$ پیش‌تاز می‌شود. این عدد در روز کریسمس سال ۱۹۷۶ توسط بیز^۹ و

^۸ این بار فریب نخوردیم - تیم ۱ در سایر مقادیر میانی x که در جدول ثبت نکرده‌ایم نیز هیچ‌گاه جلو نمی‌افتد.

^۹Bays

هادسون^{۱۰} کشف شد. به نظر می‌رسد برتری تیم ۲ در مسابقه به پیمانۀ ۳ از برتری تیم ۳ در مسابقه به پیمانۀ ۴، برجسته و مشهودتر باشد.

۲.۱. مسابقه دیگر مرتبط با اعداد اول: رقم آخر یک عدد اول. با شنیدن این‌که «تیم ۲ برتری خود را برای بیش از نیم تریلیون مقدار متوالی x حفظ می‌کند»، شاید از مسابقه و روز مسابقه، حوصله‌تان سر رفته باشد. بیایید به مسابقه‌ای برویم که در آن شرکت‌کنندگان بیشتری وجود دارد، شاید شانس این‌که تیمی پیش‌تاز و برنده شود کم‌تر باشد. یک مسابقه ۴ تیمی معروف بین اعداد اولی وجود دارد که کدام‌ها به ۱، ۳، ۷ یا ۹ ختم می‌شوند (جدول ۳).

جدول ۳. مقایسه تعداد اعداد اول به شکل $10n + j$ ، برای $j = 1, 3, 7, 9$

رقم آخر:	۱	۳	۷	۹	رقم آخر:	۱	۳	۷	۹
-	۳	۷	-		۱۰۱	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۹	
۱۱	۱۳	۱۷	۱۹		-	۱۱۳	-	-	
-	۲۳	-	۲۹		-	-	۱۲۷	-	
۳۱	-	۳۷	-		۱۳۱	-	۱۳۷	۱۳۹	
۴۱	۴۳	۴۷	-		-	-	-	۱۴۹	
-	۵۳	-	۵۹		۱۵۱	-	۱۵۷	-	
۶۱	-	۶۷	-		-	۱۶۳	۱۶۷	-	
۷۱	۷۳	-	۷۹		-	۱۷۳	-	۱۷۹	
-	۸۳	-	۸۹		۱۸۱	-	-	-	
-	-	۹۷	-		۱۹۱	۱۹۳	۱۹۷	۱۹۹	
مجموع	۵	۷	۶	۵	مجموع	۱۰	۱۲	۱۲	۱۰

با توجه به این مشاهدات محدود، به نظر می‌رسد دو تیم میانی معمولاً پیش‌تاز هستند. با این حال، اجازه دهید قبل از اظهار نظر و شرط‌بندی، داده‌های جدول (۴) را بررسی کنیم:

به غیر از محدوده $x = 500,000$ که تیم ۱ برتری جزئی نسبت به تیم ۳ پیدا می‌کند، به نظر می‌رسد دو تیم میانی پیش‌تازی و برتری خود را حفظ می‌کنند.

پس از مدتی که از تماشای این مسابقات می‌گذرد، احساس می‌کنیم که چنین مسابقاتی قابل پیش‌بینی هستند، البته نه در جزئیات کوچک، بلکه شاید در مقیاسی بزرگ‌تر. اگر مسابقه مشابه دیگری را تماشا کنیم (مسابقه به پیمانۀ q برای بعضی مقادیر q غیر از ۳، ۴ یا ۱۰)، ممکن است انتظار داشته باشیم، در سرتاسر مسابقه بعضی تیم‌ها قوی‌تر و پیش‌تازتر از سایر تیم‌ها باشند. اما بدون تماشای درازمدت مسابقه چگونه می‌توان پیش‌بینی کرد که کدام تیم پیش‌تاز می‌شود؟

قبل از آنکه امیدوار باشیم بفهمیم که کدام تیم، اغلب اوقات، بیشترین اعداد اول را دارد؛ در وهله نخست نیاز داریم تا درک درستی از رفتار شمارش اعداد اول داشته باشیم و قبل از آن باید امیدوار باشیم تا بتوانیم رفتار تعداد اعداد اول نابیشتر از x به شکل $qn + a$ (برای a و q داده شده) را درک کنیم. باید با دانستن این‌که چه تعداد اعداد اول نابیشتر از x وجود دارد، شروع کنیم. این شاید تنها مهم‌ترین سوال نظریه اعداد در قرن نوزدهم بود، سوالی که در قرن بیستم نیز محققان را درگیر کرد، و همچنان رازها و حقایقی برای ما دارد.

¹⁰Hudson

جدول ۴. مقایسه تعداد اعداد اول به شکل $10^n + j$ ، برای $j = 1, 3, 7, 9$

رقم آخر ۹	رقم آخر ۷	رقم آخر ۳	رقم آخر ۱	x
۵	۶	۷	۵	۱۰۰
۱۰	۱۲	۱۲	۱۰	۲۰۰
۲۳	۲۴	۲۴	۲۲	۵۰۰
۳۸	۴۶	۴۲	۴۰	۱۰۰۰
۷۳	۷۷	۷۸	۷۳	۲۰۰۰
۱۶۳	۱۶۹	۱۷۲	۱۶۳	۵۰۰۰
۳۰۳	۳۰۸	۳۱۰	۳۰۶	۱۰۰۰۰
۵۵۹	۵۶۹	۵۶۹	۵۶۳	۲۰۰۰۰
۱۲۷۹	۱۲۸۸	۱۲۹۰	۱۲۷۴	۵۰۰۰۰
۲۳۹۰	۲۴۱۱	۲۴۰۲	۲۳۸۷	۱۰۰۰۰۰
۴۴۸۴	۴۵۰۳	۴۵۱۷	۴۴۷۸	۲۰۰۰۰۰
۱۰۳۶۵	۱۰۴۰۳	۱۰۳۸۲	۱۰۳۸۶	۵۰۰۰۰۰
۱۹۵۹۳	۱۹۶۲۱	۱۹۶۶۵	۱۹۶۱۷	۱۰۰۰۰۰۰

۲. در مورد تعداد اعداد اول نابیشتر از x چه می‌دانیم؟

اگر چه سوالات مطرح شده در نظریه اعداد، از دیدگاه ریاضی همیشه رایج و مد روز نبودند، اما در اواسط قرن نوزدهم مساله شمارش اعداد اول توجه ریاضی‌دانان قابل احترامی از جمله لژاندر، چبیشف و گاوس اعجوبه را به خود جلب کرد. هر چند بهترین نتایج در این زمینه مربوط به کارهای چبیشف بود اما در نهایت پیش‌بینی و حدس گاوس منجر به درک بهتری از مسابقات اعداد اول شد.

پرس و جو درباره توزیع اعداد اول، پاسخ زیر را به دنبال داشت:

”من در کودکی درباره این مساله تامل کردم و یافتم که در حوالی x ، چگالی و تراکم اعداد اول در حدود $\frac{1}{\ln x}$ است. گاوس (نامه به انکه (Encke) در ۲۴ دسامبر ۱۸۴۹).“

اظهار نظر گاوس را می‌توان به‌عنوان پیش‌بینی به‌صورت زیر تفسیر کرد:

$$\#\{x \leq \text{اعداد اول}\} \approx \sum_{n=2}^x \frac{1}{\ln n} \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \text{Li}(x).$$

جدول ۵. مقایسه بین پیش‌بینی گاوس^{۱۱} و تعداد اعداد اول نابیشتر از مقدار x را نشان می‌دهد.

می‌توانیم از تفاضل $\text{Li}(x) - \pi(x)$ چندین مشاهده و برداشت داشته باشیم. نخست این‌که توجه داشته باشید عرض ستون آخری به‌طور تقریبی نصف عرض ستون وسطی است. به عبارت دیگر، به نظر می‌رسد ستون آخر تقریباً برابر با ریشه دوم $\pi(x)$ باشد. همچنین جمله خطا همیشه مثبت به نظر می‌رسد، بنابراین ممکن است حدس بزنی که رابطه‌ی

$$0 < \text{Li}(x) - \pi(x) < \sqrt{\pi(x)},$$

^{۱۱} در واقع، لژاندر چند سال قبل از گاوس پیش‌بینی مشابه هر چند با دقت کمتری انجام داد.

جدول ۵. اعداد اول نابیشتر از x و اختلاف پیش‌بینی گاوس

x	$\pi(x)$	$\text{Li}(x) - \pi(x)$
۱۰ ^۸	۵۷۶۱۴۵۵	۷۵۳
۱۰ ^۹	۵۰۸۴۷۵۳۴	۱۷۰۰
۱۰ ^{۱۰}	۴۵۵۰۵۲۵۱۱	۳۱۰۳
۱۰ ^{۱۱}	۴۱۱۸۰۵۴۸۱۳	۱۱۵۸۷
۱۰ ^{۱۲}	۳۷۶۰۷۹۱۲۰۱۸	۳۸۲۶۲
۱۰ ^{۱۳}	۳۴۶۰۶۵۵۳۶۸۳۹	۱۰۸۹۷۰
۱۰ ^{۱۴}	۳۲۰۴۹۴۱۷۵۰۸۰۲	۳۱۴۸۸۹
۱۰ ^{۱۵}	۲۹۸۴۴۵۷۰۴۲۲۶۶۹	۱۰۵۲۶۱۸
۱۰ ^{۱۶}	۲۷۹۲۳۸۳۴۱۰۳۳۹۲۵	۳۲۱۴۶۳۱
۱۰ ^{۱۷}	۲۶۲۳۵۵۷۱۵۷۶۵۴۲۳۳	۷۹۵۶۵۸۸
۱۰ ^{۱۸}	۲۴۷۳۹۹۵۴۲۸۷۷۴۰۸۶۰	۲۱۹۴۹۵۵۴
۱۰ ^{۱۹}	۲۳۴۰۵۷۶۶۷۲۷۶۳۴۴۶۰۷	۹۹۸۷۷۷۷۴
۱۰ ^{۲۰}	۲۲۲۰۸۱۹۶۰۲۵۶۰۹۱۸۸۴۰	۲۲۲۷۴۴۶۴۳
۱۰ ^{۲۱}	۲۱۱۲۷۲۶۹۴۸۶۰۱۸۷۳۱۹۲۸	۵۹۷۳۹۴۲۵۳
۱۰ ^{۲۲}	۲۰۱۴۶۷۲۸۶۸۹۳۱۵۹۰۶۲۹۰	۱۹۳۲۳۵۵۲۰۷

برای هر x برقرار است. در حقیقت تفاضل $\text{Li}(x) - \pi(x)$ به‌طور یکنواخت صعودی به نظر می‌رسد، که این نشان می‌دهد با کم کردن بعضی جملات ثانویه هموار از تقریب $\text{Li}(x)$ ، ممکن است به تقریب بهتری برای $\pi(x)$ دست یابیم، سوالی که بعداً به آن خواهیم پرداخت. اما فعلاً اجازه دهید به مسابقات برگردیم.

تابع $\text{Li}(x)$ شمارنده اعداد اول نیست اما به نظر می‌رسد نزدیک به $\pi(x)$ باشد و همیشه جلوتر و پیش‌تاز باشد. بنابراین برای مسابقه بین $\text{Li}(x)$ و $\pi(x)$ ، می‌توانیم بپرسیم که: آیا $\text{Li}(x)$ برتری خود را برای همیشه حفظ می‌کند؟ نتیجه شگفت‌انگیز لیتل‌وود [۱۸] در اینجا به کار می‌رود:

قضیه ۱۰۲ (لیتل‌وود). مقادیر به اندازه دلخواه بزرگ x وجود دارد که $\pi(x) > \text{Li}(x)$ ، یعنی

$$\#\{x \leq x\} > \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

بنابراین کوچکترین x_1 که برای آن $\pi(x_1) > \text{Li}(x_1)$ ، چند است؟ اسکیوز^{۱۲} با توجه به برهان لیتل‌وود یک کران بالا برای x_1 بدست آورد، هر چند این کران به‌طور خاص قابل دسترس نیست. اسکیوز در سال ۱۹۳۳ نشان داد که

$$x_1 < 10^{1010^{34}},$$

و برای انجام این کار او نیاز داشت که گزاره مهمی را بپذیرد. اسکیوز با فرض درستی «فرضیه ریمان» به مساله پرداخت، حدسی که کمی بعد در مورد آن بحث خواهیم کرد. برای مدت زمان طولانی «عدد اسکیوز» به عنوان بزرگ‌ترین عدد شناخته

¹²Skewes

شده در ریاضیات بود. اسکیز در سال‌های بعد یک کران بالای دیگری را معرفی کرد که به هیچ فرض اثبات نشده‌ای بستگی نداشت، اگر چه نسبت به عدد قبلی تا حدودی غول‌آستر است، و از آن زمان کران‌های بهتری نیز ارائه شده است:

$$\begin{aligned} \text{Skewes (۱۹۵۵):} \quad & x_1 < 10^{10^{10^{10^{10}}}} \\ \text{Lehman (۱۹۶۶):} \quad & x_1 < 2 \times 10^{1165} \\ \text{Riele te (۱۹۸۷):} \quad & x_1 < 6/658 \times 10^{370} \\ \text{Bays and Hudson (۱۹۹۹):} \quad & x_1 < 1,3982 \times 10^{316} \end{aligned}$$

همان‌طور که بعداً در مورد آن بحث خواهیم کرد، بیز و هادسون دلایل قانع‌کننده‌ای ارائه می‌دهند تا باور کنیم که x_1 در واقع عددی صحیح نزدیک به $1,3982 \times 10^{316}$ است. این ادعای خارق‌العاده‌ای است! ما فقط می‌توانیم با استفاده از فناوری و الگوریتم‌های فعلی، شمارش اعداد اول را تا حدود $x = 10^{22}$ انجام دهیم و هیچ پیشرفت قابل توجهی در این مورد پیش‌بینی نشده است. بنابراین، آنها چطور می‌توانند این چنین مقادیر بسیار بزرگی از x_1 را پیش‌بینی کنند؟ به‌خصوص وقتی که این پیش‌بینی بسیار فراتر از محدوده‌ای است که ما می‌توانیم به‌طور مستقیم $\pi(x)$ را محاسبه کنیم. بعداً این مطلب را توضیح خواهیم داد. با این وجود بیایید کمی فکر کنیم: اگر اولین x ایی که $\pi(x)$ از $\text{Li}(x)$ جلو می‌زند، این قدر بزرگ است، پس مطمئناً x هایی که $\pi(x) > \text{Li}(x)$ حتی کمیاب‌تر از اعداد «شکست خورده» در مسابقاتی که قبلاً بررسی کردیم، هستند.

۱.۲. تخمین دقیق تعداد اعداد اول. تا اواسط قرن نوزدهم، کم و بیش همه روی‌کردها و روش‌ها برای تخمین $\pi(x)$ $\{x \leq \text{اعداد اول}\}$ نسبتاً مستقیم بودند که یا بر اساس نظریه مقدماتی اعداد و اصول ترکیباتی و یا در مواردی بر اساس نظریه فرم‌های مربعی بوده‌اند. با این حال در سال ۱۸۵۹، هندسه‌دان بزرگ یعنی ریمن، با روشی کاملاً متفاوت به مساله شمارش اعداد اول پرداخت. وی تنها یک مقاله در شاخه نظریه اعداد نوشته است، اما نوشته تاریخی وی تاثیر شگرفی در یک قرن و نیم اخیر داشته است به‌طوری که ایده‌های آن به پیدایش رشته‌ای کمک نمود که اکنون ما آن را نظریه تحلیلی اعداد می‌نامیم.

مقاله ریمن یک رهیافت شگفت‌آور برای مواجهه با مساله ارائه داد، رهیافتی مبتنی بر نظریه آنالیز مختلط، که در آن زمان هنوز موضوعی در حال توسعه بود^{۱۳}. به نظر می‌رسد که رویکرد ریمن از حوزه‌ی مساله اصلی بسیار دور شده بود. با این حال، این روش دو ویژگی اصلی داشت:

- روشی بالقوه عملی برای حل این مساله یک‌بار و برای همیشه بود.
- پیش‌بینی‌هایی را انجام داد که مشابه پیش‌بینی گاوس بودند، گرچه یکسان نبودند.

در حقیقت، همان‌طور که به زودی خواهیم دید، ریمن یک عبارت و جمله ثانویه‌ی را برای جبران خطایی که در تفاضل واقع در جدول ۵ مشاهده کردیم، پیشنهاد داد.

شرح و توصیف کامل روش ریمن بخاطر پیچیدگی و جزئیات بسیار، در این جا ممکن نیست، اما در اینجا آنچه را که برای درک بهتر تابع شمارنده اول $\pi(x)$ ، نیاز داریم از آن استخراج می‌کنیم. برای شروع کار، نخست ما پیش‌بینی کلیدی مقاله ریمن را در نظر می‌گیریم و آن را با زبان کاملاً مقدماتی بیان می‌کنیم:

$$\text{lcm}[1, 2, 3, \dots, x] \approx e^x \quad (x \rightarrow \infty).$$

^{۱۳} در واقع، مقاله ریمن درباره‌ی این مساله مربوط به نظریه اعداد، عامل مهمی در توسعه نظریه توابع تحلیلی بود، به‌ویژه جنبه‌های کلی آن.

حال به آسانی می‌توان دید که

$$\left(\prod_{p \leq x} p\right) \times \left(\prod_{p^2 \leq x} p\right) \times \left(\prod_{p^3 \leq x} p\right) \times \cdots = \text{lcm}[1, 2, 3, \dots, x],$$

زیرا توان هر عدد اول p که عددی را در طرف دیگر مساوی عاد می‌کند، دقیقا بزرگ‌ترین توانی از p است که بیشتر از x نیست. با ترکیب معادله بالا و تقریب قبل از آن، با گرفتن لگاریتم طبیعی از طرفین، وقتی که $x \rightarrow \infty$ داریم

$$\left(\sum_{p \leq x} \ln p\right) + \left(\sum_{p^2 \leq x} \ln p\right) \times \left(\sum_{p^3 \leq x} \ln p\right) + \cdots \approx x.$$

توجه داشته باشید اعداد اول در سری اول دقیقا همان اعداد اولی هستند که به وسیله تابع شمارنده $\pi(x)$ شمارش می‌شوند، اعداد اول در سری دوم دقیقا توسط $\pi(\sqrt{x})$ شمارش می‌شوند و به همین ترتیب. یک تکنیک رایج به نام جمع‌بندی جزئی به ما اجازه می‌دهد تا از جمع‌وند $\ln p$ استفاده کنیم (این مشابه انتگرال‌گیری جز به جز است که ما از عامل انتگرالده $\ln x$ استفاده می‌کنیم). با به‌کارگیری روش جمع‌بندی جزئی روی تقریب اخیر، داریم

$$\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \cdots \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \text{Li}(x).$$

با روشی مناسب بر حسب $\pi(x)$ ، به‌طور معادل می‌توان نوشت

$$\pi(x) \approx \text{Li}(x) - \frac{1}{2}\text{Li}(x^{1/2}) + \cdots.$$

از این‌رو، روش ریمان پیش‌بینی مشابه گاوس ارائه می‌دهد، با این حال، عبارت اضافی نیز بدست می‌آورد، یعنی، یک عبارت و جمله ثانویه‌ای را پیش‌بینی می‌کند که می‌تواند اختلافی را که در حدس گاوس مشاهده کردیم تا حدودی جبران کند. بیایید داده‌ها را مرور و بازبینی کنیم تا ببینیم پیش‌بینی ریمان چگونه کار می‌کند. در روش ریمان باید اختلاف $\text{Li}(x) - \frac{1}{2}\text{Li}(x^{1/2}) - \pi(x)$ را در نظر بگیریم (جدول ۶):
به نظر می‌رسد پیش‌بینی ریمان کمی بهتر از گاوس باشد، گرچه خیلی هم بهتر نیست. با این حال، این واقعیت که خطا در پیش‌بینی ریمان هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار می‌کند، ممکن است نشانه‌ی بر بهتر بودن کار با آن باشد.
با بازگشت و نگاهی دوباره به پیش‌بینی کلیدی مقاله ریمان، می‌توانیم با محاسبه برخی داده‌ها، درستی و صحت آن را امتحان کنیم:

پیش‌بینی ریمان در طول سال‌ها بهبود یافته و دقیق‌تر شده است، اکنون می‌توان آن را به‌طور صریح به‌صورت زیر بیان کرد، وقتی $x \geq 100$ داریم

$$|\ln(\text{lcm}[1, 2, \dots, x]) - x| \leq 2\sqrt{x} \ln^2 x.$$

در حقیقت این نامساوی معادل فرضیه مشهور ریمان است^{۱۴}، شاید برجسته‌ترین مساله باز در ریاضیات. فرضیه ریمان ادعایی است که توسط ریمان در مقاله معروفش ارائه شده و تا کنون اثبات نشده است، درباره‌ی صفرهای یک تابع مشخص در آنالیز مختلط که ارتباط تنگاتنگی با توزیع اعداد اول دارد. برای تلاش و درک بیشتر ایده‌ی ریمان این‌که چگونه دو حوزه به ظاهر نامرتب نظریه اعداد و آنالیز مختلط را به هم ارتباط داد، نیاز داریم تا درباره‌ی توابعی به‌صورت ترکیبی از «امواج» صحبت کنیم.

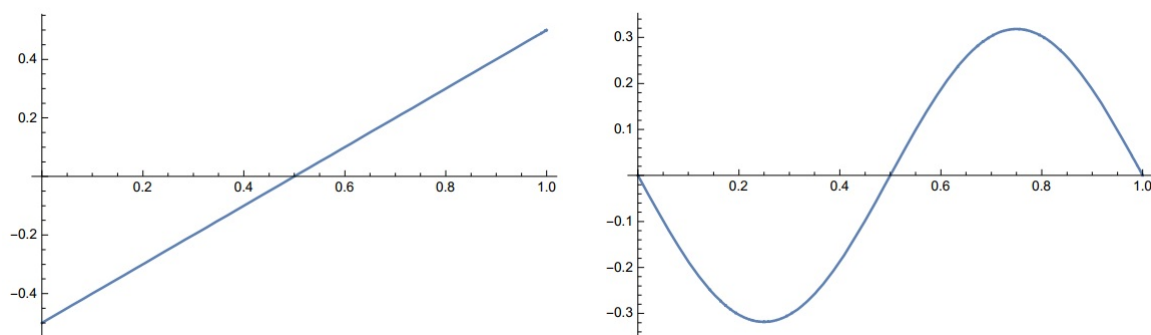
^{۱۴} معادل با $|\text{Li}(x) - \pi(x)| \leq \sqrt{x} \ln x$ برای $x \geq 3$.

جدول ۶. اعداد اول نابیشتر از x و پیش‌بینی‌های گاوس و ریمان

x	$\pi(x)$	پیش‌بینی گاوس	پیش‌بینی ریمان
۱۰۸	۵۷۶۱۴۵۵	۷۵۳	۱۳۱
۱۰۹	۵۰۸۴۷۵۳۴	۱۷۰۰	-۱۵
۱۰۱۰	۴۵۵۰۵۲۵۱۱	۳۱۰۳	-۱۷۱۱
۱۰۱۱	۴۱۱۸۰۵۴۸۱۳	۱۱۵۸۷	-۲۰۹۷
۱۰۱۲	۳۷۶۰۷۹۱۲۰۱۸	۳۸۲۶۲	-۱۰۵۰
۱۰۱۳	۳۴۶۰۶۵۵۳۶۸۳۹	۱۰۸۹۷۰	-۴۹۴۴
۱۰۱۴	۳۲۰۴۹۴۱۷۵۰۸۰۲	۳۱۴۸۸۹	-۱۷۵۶۹
۱۰۱۵	۲۹۸۴۴۵۷۰۴۲۲۶۶۹	۱۰۵۲۶۱۸	۷۶۴۵۶
۱۰۱۶	۲۷۹۲۳۸۳۴۱۰۳۳۹۲۵	۳۲۱۴۶۳۱	۳۳۳۵۲۷
۱۰۱۷	۲۶۲۳۵۵۷۱۵۷۶۵۴۲۳۳	۷۹۵۶۵۸۸	-۵۸۵۲۳۶
۱۰۱۸	۲۴۷۳۹۹۵۴۲۸۷۷۴۰۸۶۰	۲۱۹۴۹۵۵۴	-۳۴۷۵۰۶۲
۱۰۱۹	۲۳۴۰۵۷۶۶۷۲۷۶۳۴۴۶۰۷	۹۹۸۷۷۷۷۴	۲۳۹۳۷۶۹۷
۱۰۲۰	۲۲۲۰۸۱۹۶۰۲۵۶۰۹۱۸۸۴۰	۲۲۲۷۴۴۶۴۳	-۴۷۸۳۱۶۳
۱۰۲۱	۲۱۱۲۷۲۶۹۴۸۶۰۱۸۷۳۱۹۲۸	۵۹۷۳۹۴۲۵۳	-۸۶۲۱۰۲۴۴
۱۰۲۲	۲۰۱۴۶۷۲۸۶۶۸۹۳۱۵۹۰۶۲۹۰	۱۹۳۲۳۵۵۲۰۷	-۱۲۶۶۷۷۹۹۲

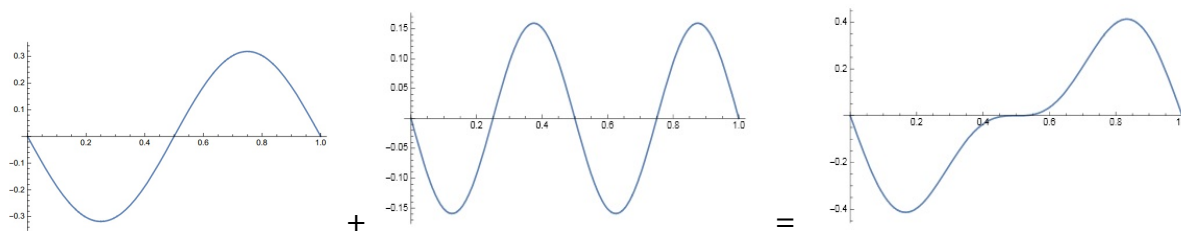
x	اختلاف نزدیک‌ترین عدد صحیح به $\ln \text{lcm}[1, 2, \dots, x]$
۱۰۰	۹۴ -۶
۱۰۰۰	۹۹۷ -۳
۱۰۰۰۰	۱۰۰۱۳ ۱۳
۱۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۵۲ ۵۷
۱۰۰۰۰۰۰	۹۹۹۵۸۷ -۴۱۳

۲.۲. کار با امواج. ممکن است شما نیز از این‌که «امواج رادیویی» و «امواج صوتی» چگونه با امواج سر و کار دارند تعجب کرده باشید. صوت‌ها خیلی به ظاهر به نظر نمی‌رسد که «موجی» باشند، اما نسبتاً به صورت منکسر، از هم تفکیک شده‌اند و به صورت ناگهانی شروع، توقف و تغییر می‌کنند. پس چه ارتباطی وجود دارد؟ ایده این است که همه صوت‌ها می‌توانند به شکل جمعی از امواج تبدیل شوند. برای مثال، تصور کنید که «صوت» ما با خط به تدریج صعودی $y = x - \frac{1}{4}$ نمایش داده می‌شود، که در فاصله $1 \leq x \leq 0$ در نظر گرفته می‌شود، که این در نمودار اول شکل ۱ نمایش داده شده است. اگر سعی کنیم این خط را با یک «موج» تقریب بزنیم، می‌توانیم با استفاده از تابع $y = -\frac{1}{\pi} \sin(2\pi x)$ تا حدودی به تخمین وسط خط نزدیک شویم. با این حال همان‌طور که در نمودار دوم شکل ۱ می‌بینید، این تابع برای $x < 1/4$ یا $x > 3/4$ تقریب ضعیفی است.



شکل ۱. نمودار خط $y = x - \frac{1}{4}$ و موج $y = -\frac{1}{4} \sin(2\pi x)$.

چگونه می‌توانیم این تقریب را بهبود بخشیم؟ ایده و روش کار این است که موج دوم را به تابع اول اضافه کنیم، این موج دوم از طریق دو تناوب و چرخه کامل در طول بازه $[0, 1]$ به جای تنها یک تناوب در نظر گرفته می‌شود. این متناظر با شنیدن صدای دو موج به‌طور همزمان است، که روی هم قرار گرفته‌اند، از منظر ریاضی می‌توان گفت دو تابع با هم جمع شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۲ می‌بینید اضافه کردن تابع $y = -\frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ به تابع اول تقریب بهتری از تابع با یک موج، برای مقادیر x بدست می‌دهد.



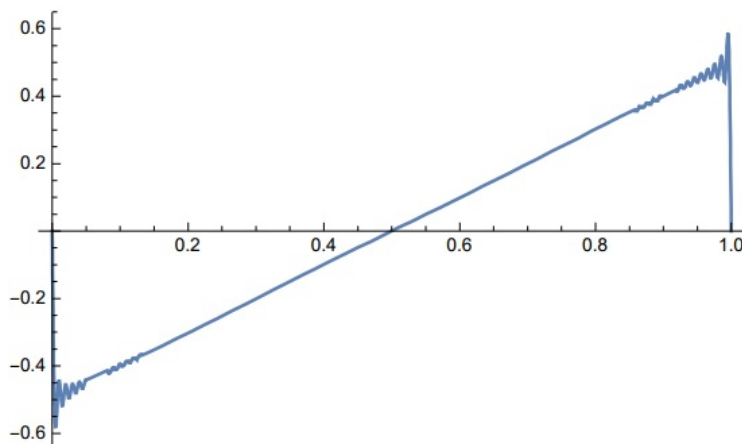
شکل ۲. اضافه کردن موج $y = -\frac{1}{4} \sin(4\pi x)$ به موج $y = -\frac{1}{4} \sin(2\pi x)$.

می‌توانیم به همین روش ادامه دهیم، با اضافه کردن سه، چهار و پنج تناوب کامل در این بازه، موج‌های بیشتر و بیشتری اضافه کنیم، و به همین ترتیب ادامه دهیم تا به‌طور فزاینده‌ای تقریب بهتری از خط مستقیم اولیه بدست آوریم. تقریبی که با استفاده از صد موج روی هم قرار گرفته، بدست آوردیم (شکل ۳)، به جز در نزدیک نقاط پایانی ۰ و ۱، تقریب واقعا خوبی است.

حال اگر به تقریبی که با صد موج ایجاد شده است نگاه کنیم، به این حقیقت که هر چه امواج بیشتری اختیار کنیم، تقریب بهتری بدست می‌آوریم، پی می‌بریم. مادامی که اجازه خطای بسیار جزئی را در تقریب دهیم (و چشم خود را بر روی آنچه در نقاط انتهایی اتفاق می‌افتد ببندیم)، در صورت استفاده از امواج به اندازه کافی، می‌توانیم یک تقریب بسیار نزدیک و دقیق ایجاد کنیم. با این حال، برای بدست آوردن یک نسخه «کامل» از خط مستقیم اولیه، نیاز داریم که از تعداد نامتناهی موج سینوسی استفاده کنیم. به‌طور دقیق‌تر

$$x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{n},$$

که عبارت سمت راست برای $0 < x < 1$ برقرار است. (حالت $n = 1$ و $n = 2$ جمله‌هایی از این سری است که در شکل ۱ و ۲ نشان دادیم). این فرمول در عمل کاربرد چندانی ندارد، زیرا واقعا نمی‌توانیم بی‌نهایت موج را یک‌باره انتقال دهیم، اما با این حال فرمول زیبا و جالبی است.



شکل ۳. تقریب با به کارگیری صد موج

به طور کلی، برای هر تابع $f(x)$ تعریف شده در بازه $[0, 1]$ که خیلی «ناهموار» (غیرتحلیلی) نیست، می توان مقادیر a_n و b_n یافت به طوری که $f(x)$ را بر حسب مجموع توابع مثلثاتی نوشت، یعنی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)).$$

این فرمول همراه با روش های محاسبه ضرایب a_n و b_n یکی از اتحادهای کلیدی و مهم «آنالیز فوریه» است؛ این (فرمول) و بسیاری از تعمیم های مربوط به آن، موضوع شاخه ای از ریاضیات بنام آنالیز هارمونیک است. در اصطلاح امواج، اعداد $2\pi n$ «فرکانس» مولفه های مختلف امواج هستند (کنترل سرعت چرخه آنها)، در حالی که ضرایب a_n و b_n «دامنه نوسان» آنها هستند (کنترل این که چقدر بالا و پایین می روند).

۳.۲. فرمول بنیادی ریمان. ایده ریمان را می توان به طور ساده، هر چند تا حدی شگفت انگیز، به صورت زیر تعبیر کرد: سعی کنید شمارش اعداد اول را با مجموع امواج انجام دهید.

فرمول دقیقی که وی ارائه داد برای این نوشته کمی فنی و پیچیده است، اما می توانیم تقریب نسبتاً خوبی از آن را برای مقادیر بزرگ x به صورت زیر ارائه داد. صحت و درستی این فرمول، هنوز اثبات نشده است، گرچه خیلی از ریاضی دانان اعتقاد به درستی آن دارند.

$$(۱.۲) \quad \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \#\{\text{اعداد اول} \leq x\}}{\sqrt{x}/\ln x} \approx 1 + 2 \sum_{\substack{\gamma > 0 \\ \frac{1}{p} + i\gamma \\ \text{صفری از } \zeta(s) \text{ است}}} \frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma}.$$

در فرمول سمت چپ، صورت کسر در واقع میزان خطایی است که با توجه به حدس گاوس از تقریب $\text{Li}(x)$ برای تعداد اعداد اول نابیشتر از x ، یعنی $\pi(x)$ استفاده شده است. قبلاً مشاهده کردیم مقدار خطا در صورت (اختلاف $\text{Li}(x)$ با $\pi(x)$) به نظر می رسد به طور تخمینی ریشه دوم x است، بنابراین ظاهر شدن $\sqrt{x}/\ln x$ در مخرج کسر مناسب به نظر می رسد. فرمول سمت راست با فرمول ارائه شده برای تقریب خط $x - \frac{1}{p}$ ، مشابه است. این یک سری از توابع سینوسی است، با مقادیر γ که به دو صورت به جای $2\pi n$ ظاهر می شوند: هر γ در داخل تابع سینوس (به عنوان فرکانس)، و وارون γ در ضریب سینوس

(به عنوان دامنه نوسان). حتی در هر فرمول عامل یکسان از ۲ را به دست می آوریم. با این حال، اعداد γ در اینجا بسیار ظریف تر از اعداد سر راست $2\pi n$ در فرمول مربوط به $x - 1/2$ هستند. تابع زتای ریمان $\zeta(s)$ ، به صورت زیر تعریف می شود

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

که در اینجا s یک عدد مختلط است، که به صورت $s = \sigma + it$ نوشته می شود که در آن σ و t به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی s هستند. اگر s یک عدد حقیقی باشد، از درس حساب سال های اول می دانیم سری تعریف شده برای $\zeta(s)$ همگراست اگر و تنها اگر $s > 1$ باشد، یعنی می توانیم مقادیر سری را تا بی نهایت جمع کنیم و به یک مقدار محدود و منحصر بفرد دست یابیم. با روشی مشابه می توان نشان داد برای مقادیر مختلط s ، سری همگراست اگر $\sigma > 1$ باشد. اما وقتی که $\sigma \leq 1$ است، چطور؟ چگونه می توانیم بفهمیم که مجموع سری همگراست؟

خوشبختانه یک پدیده بسیار زیبا و جالب به نام «ادامه تحلیلی»^{۱۵} در نظریه توابع مختلط وجود دارد. این ویژگی به ما می گوید توابعی که در ابتدا فقط برای اعداد مختلط مشخصی تعریف شده اند، اغلب به طور منحصر بفرد می توان آنها را برای سایر اعداد مختلط توسعه داد. در این حالت، تابع زتای ریمان که در ابتدا فقط برای $\sigma > 1$ کار می کرد، می توان آن را به کل صفحه مختلط به جز $s = 1$ ، ادامه تحلیلی داد (برای جزئیات بیشتر [۲۶] را ببینید).

این توصیف از فرایند ادامه تحلیلی به طرز نگران کننده ای جادویی به نظر می رسد. خوشبختانه یک راه کاملاً صریحی وجود دارد که نشان می دهد چگونه می توان $\zeta(\sigma + it)$ را دست کم برای $\sigma > 0$ «معقولانه» تعریف کرد. برای این منظور، ما با عبارت $\zeta(s)(1 - 2^{1-s})$ شروع می کنیم و یک سری ترفند و دستکاری هایی را به صورت زیر انجام می دهیم:

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s) = \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\zeta(s) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{(2m)^s} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ even}}} \frac{1}{n^s} = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \text{ odd}}} \frac{1}{m^s} - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ even}}} \frac{1}{n^s} \\ &= \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \left(\frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s}\right) + \dots \end{aligned}$$

بر حسب $\zeta(s)$ داریم

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - 2^{1-s})} \left\{ \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \left(\frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s}\right) + \dots \right\}.$$

تمام روابط فوق برای عدد مختلط $s = \sigma + it$ با $\sigma > 1$ معتبر بودند. با این حال، می توان نشان داد که سری نامتناهی رابطه اخیر برای هر $\sigma > 0$ همگراست. بنابراین، می توانیم معادله اخیر را به عنوان تعریف نوی «معقولی» از تابع زتای ریمان در این دامنه بزرگ تر در نظر بگیریم. توجه داشته باشید عدد خاص $s = 1$ باعث می شود که عبارت $\frac{1}{1-2^{1-s}}$ تعریف نشود. (مشکل ذاتی که تابع زتای ریمان دارد این است که نمی توان آن را با استفاده از سری های نامتناهی نمایش داد).

¹⁵analytic continuation

فرمول (۱.۲) ریمان وابسته به صفرهای ادامه تحلیلی تابع $\zeta(s)$ است. ساده‌ترین صفرها برای شناسایی همان اعداد صحیح زوج منفی هستند، یعنی

$$\zeta(-2) = 0, \zeta(-4) = 0, \zeta(-6) = 0, \dots,$$

که «صفرهای بدیهی» تابع زتای ریمان نامیده می‌شوند. می‌توان نشان داد هر صفر مختلط $\sigma + it$ تابع زتای ریمان (یعنی عددی که در شرایط $\zeta(\sigma + it) = 0$ صدق کند) در شرط $0 \leq \sigma \leq 1$ صدق می‌کند؛ این صفرهای مرموز تابع زتا، «صفرهای نابدیهی» نامیده می‌شوند.

بعد از انجام برخی محاسبات^{۱۶}، ریمان مشاهده کرد که به نظر می‌رسد تمام صفرهای نابدیهی تابع زتا روی خط به معادله $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ قرار دارند. به عبارت دیگر، وی فرضیه قابل توجه زیر را بیان کرد:

اگر $\sigma + it$ یک عدد مختلط با شرط $0 \leq \sigma \leq 1$ و $\zeta(\sigma + it) = 0$ باشد، در این صورت $\text{Re}(\sigma) = \frac{1}{2}$.

این ادعا که هنوز هیچ کس موفق به اثبات آن نشده است، به «فرضیه ریمان» معروف است. اگر فرضیه ریمان درست باشد، پس می‌توانیم تمام صفرهای نابدیهی تابع زتا را به صورت $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ نشان دهیم (همراه با مزدوج آن، یعنی $\frac{1}{2} - i\gamma$ ، زیرا $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0$ اگر و تنها اگر $\zeta(\frac{1}{2} - i\gamma) = 0$)، که در آن γ یک عدد حقیقی مثبت است. این صفرها اعداد مرموز و اسرارآمیز γ هستند که در فرمول (۱.۲) ظاهر می‌شوند، صحت و برقراری آنها فقط و فقط به درستی فرضیه ریمان بستگی دارد. در صورت نادرست بودن فرضیه ریمان، فرمول مشابه‌ای وجود دارد، اما نسبتاً پیچیده است و از نظر فنی و تکنیکال خیلی خوشایند نیست. دلیل این امر این است که ضرایب $\frac{1}{\gamma}$ ، که در فرمول (۱.۲) به صورت مقادیر ثابت هستند با تابعی از x جایگزین می‌شوند. بنابراین می‌خواهیم فرضیه ریمان برقرار باشد، زیرا این منجر به ساده شدن فرمول (۱.۲) شده است که یک فرمول جذاب است. از دیدگاه برخی از متخصصان حوزه موسیقی رابطه (۱.۲) تا حدودی شبیه فرمول‌های مربوط به امواج صوتی است، از این رو، فرمول (۱.۲) ادعا می‌کند «اعداد اول موسیقی دارند». ممکن است یک نفر بپرسد چطور می‌توان نامتناهی عبارت را در (۱.۲) با هم جمع کرد؟ ساده است: به ترتیب مقادیر صعودی γ جمع کنید و این کار خواهد کرد.

امروزه پژوهشگران میلیاردها صفر از تابع زتای ریمان را بدست آورده‌اند، و تمام صفرهای بدست آمده روی خط $\sigma = \frac{1}{2}$ واقع شده‌اند. برای مثال، نزدیک‌ترین صفرهای نابدیهی به محور حقیقی $s = \frac{1}{2} + i\gamma_1$ و $s = \frac{1}{2} - i\gamma_1$ است که در آن $\gamma_1 \approx 14.1347 \dots$. بر این باوریم که اعداد مثبت γ که به عنوان صفرهای نابدیهی تابع زتا شناخته می‌شوند، کم و بیش شبیه اعداد حقیقی تصادفی هستند، به این معنا که هیچ کدام از آنها با معادلات خطی ساده و با ضرایب صحیح با یکدیگر در رابطه نیستند (یا حتی با معادلات چندجمله‌ای پیچیده‌تر با اعداد جبری به عنوان ضرایب). به هر حال، با وجود این که ما می‌توانیم به‌طور عددی مقدار تقریبی صفرهای نابدیهی را تا دقت دلخواه به‌دست آوریم، ولی نمی‌توانیم درباره ماهیت دقیق γ ها صحبت کنیم.

۴.۲. مسابقه تابع شمارنده‌ی اعداد اول $\pi(x)$ در مقابل $\text{Li}(x)$. حال، چگونه می‌توانیم از «آنالیز فوریه» برای پیدا کردن کوچک‌ترین x استفاده کنیم به‌طوری که

$$\#\{\text{اعداد اول} \leq x\} > \int_2^x \frac{dt}{\ln t} ?$$

^{۱۶} هیچ مرجعی راجع به این محاسبات در نوشته‌های منتشر شده از وی وجود نداشت تا این که سیگل (Siegel) آنها را در یادداشت‌های شخصی و منتشر نشده ریمان پس از مرگ ریمان کشف کرد.

ایده و روش کار این است که مقدار زیر را با استفاده از فرمول (۱.۲) تقریب بزنیم

$$\frac{\text{Li}(x) - \pi(x)}{\sqrt{x}/\ln x} = \frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \#\{\text{اعداد اول} \leq x\}}{\sqrt{x}/\ln x}.$$

همان‌طور که چند لحظه پیش هنگام تقریب تابع $x - 1/2$ دیدیم، انتظار داریم با جمع بستن در سمت راست فرمول (۱.۲) و با به‌کارگیری تعدادی از صفرهای اولیه تابع $\zeta(s)$ ، به تقریب نسبتاً خوبی دست یابیم (بسته به میزان دقت ما، می‌توانیم از صد، هزار یا یک میلیون مقدار اولیه γ که $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0$ است، استفاده کنیم). به عبارت دیگر

$$\frac{\int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \#\{\text{اعداد اول} \leq x\}}{\sqrt{x}/\ln x} \approx 1 + 2 \sum_{\substack{\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0 \\ 0 < \gamma < T}} \frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma},$$

که در آن مقدار T بستگی به تعداد صفرهایی که می‌خواهیم دارد.

شکل ۴ یک نمودار از تابع $(\text{Li}(x) - \pi(x))/(\frac{1}{2}\text{Li}(\sqrt{x}))$ در بازه 10^4 تا 10^8 را همراه با سه نمودار از تقریب‌های آن، که به ترتیب با 10^4 ، 10^6 و 10^8 مقدار γ است را نشان می‌دهد.^{۱۷} مشاهده می‌کنیم هر چه از صفرهای بیشتری استفاده کنیم، به تقریب بهتری دست می‌یابیم.

با محاسبات گسترده از این نوع، بیز و هادسون حدس زدند اولین باری که $\pi(x)$ از $\text{Li}(x)$ جلو می‌زند تقریباً در 1.3982×10^{316} است.

۵.۲. مسابقه به پیمان ۴. در سال ۱۹۵۹ شانکس (Shanks) به منظور مطالعه مسابقه به پیمان ۴، پیشنهاد ترسیم یک هیستوگرام برای مقادیر زیر داد:

$$(2.2) \quad \frac{\#\{4n + 3 \leq x\} - \#\{4n + 1 \leq x\}}{\sqrt{x}/\ln x}.$$

شکل ۵ چنین هیستوگرامی را برای یک هزار نمونه با مقادیر $10^6, 10^7, 10^8, \dots, 10^9$ را نشان می‌دهد. با توجه به نمودار هیستوگرام: ممکن است حدس بزنیم اگر ما مقادیر نمونه بیشتر و بیشتری را امتحان کنیم، هیستوگرام بیشتر و بیشتر شبیه چیزی مانند منحنی زنگوله‌ای است که مرکز آن ۱ است. نتیجه لیتلود در (۲.۱) بیان‌گر این است که هر چه ما از مقادیر و نمونه‌های بیشتری استفاده کنیم، دنباله هیستوگرام به صورت افقی تا بی‌نهایت کشیده می‌شود، زیرا نسبت در معادله (۲.۲) حداقل به بزرگی برخی از مضارب ثابت $\ln \ln \ln x$ برای مقادیر نامتناهی از x است.^{۱۸} بی‌تردید از شکل ۵، توسعه نامحدود هیستوگرام روشن نیست، ولی این خیلی تعجب‌آور نیست، زیرا همان‌طور که شانکس در سال ۱۹۵۹ اظهار داشت [۲۴]:

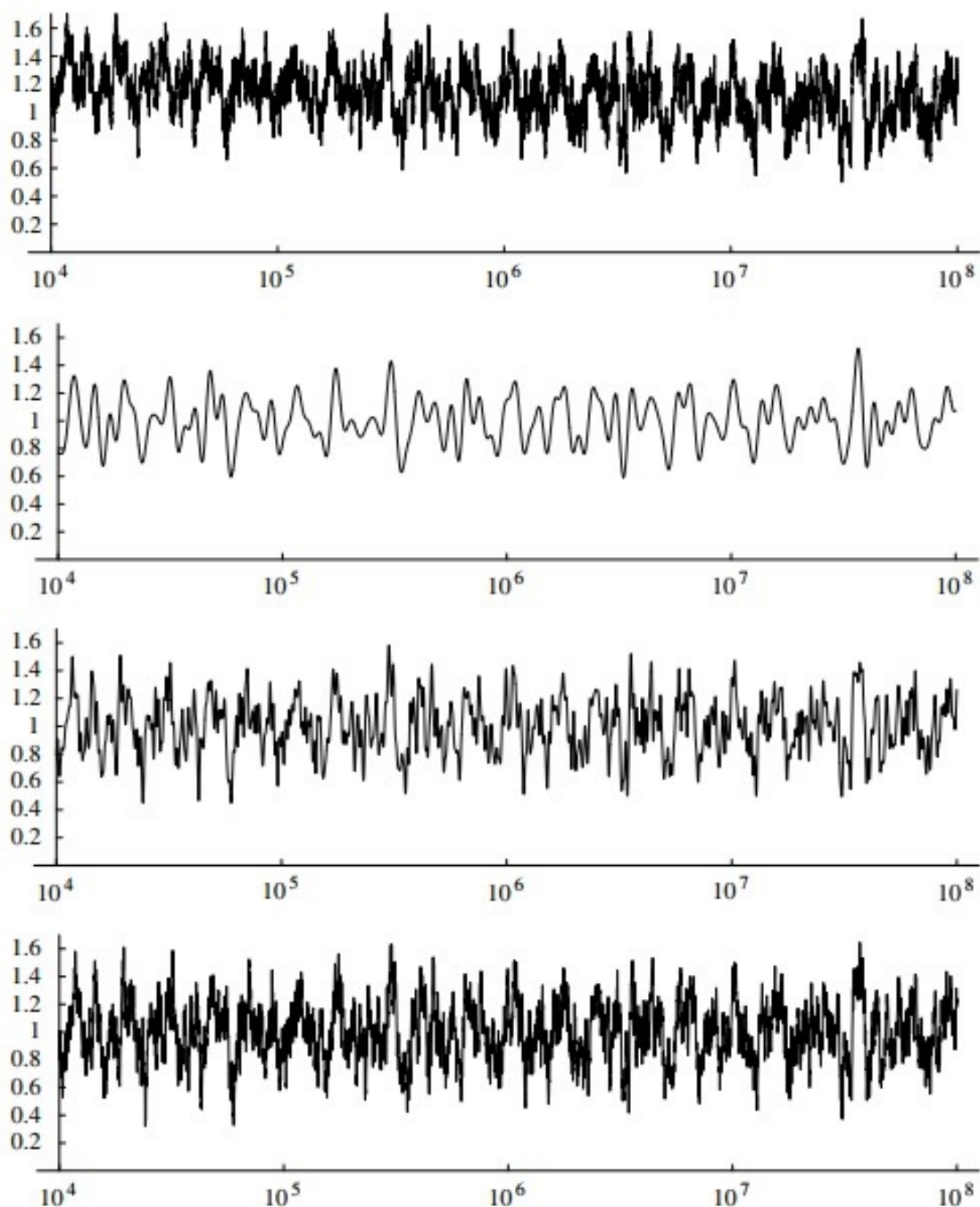
$\ln \ln \ln x$ با وقار تمام به بی‌نهایت میل می‌کند.

در (۱.۲) دیدیم که چگونه اختلاف بین $\pi(x)$ و $\text{Li}(x)$ را می‌توان با مجموع امواجی که فرکانس‌ها و دامنه نوسان آنها به صفرهای تابع زتای ریمان بستگی دارد؛ تقریب زد. برای شمارش اعداد اول نابیشتر از x به شکل $4n + 1$ یا به شکل $4n + 3$ ، یا هر شکل $qn + a$ که $\gcd(q, a) = 1$ ، فرمولی مشابه (۱.۲) وجود دارد که بستگی به صفرهای L -تابع دیریکله^{۱۹} دارد، تابعی مرتبط (و تا حدودی مشابه) با تابع زتای ریمان، هر چند که تعریف آن کمی پیچیدگی بیشتری دارد. برای مثال

^{۱۷} وقتی x بزرگ است $\frac{1}{2}\text{Li}(\sqrt{x}) \approx \sqrt{x}/\ln x$

^{۱۸} در واقع، لیتلود با معکوس شدن دو عبارت سمت چپ، نابرابری را نیز ثابت کرد، بنابراین هیستوگرام از سمت چپ نیز تا منفی بی‌نهایت کشیده می‌شود

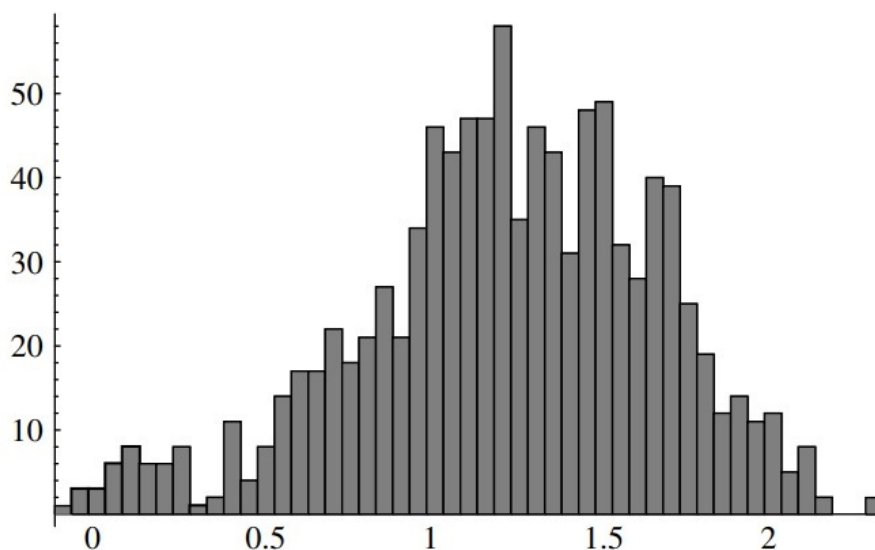
^{۱۹} Dirichlet



شکل ۴. نمودار $(Li(x) - \pi(x)) / (\frac{1}{2} Li(\sqrt{x}))$ با بکارگیری $10^4, 10^5$ و 10^6 صفر نابدیهی $\zeta(s)$

L -تابع دیریکله مرتبط با مسابقه بین اعداد اول به شکل $4n + 1$ و $4n + 3$ ، به صورت زیر است:

$$L(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots$$



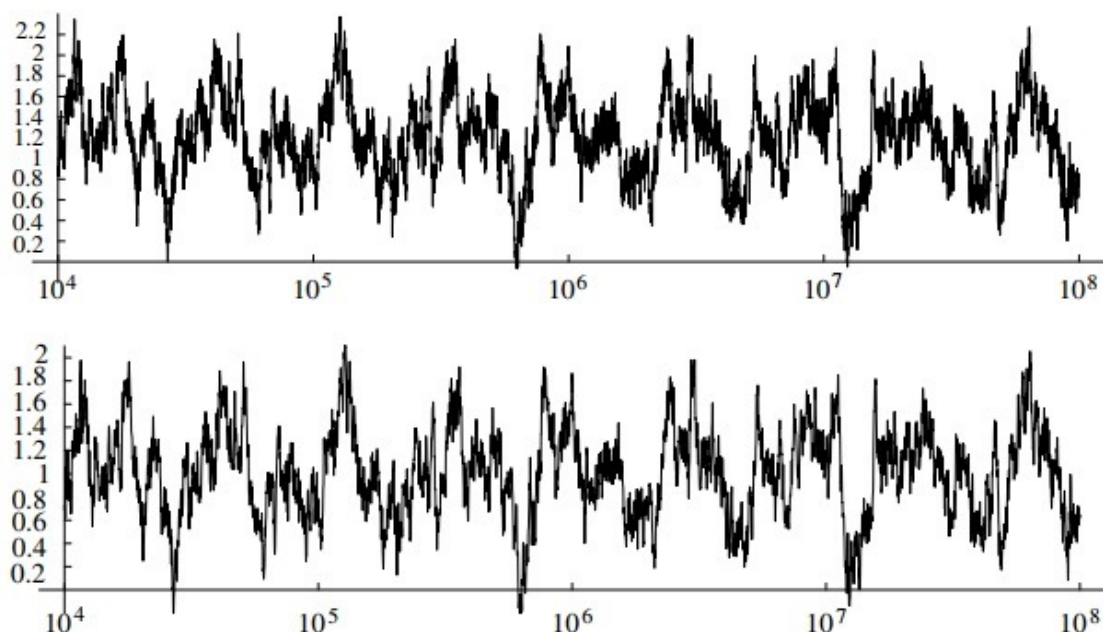
شکل ۵. نمودار هیستوگرام رابطه (۲.۲) در $x = 1000k$ ($1 \leq k \leq 1000$)

توجه داشته باشید این تابع (و همه توابع L دیریکله) برای هر $s = \sigma + it$ با $\sigma > 0$ ، همگراست. یک فرمول جالب مشابه (۱.۲) برای اعداد اول به شکل $qn + a$ وجود دارد. این فرمول فقط و تنها فقط در صورتی برقرار است که تمام صفرهای L -تابع دیریکله مفروض که در نوار $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$ قرار دارند در شرط $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ صدق کنند. این ادعا را فرضیه ریمان تعمیم یافته می نامیم. برای مثال اگر فرضیه ریمان تعمیم یافته برای تابع $L(s)$ که هم اکنون تعریف کردیم، درست باشد، در این صورت فرمول زیر را داریم:

$$\frac{\#\{4n+3 \leq x\} - \#\{4n+1 \leq x\}}{\sqrt{x}/\ln x} \approx 1 + 2 \sum_{\substack{\gamma > 0 \\ \text{همه اعداد حقیقی} \\ \text{به طوری که } \frac{1}{2} + i\gamma \\ \text{صفری از } \zeta(s) \text{ است}}} \frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma}.$$

در نتیجه، می توانیم با محاسبه سمت راست این فرمول، مسابقه به پیمان ۴ را مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم، می توانیم فقط با صد، هزار یا یک میلیون صفر از تابع $L(s)$ این فرمول را محاسبه و برآورد کنیم. شکل ۶ نشان می دهد که چنین تقریبی با ۱۰۰۰ صفر تا چه حد با داده های واقعی مطابقت دارد.

سه بار اولی که تیم ۱ برتری دارد و پیشتاز است به وضوح در هر دو نمودار قابل مشاهده است (پیش از این داده های دقیق مربوط به این مسابقه را ارائه داده ایم). نکته جالب و قابل توجه در مورد این تقریب آن است که با بزرگ شدن مقادیر x ، برخلاف رفتار مسابقه شمارش دقیق اعداد اول، تقریب و پیش بینی مسابقه کار سختی نیست. در سال ۱۹۹۹ بیز و هادسون از چنین تقریب هایی برای پیش بینی بیشتر «تغییرات علامت» در فرمول (۲.۲)، تا مجاورت $x = 10^{100}$ ، استفاده کردند. دو مورد بعدی که آنها پیش بینی کردند تقریباً در مجاورت $20^{12} \times 1/4898$ بود که بعداً در ۴۲۸، ۴۷۸، ۴۸۸، ۱ و تقریباً در نزدیکی $20^{12} \times 9/3190$ یافت شد.



شکل ۶. نمودار رابطه (۲.۲) با استفاده از تقریب ۱۰۰۰ صفر از $L(s)$

۳. این سوگیری‌ها از کجا ناشی می‌شود؟

ما چندین نمونه از مسابقات اعداد اول و همچنین سوگیری‌هایی را مشاهده کردیم که به نظر می‌رسد یک دنباله حسابی خاصی نسبت به دیگر دنباله‌ها برتری دارد. اگر چه دیدیم چنین سوگیری‌هایی را می‌توان با استفاده از فرمول‌های پیچیده مانند (۱.۲) توضیح داد، اما این تفسیر و توضیح‌ها به راحتی قابل درک نیستند و بدون محاسبات عظیم و داده‌های عددی زیاد، برای ما به راحتی قابل پیش‌بینی نیست که کدام یک از دو دنباله بر دیگری برتری دارد و پیش‌تاز است. اجازه دهید همه مسابقاتی را که تا کنون مشاهده کردیم، در این جا خلاصه کنیم و دنبال یک الگو باشیم، به امید این‌که بتوانیم یک راه میانبر و کوتاه برای چنین پیش‌بینی‌هایی بیابیم. دیدیم که در بیشتر مواقع، نتایج زیر به نظر می‌رسد:

- تعداد اعداد اول به شکل $4n + 3$ بیشتر از شکل $4n + 1$ است؛
- تعداد اعداد اول به شکل $3n + 2$ بیشتر از شکل $3n + 1$ است؛
- تعداد اعداد اول به شکل $10n + 3$ و $10n + 7$ بیشتر از اعداد اول به شکل $10n + 1$ و $10n + 9$ است.

آیا شما الگویی می‌بینید؟ احتمالاً داده‌های کافی برای یک حدس خوب در اینجا وجود ندارد. اما بیایید یک مسابقه چهار تیمی دیگر را بررسی کنیم که در آن تیم‌های شرکت کننده به شکل $8n + 1$ ، $8n + 3$ ، $8n + 5$ و $8n + 7$ هستند (جدول ۷):

جدول ۷. مقایسه تعداد اعداد اول به شکل $\lambda n + j$ برای $j = 1, 3, 5, 7$.

x	$\lambda n + 1$	$\lambda n + 3$	$\lambda n + 5$	$\lambda n + 7$
۱۰۰	۵	۷	۶	۵
۲۰۰	۱۰	۱۲	۱۲	۱۰
۵۰۰	۲۲	۲۴	۲۴	۲۳
۱۰۰۰	۴۰	۴۲	۴۶	۳۸
۲۰۰۰	۷۳	۷۸	۷۷	۷۳
۵۰۰۰	۱۶۳	۱۷۲	۱۶۹	۱۶۳
۱۰۰۰۰	۳۰۶	۳۱۰	۳۰۸	۳۰۳
۲۰۰۰۰	۵۶۳	۵۶۹	۵۶۹	۵۵۹
۵۰۰۰۰	۱۲۷۴	۱۲۹۰	۱۲۸۸	۱۲۷۹
۱۰۰۰۰۰	۲۳۸۷	۲۴۰۲	۲۴۱۱	۲۳۹۰
۲۰۰۰۰۰	۴۴۷۸	۴۵۱۷	۴۵۰۳	۴۴۸۴
۵۰۰۰۰۰	۱۰۳۸۶	۱۰۳۸۲	۱۰۴۰۳	۱۰۳۶۵
۱۰۰۰۰۰۰	۱۹۶۱۷	۱۹۶۶۵	۱۹۶۲۱	۱۹۵۹۳

این مسابقه کمی عجیب است، زیرا تنها الگویی که ظاهر می‌شود، به نظر می‌رسد به صورت زیر باشد:

• اعداد اول به شکل $\lambda n + 3$ ، $\lambda n + 5$ و $\lambda n + 7$ بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل $\lambda n + 1$ است.

در حقیقت این الگو برای x های بین ۲۳ تا 10^6 درست است. اما این «عجیب بودن» باید به دانشجویان نظریه اعداد کمک کند تا الگویی را حدس بزنند، زیرا دانشجویان نظریه اعداد می‌دانند مربع هر عدد فرد به صورت $\lambda n + 1$ است.^{۲۰} در طول بحث ما درباره $\text{lcm}[1, 2, 3, \dots, n]$ و ارتباط آن با تابع شمارنده اعداد اول $\pi(x)$ ، در بخش قبل دیدیم که پیش‌بینی ریمان برای $\{x : p^2 \leq x\}$: اعداد اول $\frac{1}{p} \#$ تقریب $\pi(x) + \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ است. به عبارت دیگر، برتری که اکثر اوقات، $Li(x)$ بر $\pi(x)$ دارد، بخاطر شمردن و به حساب آمدن همین مربع‌های اعداد اول است. این شواهد^{۲۱} نشان می‌دهد که مربع‌های اعداد اول نقش مهمی در این سوگیری‌ها بازی می‌کنند. اجازه دهید دنباله‌های حسابی را که مربع‌های اعداد اول متعلق به آن پیمانه هستند و قبلاً در این بخش بحث شده است، بررسی کنیم:

- برای هر عدد اول p که بر ۴ بخش‌پذیر نیست، p^2 به شکل $4n + 1$ است.
- برای هر عدد اول p که بر ۳ بخش‌پذیر نیست، p^2 به شکل $3n + 1$ است.
- برای هر عدد اول p که بر ۱۰ بخش‌پذیر نیست، p^2 به شکل $10n + 1$ یا $10n + 9$ است.
- برای هر عدد اول p که بر ۸ بخش‌پذیر نیست، p^2 به شکل $\lambda n + 1$ است.

دقیقا اکثر اوقات درست است! به نظر می‌رسد که به طور معمول $qn + a$ تعداد اعداد اولی کمتری نسبت به $qn + b$ دارد اگر a یک مربع به پیمانه q باشد ولی b نباشد.

^{۲۰} توجه داشته باشید برای تمام اعداد صحیح فرد $2m - 1 \equiv 1 \pmod{8} + 8\binom{m}{2} = (2m - 1)^2$.

^{۲۱} در حقیقت تا حدودی شواهد تصادفی.

۱.۳. در واقع ما چه نوع پدیده‌ای مشاهده می‌کنیم؟ ما برخی پدیده‌ها و الگوهایی را مشاهده کرده‌ایم که در آن «به‌طور معمول» نوعی سوگیری برای برتر دانستن یک دنباله حسابی نسبت به سایر دنباله‌ها وجود داشت، یعنی یک پیش‌تاز «رایج» در مسابقه اعداد اول. هرچند تا کنون توصیف دقیقی از این سوگیری ارائه نکرده‌ایم و عدد و کمیت مناسبی را برای اندازه‌گیری این سوگیری‌ها معرفی نکرده‌ایم. در بخش اول بیان کردیم که ناپووسکی و تیوران در سال ۱۹۶۲ حدس زدند که: اگر «به‌طور تصادفی» عدد بسیار بزرگ x را انتخاب کنیم، در این صورت تقریباً به‌طور مشخص، تعداد اعداد اول نابیشتر از x به شکل $4n+3$ بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل $4n+1$ است (بدیهی است که چنین حدسی را می‌توان به سایر مسابقات اعداد اول که در نظر گرفتیم تعمیم داد). با این حال، شواهد پشتیبان برای داده‌هایمان به‌طور کامل قانع‌کننده نبودند. در واقع، با مطالعه فرمول صریح (۱.۲)، کاجوروفسکی [۱۴] و سرناک [۲۲]، به‌طور مستقل، نشان دادند که حدس ناپووسکی - تیوران نادرست است! در واقع کمیت

$$\left\{ \text{تعداد اعداد اول نابیشتر از } x \text{ به شکل } 4n+3 \text{ بیشتر از تعداد اعداد اول به شکل } 4n+1 \text{ است} : x \leq X \right\} \frac{1}{X}$$

وقتی که $x \rightarrow \infty$ ، به حد خاصی میل نمی‌کند اما در عوض نوسان دارد. این وضعیت چندان رضایت‌بخشی از ماجرا نیست، گرچه این امکان‌پذیر است که واقعاً نتوانیم چیزی بیشتر از این بگوییم: پدیده‌ای که مشاهده کردیم فقط برای «اعداد در مقیاس کوچک»^{۲۲} می‌تواند درست باشد، و وقتی که به اندازه کافی جلو می‌رویم، مسابقه بدون سوگیری (منصفانه و بی‌طرف) به نظر می‌رسد.

با این حال، معلوم می‌شود که این موضوع صادق نیست. در سال ۱۹۹۴، روبنشتاین^{۲۳} و سرناک^{۲۴} مشاهدات الهام‌بخشی داشتند. بعد از این‌که مشخص شد یک دنباله نمی‌تواند برای هر درصد ثابتی (از زمان) در طول مسابقه نسبت به دیگری برتری داشته باشد، به‌طوری که به نظر می‌رسد این طرز تفکر (برای مسابقه) بسته و نامناسب باشد، روبنشتاین و سرناک با خود گفتند شاید روش واضح شمارش اعداد اول لزوماً روش مناسبی، حداقل در این زمینه نباشد. آن‌ها مشاهده کردند اگر کمی متفاوت‌تر بشمارید (از نظر فنی، از متر و معیار دیگر استفاده کنید)، نتیجه و جواب بسیار رضایت‌بخش‌تری دریافت خواهید کرد. علاوه بر این، یک چشم‌انداز کلی از نتایج را به دست می‌آوریم که تمام پدیده‌های مشاهده شده را به گونه‌ای توضیح می‌دهد که بسیار طبیعی به نظر می‌رسد.

گاهی اوقات در ریاضیات، این ساده‌ترین ابزار است که کلید کشف یک رمز و راز است، نه یک ابزار سخت فنی، و این مساله قطعاً در مورد این سوال صدق می‌کند. ایده اصلی روبنشتاین و سرناک در مسابقه بین اعداد اول به شکل $4n+3$ و $4n+1$ ، شمردن ۱ برای هر عدد صحیح $(x \leq X)$ نیست، بلکه در عوض شمردن $\frac{1}{x}$ است. البته که، مجموع $\sum_{x \leq X} \frac{1}{x}$ ، مقدار X نیست، بلکه تقریباً $\ln X$ است، بنابراین در عوض به این مقیاس نیاز داریم. به هر حال، وقتی این کار را انجام می‌دهیم، نتیجه قابل‌توجهی بدست می‌آوریم [۲۱]:

قضیه ۱.۳ (روبنشتاین و سرناک ۱۹۹۴). وقتی که $x \rightarrow \infty$ ،

$$\frac{1}{\ln X} \sum_{x \leq X} \frac{1}{x} \rightarrow 0.9959 \dots$$

$$\# \{4n+3 \leq x\} > \# \{4n+1 \leq x\}$$

به عبارت دیگر، با مقیاس و روش اندازه‌گیری دیگر، حدود ۹۹/۵۹ درصد اوقات، حدس چیشیف درست بوده است. علاوه بر این، ایده آن‌ها در مورد سایر مسابقات اعداد اول که در مورد آن‌ها بحث کردیم، نیز صدق می‌کند. برای مثال در مسابقه

^{۲۲} «کوچک» در مقیاس مناسب!

^{۲۳}Rubinstein ^{۲۴}Sarnak

به پیمانه ۳، وقتی که $X \rightarrow \infty$ ، داریم:

$$\frac{1}{\ln X} \sum_{\substack{x \leq X \\ \# \{3n+1 \text{ اعداد اول } \leq x\} > \# \{3n+2 \text{ اعداد اول } \leq x\}}} \frac{1}{x} \rightarrow 0.999000 \dots$$

بنابراین، مادامی که «پیشتازی و جلو بودن» را با این مقیاس اندازه می‌گیریم، شانس تیم ۱ برای برتری و جلو زدن از تیم ۳، در هر زمان از مسابقه، تقریباً یک در هزار است.

و اما در مورد مسابقه بین $\pi(x)$ و $\text{Li}(x)$ چگونه؟ یادآوری می‌کنیم، ما انتظار رسیدن به مثال نقض تا عدد بسیار بزرگ $10^{316} \times 13982 \approx x$ را نداریم. در این حالت، روبنشتاین و سرناک نشان دادند وقتی که $X \rightarrow \infty$ ، داریم

$$\frac{1}{\ln X} \sum_{\substack{x \leq X \\ \pi(x) < \text{Li}(x)}} \frac{1}{x} \rightarrow 0.99999973000 \dots$$

یعنی با مقایس مناسب اندازه‌گیری، تقریباً ۹۹.۹۹۹۹۷۳ درصد اوقات، $\pi(x) < \text{Li}(x)$ است. بنابراین، جای تعجب نیست که اولین عددی مانند x که $\pi(x) > \text{Li}(x)$ بسیار بسیار بزرگ باشد.

این روش موفقیت‌آمیز اندازه‌گیری، اندازه‌گیری لگاریتمی نامیده می‌شود (بخاطر «عامل نرمال‌سازی» $\ln X$). این (روش اندازه‌گیری) در بسیاری از زمینه‌های ریاضیات ظاهر می‌شود، حتی در سال ۱۹۴۱ توسط وینتر^{۲۵} در یک زمینه مرتبط مورد استفاده قرار گرفت ولی هرگز به جذابیت و شفافیت روش روبنشتاین و سرناک نبود.

نتایج شگفت‌انگیز آن‌ها تحت فرضیات کاملاً قابل قبول به اثبات رسیده است. فرض نخست آنها برقرای تعمیم فرضیه ریمان بود (به عبارت دیگر، فرمول‌های شگفت‌انگیز و عجیبی مانند (۱.۲) را می‌توان برای شمارش اعداد اول به شکل $qn+b$ و نابیشتر از x استفاده کرد). دوم این‌که γ هایی که در این فرمول‌ها هستند همان قسمت موهومی صفرهای L -تابع دیریکله نظیر هستند که بر اعداد گویا به طور خطی مستقل هستند. شوک برانگیز است اگر هر یک از این فرضیات غلط باشد، اما بعید به نظر می‌رسد که در آینده نزدیک این فرضیات اثبات شوند.

۲.۳. چنین نتایجی را چگونه اثبات می‌کنید؟ اثبات نتایجی که قبلاً ذکر کردیم، همچنین نتایجی که در بخش بعد مورد بحث قرار می‌گیرند، بسیار فنی و پیچیده است که بیان جزئیات کامل آن‌ها در اینجا ممکن نیست. با این حال، همه آن‌ها به بررسی دقیق فرمول (۱.۲) و موارد مشابه آن برای مسابقات به پیمانه q بستگی دارد. فرض درستی تعمیم حدس ریمان، تضمین می‌کند که در همه موارد مورد بررسی، در وهله اول فرمولی از نوع (۱.۲) وجود دارد. برای تجزیه تحلیل مقدار آن، ما به بررسی و در نظر گرفتن جمع سمت راست فرمول (۱.۲) نیاز داریم، به‌ویژه، مقادیر جملات مختلف آن و این‌که چگونه بر یکدیگر اثر می‌کنند: هر عبارت $2 \sin(\gamma \ln x) / \gamma - 2 / \gamma$ یک موج سینوسی است که به‌طور منظم بین $-2 / \gamma$ و $2 / \gamma$ نوسان می‌کند^{۲۶}. همان‌طور که در هنگام مطالعه و بررسی امواج مشاهده کردیم که چگونه چنین امواجی می‌توانند ترکیب شوند تا تقریبی از یک خط مستقیم بدهند، اگر مقادیر مختلف γ را بتوان به گونه‌ای انتخاب کرد که به نحوی موج‌های منفرد همگام شوند، آنگاه مجموع می‌تواند به شکل‌های شگفت‌انگیزی تبدیل شود. این منجر به فرض دوم می‌شود: اگر فرض کنیم که امواج نمی‌توانند به روشی خارق‌العاده با هم ترکیب شوند، مجموع باید کم و غیرمنتظره باقی بماند. به بیان دیگر، ما انتظار داریم که یک بخش قابل توجهی از جملات مثبت و بخش قابل توجه دیگری از جملات منفی باشند، بنابراین بسیاری از جملات با یکدیگر حذف خواهد شد. این همان چیزی است که از فرض مستقل بودن γ ها بر اعداد گویا به‌دست می‌آید. تحت این فرض دوم، مقادیر عبارت‌های $\sin(\gamma \ln x)$ برای مقادیر زیادی از x ، نمی‌توانند همگام شوند و ما می‌توانیم نتایج را مشخص کنیم.

^{۲۶} «به‌طور منظم»، یعنی اگر $\ln x$ را به جای x متغیر در نظر بگیریم. در حقیقت، این دلیل واقعی است که «اندازه لگاریتمی» برای شمارش اعداد اول ما مناسب‌تر است.

در حقیقت، متوجه می‌شویم که کوچک‌ترین مقادیر γ ها، بیشترین تاثیر را بر مقدار مجموع دارد. (این تعجب‌آور نیست، زیرا عبارت متناظر با γ عامل γ در مخرج دارد).

محاسبه مقادیر عددی دقیق که چگونه اغلب شمردن یک عدد اول جلوتر از عدد دیگر است، کمی ظریف است. دیگر کافی نیست که استدلال کنیم مجموع «بزرگ» است یا «کوچک»؛ ما نیاز داریم به‌طور دقیق بدانیم چه زمانی مجموع (۱.۲) بزرگ‌تر از $1/2 -$ یا کوچک‌تر از $1/2 -$ است، زیرا مقدار مجموع سمت راست بین مقادیر مثبت و منفی نوسان می‌کند. همان‌طور که مشخص است، در صورتی که (به‌صورت مرسوم) از آنالیز فوریه استفاده کنیم، می‌توان دقیقاً تعداد دفعات وقوع این اتفاق را محاسبه کرد: مجموع امواج در (۱.۲) که در آن نوسانات بستگی به صف‌های تابع زتای ریمان دارند، به‌عنوان مجموع «امواج فوریه» که نوسانات آن بستگی به اعداد $2\pi n$ دارد، بازنویسی می‌کنیم. اگر چه این خیلی دست و پا گیر است که بتوان آن را به صورت بسته ارائه کرد، اما می‌توان با تکنیک‌های محاسباتی هوشمندانه، مقدار عددی آن را با دقت زیادی تقریب زد.

۳.۳. مربع و نامربع: روش لیتلود. در چندین مورد، ما با نتایجی از مقاله لیتلود در سال ۱۹۱۴ مواجه شدیم^{۲۷}. این روش به اندازه کافی قوی است که نتایج نسبتاً کلی را ثابت کند، ولی نه به طور معمول برای مسابقه تصاعدی دیگر^{۲۸}. در واقع، برای هر عدد اول فرد q ، فرض کنید تیم S ، مجموعه اعداد اولی باشند که همنهشت با یک مربع به پیمانه q باشند و تیم T را سایر اعداد اول در نظر بگیرید. با استفاده از روش لیتلود می‌توان نشان داد که هر یک از تیم‌ها بینهایت بار پیش‌تاز می‌شوند^{۲۹}، همچنین برتری و پیش‌تازی برای اعداد نابیشتر از x ، می‌تواند به بزرگی $c\sqrt{x} \ln \ln \ln x / \ln x$ باشد که در آن c ثابت مثبت وابسته به q است. یک مثال از این مورد برای مسابقه به پیمانه $q = 5$ است که در آن S شامل اعداد اول با رقم آخر ۱ و ۹ (همچنین ۵) است، لذا این همان مسابقه به پیمانه ۱۰ است. یادآوری می‌کنیم که ما در داده‌ها و اطلاعات محدود مربوط به جدول ۳ و ۴ مشاهده کردیم که تیم N معمولاً پیش‌تاز است.

مسابقات دیگری وجود دارد که می‌توانند با استفاده از روش لیتلود مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرند، که همیشه شامل تقسیم‌بندی اعداد اول به دو رده‌ی به‌ظاهر مساوی می‌باشند. در حقیقت، برای هر پیمانه q ، دست‌کم یک چنین مسابقه‌ای وجود دارد و اغلب بیش از یک مسابقه وجود دارد. در حالتی که q عدد اولی نباشد، توصیف و شرح کلاس‌بندی مناسب پیچیده‌تر می‌شود.

۴.۳. نتایج بیشتری از روبنشتاین و سرناک (۱۹۹۴). در یک مسابقه اعداد اول بین دو دنباله حسابی به پیمانه q ، چه زمانی یک سوگیری می‌بینیم و چه زمانی نه؟ آیا هر دنباله حسابی دقیقاً ۵۰٪ مواقع (در اندازه لگاریتمی) پیش‌تاز است؟ مهم‌تر از همه این‌که، آیا می‌توانیم قبل از انجام یک محاسبه دشوار، تصمیم‌گیری کنیم؟ پیش از این مشاهده کردیم که معمولاً به نظر می‌رسد که برای اعداد نابیشتر از x ، تعداد اعداد اول به شکل $qn + b$ بیشتر از اعداد به شکل $qn + a$ است در صورتی که a یک مربع به پیمانه q باشد ولی b نباشد. در واقع، با در نظر گرفتن دو فرض (یعنی فرضیه ریمان تعمیم‌یافته و استقلال خطی γ های مربوطه)، روبنشتاین و سرناک ثابت کردند که این درست است: اندازه لگاریتمی برای مجموعه‌ی از مقادیر x که در آن تا x اعداد اول به شکل $qn + b$ بیشتری نسبت به شکل $qn + a$ وجود دارد، اکیداً بیشتر از $\frac{1}{p}$ است، گرچه همیشه کم‌تر از ۱ است. به عبارت دیگر، هر نامربعی بیشتر از نیمی از مواقع از هر مربعی جلوتر و پیش‌تاز است، هر چند ۱۰۰٪ مواقع نیست.

^{۲۷} در واقع فقط با مسابقه بین $\pi(x)$ و $\text{Li}(x)$ سر و کار دارد.

^{۲۸} اگر چه در مواردی که ما مشاهده کردیم q کوچک بود.

^{۲۹} به عبارت دیگر، اعداد به دلخواه بزرگ x و y وجود دارد که برای اعداد نابیشتر از x تعداد اعداد اول در S بیشتر از T است و برای اعداد نابیشتر از y ، تعداد اعداد اول در T بیشتر از S است.

وقتی که a و b هر دو به پیمانه‌ی q مربعی باشند و یا هر دو نامربعی، می‌توانیم همین سوال را مطرح کنیم. در این حالت، تحت همان فرضیه‌ها، روبنشتاین و سرناک نشان دادند درست در نیمی از مواقع داریم

$$\#\{qn + a \leq x\} > \#\{qn + b \leq x\}.$$

در حقیقت آن‌ها چیزی بیشتر از این را ثابت کردند. برای شرح و توصیف نتایج آنها، نیاز داریم جملات خطای مشخصی درباره‌ی شمارش اعداد اول تعریف کنیم و آنچه را که ما «توزیع حدی» آن‌ها می‌گوییم را توصیف کنیم. همان‌طور که اشاره شد، مقادیر تابع شمارنده اول $\#\{qn + a \leq x\}$ ، تقریباً برابر با تعداد اعداد صحیح a تا q است که عامل مشترکی با q ندارند. در واقع دیدیم وقتی که $x \rightarrow \infty$ نسبت هر دوی آنها به ۱ میل می‌کند. این بیان می‌کند که

$$\frac{\#\{qn + a \leq x\}}{\pi(x)/\phi(q)} \rightarrow 1,$$

وقتی که $x \rightarrow \infty$ ، که در آن همان‌طور که قبلاً بیان شد $\pi(x) = \#\{x \leq \text{اعداد اول}\}$ و $\phi(q)$ تعداد اعداد صحیح a تا q است به‌طوری که $\gcd(a, q) = 1$. دیدیم طبیعی است که نسبت تفاضل آن‌ها را بر $\sqrt{x}/\ln x$ نگاه کنیم، بنابراین تعریف می‌کنیم

$$\text{Error}(x; q, a) = \frac{\#\{qn + a \leq x\} - \pi(x)/\phi(q)}{\sqrt{x}/\ln x}.$$

روبنشتاین و سرناک پیشنهاد دادند برای این‌که مسابقه اعداد اول بین $a(\bmod q)$ و $b(\bmod q)$ را به درستی بررسی و مطالعه کنیم، باید به توزیع مقادیر زوج مرتب

$$(\text{Error}(x; q, a), \text{Error}(x; q, b)),$$

نگاه کنیم، که در آن x تغییر می‌کند، این توزیع مجدداً با توجه به اندازه لگاریتمی تعریف می‌شود. به‌طور دقیق‌تر برای اعداد حقیقی داده شده $\alpha < \beta$ و $\alpha' < \beta'$ ، ممکن است پرسیده شود هر یک از حالت‌های $\alpha \leq \text{Error}(x; q, a) \leq \beta$ و یا $\alpha' \leq \text{Error}(x; q, b) \leq \beta'$ هر چند وقت یکبار رخ می‌دهد. این نوسان بوسیله حد انتگرال زیر تعریف شده است

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln Y} \int_{\substack{\alpha \leq y \leq Y \\ \text{Error}(y; q, a) \in [\alpha, \beta] \\ \text{Error}(y; q, b) \in [\alpha', \beta']}} \frac{dy}{y},$$

(حدی که وجود آن را ثابت کردند). روبنشتاین و سرناک نشان دادند که اگر a و b هر دو مربعی یا هر دو نامربعی به پیمانه q باشند، در این صورت این توزیع متقارن است، به این معنی که

$$\alpha \leq \text{Error}(x; q, a) \leq \beta, \quad \alpha' \leq \text{Error}(x; q, b) \leq \beta'$$

به دفعاتی اتفاق می‌افتد که

$$\alpha' \leq \text{Error}(x; q, a) \leq \beta', \quad \alpha \leq \text{Error}(x; q, b) \leq \beta.$$

به عبارت دیگر، هیچ نشانه‌ای از سوگیری در هیچ‌کدام از حالت‌ها، به هیچ‌وجه وجود ندارد: دنباله‌های حسابی $a(\bmod q)$ و $b(\bmod q)$ در حد قابل تعویض هستند. این به‌طور کلی‌تر مورد مطالعه قرار گرفت. برای مثال، ممکن است درباره ترتیب بیست و چهار حالت ممکن در چهار مسابقه اعداد اول به پیمانه ۸ پرسیده شود

$$\#\{\text{primes } \wedge n + 1 \leq x\}, \quad \#\{\text{primes } \wedge n + 3 \leq x\},$$

$$\#\{\wedge n + 5 \leq x\}, \quad \#\{\wedge n + 7 \leq x\}.$$

روبنشتاین و سرناک نشان دادند هر یک از حالت‌های ممکن برای بی‌نهایت مقادیر x اتفاق می‌افتد، در واقع هر حالت ممکن، نسبت مثبتی از مواقع اتفاق می‌افتد (در اندازه لگاریتمی). این می‌تواند به همه پیمانه‌های q و به هر تعداد دنباله‌های حسابی مجزا $a_1, a_2, \dots, a_r \pmod{q}$ تعمیم داده شود. به این معنا که می‌توان توزیع‌های زیر را بررسی کرد

$$(\text{Error}(x; q, a_1), \text{Error}(x; q, a_2), \dots, \text{Error}(x; q, a_r)).$$

آنها فقط با در نظر گرفتن حدس ریمان تعمیم‌یافته، ثابت کردند که تابع توزیع^{۳۰} برای این بردار خطا وجود دارد. همچنین با فرض مستقل خطی بودن γ ‌های مربوطه از اعداد گویا، ثابت کردند که برای $a_1, \dots, a_r \pmod{q}$ مجزا، که هیچ‌کدام عامل مشترکی با q ندارد، ترتیب

$$\#\{qn + a_1 \leq x\} < \#\{qn + a_2 \leq x\} < \dots < \#\{qn + a_r \leq x\},$$

برای نسبت مثبتی (در اندازه لگاریتمی) از مقادیر x اتفاق می‌افتد. آنها همچنین ثابت کردند برای هر ثابت r ، با بزرگ‌تر شدن q ، این نسبت به‌طور فزاینده‌ای به $\frac{1}{r!}$ نزدیک می‌شود. بسیار بعید به نظر می‌رسد که این نسبت دقیقاً $\frac{1}{r!}$ باشد، ولی با این حال نمی‌توان ثابت کرد که هست یا نیست، به‌جز با در نظر گرفتن شرایط و موقعیت خاص.

قبلاً دیدیم که تابع توزیع متقارن است در صورتی که مسابقه شامل دو دنباله باشد و هر دو مربع و یا هر دو غیرمربع به پیمانه q باشند. با کمال تعجب، روبنشتاین و سرناک نشان دادند که تنها یک وضعیت دیگر نیز وجود دارد که در آن تابع توزیع متقارن است، مهم نیست چطور متغیرها را با یکدیگر عوض کنیم، یعنی، مسابقه بین سه دنباله حسابی به شکل

$$a \pmod{q}, a\omega \pmod{q}, a\omega^2 \pmod{q},$$

که در آن $\omega \equiv 1 \pmod{q}$ ولی $\omega \not\equiv 1 \pmod{q}$. با این حال، نتیجه روبنشتاین و سرناک مبنی بر این‌که تابع توزیع معمولاً متقارن نیست، هنوز این امکان وجود دارد که هر ترتیبی در یک مسابقه با همان نوسان رخ دهد^{۳۱}.

در بحث هیستوگرام شانکس مقدار $\text{Error}(x; 4, 3) - \text{Error}(x; 4, 1)$ برای مقادیر متفاوت x ، حدس زدیم که «هیستوگرام چیزی بیشتر و بیشتر شبیه منحنی زنگوله‌ای شکل، با مرکزیت ۱ است». شاید یکی از پیامدهای شگفت‌آور کار روبنشتاین و سارناک این است که این واضح‌ترین حدس، درست نیست: با وجود این‌که یک تابع توزیع وجود دارد ولی به سادگی و ظرافت منحنی زنگوله‌ای «توزیع نرمال» کلاسیک نیست.

۴. در حال حاضر چه تحقیقات و کارهای پژوهشی انجام می‌شود؟

بعد از نتایج بسیار عالی (و در آن زمان، بسیار شگفت‌انگیز) لیتلود در سال ۱۹۱۴، تا دهه پنجاه و شصت وقفه‌ای در تحقیقات «نظریه مقایسه‌ای اعداد اول» رخ داد. در آن زمان، ایده‌های لیتلود در چندین حوزه نظری توسعه و گسترش داده شده بود که می‌توان گفت به‌طور مستقیم توسط کارهای لیتلود و محاسبات قابل ملاحظه شانکس، هادسون و دیگران پیشنهاد شده بود. تا دهه نود، به نظر می‌رسید که بیشتر کارهایی که می‌توان در این زمینه انجام داد، انجام شده بود (و هرگز نمی‌توان کار بیشتری انجام داد)، گرچه کاپوروفسکی^{۳۲} در آن زمان هنوز نتایج جدیدی را ثابت می‌کرد.

در سال ۱۹۹۳، جولیانا داویدوف^{۳۳} در کالج Mount Holyoke، درس نظریه تحلیلی اعداد را برای دانشجویان سال آخر دوره کارشناسی تدریس می‌کرد. وی با دیدن چندین دانشجوی علاقمند، تصمیم گرفت که یک «تجربه تحقیقاتی برای دانشجویان کارشناسی» (REU)، در ترم تابستان اجرا کند و مساله مربوط به مسابقات اعداد اول را به دانشجویان پیشنهاد دهد. وی

^{۳۰} با حد مشخصی از انتگرال‌ها تعریف می‌شود، مشابه حد چند خط قبل.
^{۳۱} برای مثال، یک تابع می‌تواند نیمی از زمان را بدون متقارن بودن مثبت باشد.

^{۳۲}Kaczorowski ^{۳۳}Giuliana Davidoff

همراه با دانشجویانش به نام کارولین اوسوفسکی، جنیفر واندن آندن، یی وانگ و نانسی وینکل، محاسبات مهم و قابل توجهی انجام داد و نتایجی را اثبات کرد که در بخش ۵ به آنها اشاره خواهیم کرد.

به طور اتفاقی، داویدوف در تعطیلات تابستانی با سرناک دیدار کرد. وی پروژه (REU) خود را شرح داد و چگونگی توسعه رویکرد محاسباتی استارک^{۳۴} را برای چنین مسائلی توضیح داد. سرناک در ایمیلی به نویسنده اول این مقاله (Andrew Granville) نوشت: «من با این ویژگی سوگیری چبیشف آشنایی نداشتم و مجذوب آن شدم. بخصوص علاقه زیادی به پیدا کردن عدد مشخصی که $\pi(x)$ بر $Li(x)$ پیشی گیرد، دارم».

سرناک ادامه داد: «وقتی به پرینستون برگشتم با فرناندو^{۳۵} در این مورد گفتگو کردم ... و شروع به کار کردن در این زمینه کردم ... واضح بود که صفرهای زیادی باید محاسبه شوند». سرناک قبلاً درباره سوالات دیگری راجع به توزیع اعداد اول با دانشجوی ممتاز دوره کارشناسی به نام مایک روبنشتاین بحث و تبادل نظر کرده بود. «مایک، که به دنبال موضوع پایان نامه ارشد بود، به شدت درگیر این موضوع شد و پس از مدتی کار من با وی روی این مساله و همکاریمان، منجر به مقاله فعلی شد.» این یک پایان نامه ارشد کاملاً خارق العاده و شگفت انگیز بود، چرا که یکی از تاثیرگذارترین مقالات اخیر در نظریه تحلیلی اعداد بود. متعاقباً روبنشتاین مدرک دکتری خود را گرفت و به یکی از محققان و پیشگامان برجسته دنیا در زمینه محاسبات جنبه های متفاوت تابع زتا تبدیل شد.

اندکی پس از آن، نویسنده دوم این نوشته (Greg Martin)، مقاله روبنشتاین و سرناک را مطالعه کرد و علاقه مند به تعیین احتمال برنده شدن در مسابقه سه دسته از اعداد اول شد که روبنشتاین و سرناک در کارهایشان به آن اشاره نکرده بودند. برای مثال، مسابقه بین سه شرکت کننده:

$$\#\{n \leq x : n \equiv 3 \pmod{4}\}, \quad \#\{n \leq x : n \equiv 5 \pmod{4}\}, \quad \#\{n \leq x : n \equiv 7 \pmod{4}\}.$$

توجه داشته باشید که این دنباله های حسابی هیچ کدام شامل مربع نیستند. وی با همکاری آندری فورگر^{۳۶} در دانشگاه تورنتو، روش و تکنیکی را برای تعیین نوسانات برای ترتیب مختلف مسابقه دهندگان در مسابقه اعداد اول با بیش از دو شرکت کننده ایجاد کردند. به طور غیرمنتظره ای، آنها دریافتند که شش حالت برای سه شرکت کننده در مسابقه ای که ذکر شد، لزوماً هر یک در یک ششم مواقع اتفاق نمی افتد. در واقع

$$\#\{n \leq x : n \equiv 3 \pmod{4}\} > \#\{n \leq x : n \equiv 5 \pmod{4}\} > \#\{n \leq x : n \equiv 7 \pmod{4}\}$$

به طور تقریبی برای ۱۹/۲۸۰٪ اعداد صحیح x (در اندازه لگاریتمی) اتفاق می افتد، در حالی که

$$\#\{n \leq x : n \equiv 5 \pmod{4}\} > \#\{n \leq x : n \equiv 3 \pmod{4}\} > \#\{n \leq x : n \equiv 7 \pmod{4}\}$$

به طور تقریبی برای ۱۴/۰۷۷۲٪ اعداد صحیح x (تحت فرضیات مناسب) اتفاق می افتد. این بسیار عجیب است، در مسابقه بین اعداد اول به شکل $n+3$ و اعداد اول به شکل $n+5$ ، هر دو شرکت کننده نیمی از زمان، پیشتاز هستند، با این حال اگر ما فقط به مقادیر x نگاه کنیم، هر دو شرکت کننده از اعداد اول به شکل $n+7$ جلوترند، پس به احتمال زیاد اعداد اول $n+3$ ، جلوتر هستند.

۱.۴. مسابقات مرموز و مبهم بیشتر. مشارکت نویسنده اول این مقاله، ناشی از دعوت برای سخنرانی در جلسه^{۳۷} IrMAA در مونتگومری، آلاباما، در سال ۲۰۰۱ بود که بهانه ای برای خواندن این موضوع جذاب به او داد. بحث و موضوع بعدی با دانشجویان منجر به ایجاد یک گروه تحقیقاتی تابستانی^{۳۸} VIGRE در سال ۲۰۰۰ - ۲۰۰۱ در دانشگاه جورجیا

³⁴Stark ³⁵Fernando ³⁶Andrey Feuerverger ³⁷MAA meetings - Mathematical Association of America ³⁸Vertical Integration of Research and Education in the Mathematical Sciences

شد، تا سولاتی مشابهی درباره «مسابقه اعداد اول دوقلو» را بررسی کنند؛ مسابقه‌هایی که بررسی می‌کنند چه تعداد جفت از اعداد اول اختلاف آنها، دو، چهار، شش یا هر عدد زوج ثابت دیگر است. در بخش ۵، ما برخی از کارهای پژوهشی گروهی از دانشجویان جورجیا که داده‌های بیشتری را بررسی کردند و سعی در پیش‌بینی چنین مسابقاتی را داشتند، ارائه می‌دهیم.

نتایج شناخته شده‌ای وجود دارد که اعداد اول با ویژگی مشخصی داری رفتار یکسانی هستند. برای مثال، چه زمانی ۲ یک مکعب به پیمانه عدد اول p است؟ به راحتی می‌توان فهمید که این مورد برای همه اعداد اول به شکل $3n + 2$ است، بنابراین ما روی اعداد اول دیگر تمرکز می‌کنیم. مشخص شده است که به‌طور مجانبی، ۲ یک مکعب برای یک سوم اعداد اول به شکل $3n + 1$ است. بنابراین می‌پرسیم که آیا، به‌طور معمول، کمی بیشتر یا کمی کم‌تر از یک سوم اعداد اول به شکل $p = 3n + 1$ این ویژگی را دارند که ۲ یک مکعب به پیمانه p است.

ناتان نگ^{۴۰} ۳۹ در رساله‌ی دکترای اخیر خود در دانشگاه بریتیش کلمبیا، اشاره کرد که می‌توان با استفاده از تکنیک‌هایی مشابه روبنشتاین و سرناک به این سوال پاسخ داد، زیرا شمارش چنین اعداد اولی به روش مشابهی بر روی صفرهای نوعی از تابع L (L -function) بستگی دارد. در واقع، نگ مشاهده کرد که چنین نتایجی را می‌توان به حالت‌های زیادی تعمیم داد که ما رفتارهای (مجانبی) از مجموعه‌ای از اعداد اول می‌دانیم که می‌تواند توسط نظریه گالوا توصیف شود^{۴۱}. نگ مثال زیبای زیر را از کار خود ارائه کرد. سری توانی مانند

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n,$$

که به‌طور مکرر در هندسه حسابی ظاهر می‌شود: این یک مثال از فرم ماژولار است و همه نوع ویژگی‌های به ظاهر معجزه‌آسا را دارد (کتاب سری^{۴۲} را ببینید [۲۳]). یک معجزه و شگفتی از این دست، این است که برای هر عدد اول p مقدار a_p ، ۲، ۰ یا -1 است که نسبت هر کدام به ترتیب حدود $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ است. تحت فرضیات مناسب، نگ نشان داد، در اندازه لگاریتمی،

$$\#\{p \leq x, a_p = 0\} > \#\{p \leq x, a_p = 2\} \approx 98.3\% \text{ x مقادیر } x,$$

$$\#\{p \leq x, a_p = 0\} > \#\{p \leq x, a_p = -1\} \approx 72.46\% \text{ x مقادیر } x,$$

و

$$\#\{p \leq x, a_p = -1\} > \#\{p \leq x, a_p = 2\} \approx 95.7\% \text{ x مقادیر } x.$$

چندین سوال طبیعی دیگر نیز در مورد مسابقات اعداد اول وجود دارد که موضوع تحقیق در طی چند سال اخیر بوده است.

۲.۴. پیشتازی و جلو افتادن می‌تواند زمان زیادی طول بکشد. اگر چه در مسابقه به پیمانه ۴، تیم ۱ گاهی اوقات جلو می‌افتد، مدت زیادی طول می‌کشد تا این اتفاق بیفتد. برای مثال، x بزرگ‌تر از 25000 اولین باری است که تیم یک جلو می‌افتد، آن هم برای لحظه‌ی کوتاه، نخستین باری که تیم ۱ برتری خود را در بازه نسبتاً بزرگ‌تری حفظ می‌کند در حوالی x بزرگ‌تر از نیم میلیون اتفاق می‌افتد. به‌طور مشابه، در مسابقه به پیمانه ۳، زمانی که x در حوالی نیم تریلیون است، تیم ۱ جلو می‌افتد. در مسابقه $\pi(x)$ در مقابل $Li(x)$ ، ما هنوز به‌طور دقیق نمی‌دانیم چه زمانی $\pi(x)$ برای اولین بار جلو می‌افتد (و برتری را از $Li(x)$ می‌قايد)، اگر چه به‌طور قطع جواب عددی غول‌آسا است.

یک موقعیت دیگر این است که یک تیم در معرض تیم‌های دیگر قرار دارد. برای نمونه، دیدیم که اعداد اول به شکل $8n + 1$ به کندی حرکت می‌کنند و از اعداد اول به شکل $8n + 3$ ، $8n + 5$ و $8n + 7$ عقب افتادند (زیرا همه مربع‌های فرد،

^{۴۰}ناتان نگ اکنون دانشیار دانشگاه اوتاوا است.

^{۴۱}توابع L مورد بحث در اینجا توابع L آرتین هستند.

از جمله مربع اعداد اول به شکل $8n + 1$ هستند و بار سنگینی بر دوش تیم ۱ است). در حقیقت، اولین باری که تیم یک از مکان قبلی خود (تیم آخری) خارج می‌شود، بیش از نیم میلیارد است یعنی $588,067,889$ $x =$ اولین باری است که تعداد اعداد اول به شکل $8n + 1$ بیشتر از اعداد اول به شکل $8n + 5$ هستند. علاوه بر این، x تقریباً $10^{14} \times 1/9282$ است که اعداد اول به شکل $8n + 1$ از اعداد اول به شکل $8n + 7$ پیشی می‌گیرند. کاپوروفسکی و به‌طور مستقل، روبنشتاین و سرناک نشان دادند برای نسبت مثبتی از مقادیر x ، در این مسابقه چهار تیمی، تیم ۱ پیشتاز می‌شود، با این حال اولین باری که این اتفاق می‌افتد فراتر از عدد بزرگ 10^{28} است.

چرا مدت زمان زیادی طول می‌کشد تا بعضی از تیم‌ها به برتری برسند؟ برای درک این موضوع باید اصطلاحات مهم در فرمول‌هایی مانند (۱.۲) را بررسی کنیم، یعنی اصطلاح "۱" و جمع‌وندهای نخست، که برای آنها γ مقدار کوچکی است. اگر کمی با دقت به فرمول (۱.۲) نگاه کنیم، می‌بینیم که این چند جمع‌وند نخست که متناظر با صفرهای نابديهی تابع زتای ریمان هستند، نزدیک محور حقیقی هستند، مقادیر γ به‌طور تقریبی برابر $1/4$ ، سپس $21/02$ ، $25/01$ ، $30/42$ و ... است. به ویژه، به‌صورت قدرمطلق مقدار همه این جمع‌وندها کمتر از $1/4$ است، که نسبت به عبارت "۱" کوچک است. حتی اگر بتوانیم مقدار x را برای تعدادی از جمله‌های اولیه $\sin(\gamma \ln x)$ بیابیم که نزدیک -1 باشند، حداقل باید بیست و یک جمله نخست جمع به اندازه کافی منفی باشند تا اصطلاح اولیه "۱" را جبران کند. بنابراین مقادیر x باید ویژه و خاص باشند به‌طوری که تعدادی از جملات $\sin(\gamma \ln x)$ به‌طور همزمان به -1 نزدیک باشند.

اگر به مسابقه به پیمان q دقت کنیم، با بزرگ‌تر شدن q ، معلوم می‌شود که مقادیر γ مربوط، کوچک‌تر می‌شوند (به این معنا که، صفرهای تابع L دیریکله مناسب به محور حقیقی نزدیک می‌شوند). در نتیجه، تغییرات در برتری زودتر و به تعداد دفعات بیشتری رخ می‌دهد. با این حال، مقادیر بسیار کوچک γ ، با مسائل خاص خودش همراه است، به‌عنوان مثال، وقتی $q = 165$ ، مجموع مربوطه دارای γ بسیار کوچکی است، یعنی $\gamma \approx 0.2029$. این جمع‌وند تأثیر زیادی در جواب نهایی دارد چرا که مخرج آن بسیار کوچک است. اولین باری که $\sin(\gamma \ln x)$ به -1 نزدیک می‌شود، زمانی اتفاق می‌افتد که $\gamma \ln x$ به $3\pi/2$ نزدیک می‌شود، که مقدار x متناظر با آن در حدود دوازده میلیارد است! و اگر x بخاطر سایر جمله‌ها موثر نباشد و کار نکند، در این صورت مقدار بعدی زمانی است که $\gamma \ln x$ حدود $7\pi/2$ است که متناظر با آن $x \approx 3.43 \times 10^{23}$ است. جای تعجب نیست اگر پیش‌بینی نتایج مدتی طول می‌کشد.

۳.۴. به اشتراک گذاشتن برتری. در یک مسابقه بین دو شرکت‌کننده که مدام از یکدیگر پیشی می‌گیرند، لحظات زیادی وجود خواهد داشت که مسابقه گره خورده و دو شرکت‌کننده مساوی می‌شوند. دلیل: زیرا مقادیر به دلخواه بزرگ x وجود دارد به‌طوری که

$$\#\{qn + a \leq x\} > \#\{qn + b \leq x\},$$

همچنین مقادیر به دلخواه بزرگ به‌طوری که

$$\#\{qn + a \leq x\} < \#\{qn + b \leq x\},$$

و از آنجایی که این توابع شمارش، فقط اعداد صحیح را اختیار می‌کنند، بنابراین باید بی‌نهایت عدد صحیح x وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\#\{qn + a \leq x\} = \#\{qn + b \leq x\}.$$

در مورد مسابقاتی با سه شرکت‌کننده یا بیشتر چطور؟ حتی اگر هر یک از شرکت‌کنندگان در مقطعی پیشتاز باشند، به نظر می‌رسد دلیل خاصی برای تساوی هر سه آنها در مقطعی از مسابقه وجود نداشته باشد. بنابراین این سوال را می‌پرسیم: آیا تعداد نامتناهی عدد صحیح x وجود دارد به طوری که تساوی‌های زیر برقرار باشند؟

$$\#\{qn + a \leq x\} = \#\{qn + b \leq x\} = \#\{qn + c \leq x\}.$$

فورورگر و مارتین حدس زدند که در یک مسابقه به پیمانه q بین سه تیم، تعداد نامتناهی از این مساوی‌ها وجود دارد، ولی نه در یک مسابقه به پیمانه q با چهار تیم یا بیشتر. استدلال قانع‌کننده آن‌ها به شرح زیر است: بردار $(k-1)$ -بعدی در نظر بگیرید که مولفه i ام آن تفاضل

$$\#\{qn + a_i \leq x\} - \#\{qn + a_{i+1} \leq x\} \quad (۱.۴)$$

برای $i = 1, 2, \dots, k-1$ است. توجه داشته باشید که k تابع شمارش $\#\{qn + a_i \leq x\}$ دقیقاً با هم مساوی هستند اگر بردار $(k-1)$ -بعدی برابر با $(0, 0, \dots, 0)$ باشد. با افزایش x ، هر زمان که x عدد اولی متعلق به دنباله‌های حسابی که ما در حال شمارش آن هستیم، باشد، بردار تغییر می‌کند، تغییرات با اضافه کردن یکی از بردارهای زیر اعمال می‌شود

$$(۲.۴) \quad (1, 0, \dots, 0), (-1, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, -1),$$

بستگی به این دارد که آیا عدد اول به ترتیب به شکل $qn + a_1$ یا $qn + a_2$ یا $\dots$ یا $qn + a_k$ است. قضیه اعداد اول برای دنباله‌های حسابی به ما می‌گوید که احتمال اتفاق افتادن هر یک از این بردارها تقریباً مساوی است. از این رو فورورگر و مارتین پیشنهاد دادند که بردار $(k-1)$ -بعدی در (۱.۴) را می‌توان با استفاده از «گام تصادفی» به بردارهای $(k-1)$ -بعدی ایجاد شده در (۲.۴)، مدل‌سازی کرد. اکنون مشخص شده است که با احتمال یک، یک گام تصادفی روی بردارهای شبکه یک یا دو بعدی اغلب نامتناهی بار به مبدا (در واقع، از هر نقطه شبکه بازدید خواهد کرد) باز می‌گردد، اما یک گام تصادفی روی بردارهای شبکه سه بعدی یا بیشتر فقط تعداد متناهی بار به مبدا باز می‌گردد. این منبع حدس فورورگر و مارتین است، زیرا شبکه‌های یک و دو بعدی در این مدل به ترتیب متناظر با مسابقه اعداد اول با دو و سه شرکت‌کننده می‌باشند.

۴.۴. تقارن‌های خاص. با در نظر گرفتن فرضیه ریمان تعمیم‌یافته، فورورگر و مارتین ثابت کردند ترتیب

$$\#\{qn + a_1 \leq x\} < \#\{qn + a_2 \leq x\} < \dots < \#\{qn + a_r \leq x\},$$

(تحت شرایط زیر) اغلب به همان دفعات ترتیب زیر اتفاق می‌افتد

$$\#\{qn + b_1 \leq x\} < \#\{qn + b_2 \leq x\} < \dots < \#\{qn + b_r \leq x\},$$

تحت شرایط زیر:

- a_i ها و b_i ها به پیمانه q معکوس یکدیگرند، یعنی برای هر i داریم $a_i b_i \equiv 1 \pmod{q}$.
- لیست b_i ها درست در جهت عکس لیست a_i ها است (یعنی برای هر i ، $b_i = a_{r+1-i}$) و هر دو یا مربع و یا غیرمربع به پیمانه q هستند.

• برای هر i ، عدد صحیح m وجود دارد به طوری که $a_i \equiv mb_i \pmod{q}$ ، به علاوه، یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد: a_i ها همه مربع به پیمانه q هستند و یا برای هر i ، دو عدد a_i و b_i هر دو یا مربعی به پیمانه q و یا نامربعی به پیمانه q هستند.

احتمالا ترتیب‌بندی‌ها با نوسان‌های متفاوتی ظاهر می‌شوند در صورتی که با چنین نمونه‌ای از تقارن‌های خاص در ارتباط نباشند.

۵.۴. و اگر فرضیه ریمان نادرست باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر فرضیه ریمان تعمیم‌یافته نادرست باشد، اثبات این‌که $\#\{x \leq x : \text{اعداد اول } qn + a\} > \#\{x \leq x : \text{اعداد اول } qn + b\}$ برای یک نسبت مثبتی^{۴۳} از x ، آسان‌تر است، زیرا جمله‌ی "۱" در فرمول مشابه (۱.۲) بی‌ربط و غیرضروری به نظر می‌رسد و این همان چیزی بود که باعث سوگیری شد وقتی فرضیه تعمیم‌یافته ریمان را فرض کردیم. با این حال، این‌که آیا کسی می‌تواند ثابت کند که این اتفاق در ۵۰٪ موارد رخ می‌دهد، هنوز جای تردید دارد. اگر کسی بتواند این را تحت فرض نادرستی فرضیه ریمان تعمیم‌یافته اثبات کند، در این صورت ما یک اثبات بدون قید و شرط داریم که مسابقه به پیمانه q بین دو مربع یا غیرمربع همیشه یکنواخت است (با تلفیق چنین اثباتی با کارهای روبنشتاین و سرناک).

در صورتی که فرضیه ریمان تعمیم‌یافته برقرار نباشد، رفتار مسابقات اعداد اول ممکن است بسیار متفاوت باشد. در سال ۲۰۰۱، فورد^{۴۴} و کنیاگین^{۴۵} اثبات کردند که اگر فرضیه ریمان تعمیم‌یافته نادرست باشد - و در حالتی بسیار راحت که می‌تواند رخ دهد - آنگاه برخی ترتیب‌های توابع شمارش اعداد اول وجود دارد که هرگز رخ نمی‌دهد. برای توصیف یکی از ساختارهای آن‌ها، لازم است درباره تعمیمی از تابع زتای ریمان بحث کنیم. تابع χ را برای هر عدد صحیح m چنین تعریف می‌کنیم:

$$\chi(5m) = 0, \quad \chi(5m \pm 1) = \pm 1, \quad \chi(5m \pm 2) = \pm i,$$

و فرض کنید $L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$ (این یک نمونه دیگر از L - تابع دیریکله است). فرض کنید که فرضیه ریمان تعمیم‌یافته درست است به استثنای این‌که تابع $L(s, \chi)$ داری یک صفر منفرد $\sigma + i\gamma$ است که $\sigma > 1/2$ و $\gamma \geq 0$ و همچنین $L(s, \chi)$ یک صفر در $\sigma - i\gamma$ دارد (صفرها همیشه به صورت مزدوج هستند). مشابه فرمول (۱.۲) داریم

$$\frac{\#\{\Delta n + a : \text{اعداد اول } \leq x\} - \frac{1}{4}\pi(x)}{x^\sigma / \ln x} \approx -2 \operatorname{Re} \left(\chi(a) \frac{\cos(\gamma \log x) + i \sin(\gamma \log x)}{\sigma + i\gamma} \right),$$

^{۴۳} در اندازه لگاریتمی

^{۴۴}Ford ^{۴۵}Konyagin

که در آن $۰.۱ \leq a \leq ۴$. اگر این را به طور صریح حل کنیم، می‌بینیم که

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\sigma^2 + \gamma^2) \frac{\#\{\omega n + 1 \leq x\} - \frac{1}{4}\pi(x)}{x^\sigma / \ln x} &\approx -\sigma \cos(\gamma \ln x) - \gamma \sin(\gamma \ln x), \\ \frac{1}{4}(\sigma^2 + \gamma^2) \frac{\#\{\omega n + 2 \leq x\} - \frac{1}{4}\pi(x)}{x^\sigma / \ln x} &\approx \sigma \sin(\gamma \ln x) - \gamma \cos(\gamma \ln x), \\ \frac{1}{4}(\sigma^2 + \gamma^2) \frac{\#\{\omega n + 3 \leq x\} - \frac{1}{4}\pi(x)}{x^\sigma / \ln x} &\approx -\sigma \sin(\gamma \ln x) + \gamma \cos(\gamma \ln x), \\ \frac{1}{4}(\sigma^2 + \gamma^2) \frac{\#\{\omega n + 4 \leq x\} - \frac{1}{4}\pi(x)}{x^\sigma / \ln x} &\approx \sigma \cos(\gamma \ln x) + \gamma \sin(\gamma \ln x), \end{aligned}$$

به‌طور شگفت‌انگیزی این نشان می‌دهد که ترتیب‌بندی زیر، وقتی که x به اندازه کافی بزرگ باشد، نمی‌تواند اتفاق بیفتد!

$$\begin{aligned} \#\{\omega n + 3 \leq x\} &< \#\{\omega n + 2 \leq x\} \\ &< \#\{\omega n + 4 \leq x\} < \#\{\omega n + 1 \leq x\} \end{aligned}$$

چرا؟ اولین نامساوی ایجاب می‌کند که

$$-\sigma \sin(\gamma \ln x) + \gamma \cos(\gamma \ln x) \lesssim \sigma \sin(\gamma \ln x) - \gamma \cos(\gamma \ln x),$$

یا هم‌ارز آن

$$0 \lesssim \sigma \sin(\gamma \ln x) - \gamma \cos(\gamma \ln x),$$

که در آن نماد $\lesssim$ به این معنی است که نامساوی با یک جمله خطایی برقرار است که وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند، حد جمله خطا صفر است. به‌طور مشابه نامساوی سوم تاکید می‌کند که $0 \lesssim \sigma \cos(\gamma \ln x) + \gamma \sin(\gamma \ln x)$. بنابراین در ترتیب‌بندی، نامساوی سوم معادل این است که

$$0 \lesssim \sigma \sin(\gamma \ln x) - \gamma \cos(\gamma \ln x) \lesssim \sigma \cos(\gamma \ln x) + \gamma \sin(\gamma \ln x) \lesssim 0,$$

که این بیان می‌کند

$$\sigma \sin(\gamma \ln x) - \gamma \cos(\gamma \ln x) \approx 0,$$

و

$$\sigma \cos(\gamma \ln x) + \gamma \sin(\gamma \ln x) \approx 0.$$

با این حال، با ضرب کردن در $\sin(\gamma \ln x)$ و $\cos(\gamma \ln x)$ به‌ترتیب، نتیجه می‌شود که

$$\sigma \sin^2(\gamma \ln x) - \gamma \cos(\gamma \ln x) \sin(\gamma \ln x) \approx 0,$$

و

$$\sigma \cos^2(\gamma \ln x) + \gamma \cos(\gamma \ln x) \sin(\gamma \ln x) \approx 0.$$

با ترکیب این دو با هم داریم

$$\sigma = \sigma \sin^2(\gamma \ln x) + \sigma \cos^2(\gamma \ln x) \approx 0,$$

که این تناقض است، زیرا وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند، σ به صفر میل می‌کند در حالی که $\sigma > 1/2$!

فورد و کنیگین موارد بیشتری را ثابت کردند. برای هر سه دنباله حسابی به پیمانه q یک حالت ممکن (اما به همان نسبت غیرمحمول) برای در نظر گرفتن صفرهای L -تابع دیریکله مناسب با نقض فرضیه ریمان تعمیم یافته وجود دارد که باعث می شود یکی از شش حالت ترتیب این سه دنباله حسابی، فراتر از یک مقدار مشخص x رخ ندهد. علاوه بر این، در این ترتیب بندی صفرها می توانند به طور دلخواه دور از محور حقیقی قرار بگیرند، که این به این معنی است که برای رد چنین احتمالی هیچ راهی با استفاده از محاسبات متناهی وجود ندارد. به نظر می رسد که روش آنها را می توان توسعه داد تا نشان دهد که در برخی مسابقات بین فقط دو دنباله حسابی، از نقطه ای به بعد با همان برتری و جلو بودن ادامه پیدا می کند، مشروط بر این که تناقض دیگری با فرضیه تعمیم یافته ریمان وجود داشته باشد، که از نظر فنی امکان پذیر اما نسبتاً بعید به نظر می رسد. به طور خلاصه، نتایج آنها نشان می دهد که دستیابی به نتایج قطعی بدون بهره گیری از هیچ فرضیه اثبات نشده، بسیار دشوار خواهد بود.

۵. پروژه های تحقیقاتی برای مقطع کارشناسی

۱.۵. پروژه تحقیقاتی REU^{۴۶} در کالج The Mount Holyoke. این برنامه و پروژه تحقیقاتی توسط دانشجویانی به نام کارولین اوسوفسکی، جنیفر واندن آندن، یی وانگ و نانسی وینکل، تحت راهنمایی و هدایت جولیان داویدوف انجام شده است، که ایشان این تجربه را توصیف می کند:

در درس نظریه تحلیلی اعداد دانشجویان سال آخر کارشناسی، از دانشجویان خواسته بودم که اطلاعاتی درباره ی سوالات مختلف پیرامون حدسی که در ادامه قضیه مربوط به آن را بیان می کنیم، جمع آوری کنند و سپس نتایج خود را به همه ی کلاس گزارش دهند. با دیدن مثال های زیادی که در آن قضیه ها با شواهد اولیه تجربی مطابقت داشتند، از آنها خواستم تا داده های مربوط به مسابقه به پیمانه ۴ را جمع آوری کنند و سپس آنها را با قضیه لیتلود شگفت زده و غافل گیر کنم. سپس تصمیم گرفتیم مسابقه به پیمانه ۳، ۵، ۷ و ۱۱ را نیز بررسی کنیم. در حالت خاص، آیا تیم N شامل مجموعه اعداد اولی که همزهشت با مربع ها به پیمانه q نیستند، نسبت به تیم S که شامل مجموعه اعداد اول همزهشت با اعداد مربعی به پیمانه q است، اغلب پیشتر است. نتایج به دست آمده به طرز فریبنده ای از یک پیمانه به دیگر متفاوت بود، بنابراین تصمیم گرفتیم این موضوع را در برنامه REU تابستان آینده بررسی و مطالعه کنیم.

دانشجویان به جستجو و دنبال کردن مطالب مربوط به تاریخچه و مرور نوشتجات موجود مربوط به این مساله پرداختند و درخواستی را برای یک وبسایت نظریه اعداد ارسال کردند. در عرض چند روز پاسخ سخاوتمندانه ای از جانب اندرو اولدیزکو^{۴۷} دریافت کردیم، که در آن، جهت آگاهی ما، به کارهای مربوط به رابرت روملی^{۴۸} اشاره کرده بود. این نتایج باعث شد تا پروژه را با جدیت و علاقه بیشتری شروع کنیم.

در ادامه ما بیشتر مجذوب مقاله ای از هارولد استارک^{۴۹} در سال ۱۹۷۱ شدیم [۲۵]، که در آن وی روشی را برای مطالعه و بررسی مسابقات اعداد اول برای عددهای اول بین هر دو دنباله حسابی داده شده، پیشنهاد کرده بود. در آن زمان هیچ رویه کلی شناخته شده برای اثبات این که در مسابقه بین اعداد اول به شکل $qn + a$ و اعداد اول به شکل $qn + b$ ؛ که در آن a یک مربع به پیمانه q است و b نیست؛ هر تیم اغلب بی نهایت بار جلو می افتد، وجود نداشت. نتایج استارک مربوط به حالت اول است، که در کارهای قبلی لیتلود [۱۸]، ناپووسکی و تیوران [۱۶]، [۱۷]، پوشش داده نشده بود. همان طور که خودش اشاره کرد، نشان دادن این که $qn + a$ ، بی نهایت بار جلو می افتد، دشوار به نظر می رسد، حتی در حالت مسابقه بین اعداد اول به شکل $5n + 4$ و اعداد اول به شکل $5n + 2$.

⁴⁶Summer Research Experiences for Undergraduates ⁴⁷Andrew Odlyzko ⁴⁸Robert Rumely ⁴⁹Harold Stark

استارک مساله را برحسب دو تابع کمکی (مشابه فرمول (۱.۲))، عبارت‌های پیچیده‌ای هستند که بر حسب صفرهای L -توابع دیریکله داده شده‌اند) بازنویسی کرد، و با انجام این کار، یک زمینه زیبا آفرید که در آن با توجه به محاسبات عددی یک قضیه به دست آورد. این گونه بود که او توانست نشان دهد با فرض درستی فرضیه تعمیم‌یافته‌ی ریمان و برای x های به اندازه دلخواه بزرگ،

$$\#\{x \leq 5n+4 \text{ اعداد اول}\} > \#\{x \leq 5n+2 \text{ اعداد اول}\}$$

در حقیقت این را با فرضی ضعیف‌تر از تعمیم فرضیه ریمان ثابت کرد: تنها نیاز است که L -تابع دیریکله مرتبط با این مسابقه هیچ صفر حقیقی در بازه $(\frac{1}{5}, 1)$ نداشته باشد.

اعضای گروه REU با انجام یک مطالعه با جزئیات دقیق عددی از فرمول استارک (برای مسابقه به پیمانه ۵) شروع به کار کردند، به منظور درک این که عبارت‌های پیچیده او با تعداد واقعی اعداد اول چه تفاوتی دارند: دریافتیم که همبستگی و ارتباط بسیار خوبی وجود دارد، هر چند وقتی از صفرهای کم‌تری برای تقریب فرمول مشابه سمت راست (۱.۲) استفاده می‌کنیم، (همبستگی آن) کمی کمتر است.

با استفاده از نتایج استارک و محاسبات عددی خودمان، توانستیم نتیجه مورد انتظار را در اولین مواردی که توسط او بررسی و بحث نشده بود، ثابت کنیم [۶]:

قضیه ۱.۵. فرض کنید L -تابع دیریکله در بازه $(\frac{1}{5}, 1)$ صفر حقیقی نداشته باشد. برای $a = 1, 2, 4$ یا $a = 1$ (پیمانه مربعی ۷) و $b = 3, 5$ یا $b = 6$ (پیمانه نامربعی ۷) مقادیر به اندازه دلخواه بزرگ x وجود دارد به طوری که

$$\#\{x \leq 7n+a \text{ اعداد اول}\} > \#\{x \leq 7n+b \text{ اعداد اول}\}.$$

در واقع، یک ثابت مثبت c وجود دارد به طوری که برای مقادیر به دلخواه بزرگ x ، داریم

$$\#\{x \leq 7n+a \text{ اعداد اول}\} - \#\{x \leq 7n+b \text{ اعداد اول}\} > c\sqrt{x}/\log x.$$

اثبات قضیه بر مبنای محاسبات فرمول استارک با استفاده از جداول موجود از صفرهای L -تابع دیریکله است. شاید زمانی بتوانیم به پیش رویم و این سوال را درباره مسابقه‌ها با یک پیمانه‌ی اول حل و فصل کنیم. با این حال، سوالی که در آغاز ما را علاقه‌مند و مجذوب کرد، این بود که آیا تیم S برای x های به اندازه دلخواه بزرگ، پیشتازی و برتری خود را از تیم N پس می‌گیرد. برای مطالعه و بررسی این سوال ما باید فرمول استارک را به شیوه مناسبی اصلاح می‌کردیم و تغییر می‌دادیم: این بار دریافتیم که فرمول‌ها تنها شامل صفرهای L -تابع دیریکله

$$(1.5) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(n/q)}{n^s},$$

می‌باشند که در آن $(n/q) = 1$ در صورتی که n یک مربع به پیمانه q باشد و $(n/q) = 0$ اگر $q|n$ و $(n/q) = -1$ اگر n یک مربع به پیمانه q نباشد.

ما همبستگی و رابطه قابل توجه و چشم‌گیر یکسانی بین شمارش واقعی اعداد اول و تقریب‌مان پیدا کردیم. اگر تابستان (دوره تحقیق ما) تمام نشده بود، مطمئناً ثابت می‌کردیم که در مسابقه به پیمانه ۷ تغییرات برتری بی‌نهایت بار اتفاق می‌افتاد. بعدها موفق شدم این مساله را ادامه دهم و ثابت کنم که اگر شکل ضعیفی از فرضیه تعمیم‌یافته ریمان را بپذیریم، در مسابقه تیم S در مقابل تیم N تغییرات برتری بی‌نهایت بار اتفاق می‌افتد [۷]. تنها باید پذیرفت که هر صفر حقیقی از L -تابع دیریکله (۱.۵) در سمت چپ کوچک‌ترین کران بالای قسمت های حقیقی صفرهای مختلط قرار دارد (که این برقرار است، به خصوص وقتی که L -تابع دیریکله صفر حقیقی ندارد).

۲.۵. گروه تحقیقاتی VIGRE دانشگاه جورجیا. این گروه تحقیقاتی متشکل از دانشجویان به نام مایکل بک، زوبیر سینکر، برایان لاولر، اریک پین، پل پولاک، چارلز پو و مایکل گای (که ایشان در اینجا نتایج تحقیق را بیان می‌کنند)، است، همچنین جیم سولازو محقق فوق دکترا مربی و راهنمای این گروه است.

برای هر عدد زوج $2k$ ، بر این باوریم که تعداد نامتناهی عدد صحیح n وجود دارد به طوری که هر دو عدد n و $n + 2k$ اول‌اند. وقتی $2k = 2$ همان حدس معروف اعداد اول دوقلو است. در حال حاضر قادر نیستیم ثابت کنیم که بی‌نهایت «جفت عدد اول» n و $n + 2k$ برای هر مقدار $2k$ وجود دارد. با این حال ما می‌توانیم تعداد آنها را پیش‌بینی کنیم. حدس زیر درباره تعداد این جفت‌هاست که مربوط به کارهای هاردی و لیتلود است [۱۲]:

قضیه ۲.۵ (حدس هاردی-لیتلود). فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت باشد و فرض کنید $\pi_{2k}(x)$ برابر با تعداد جفت‌های اعداد اول $(p, p + 2k)$ باشد که در آن $p \leq x$. آنگاه

$$\pi_{2k}(x) \sim 2C_2 \prod_{p|k, p>2} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) \cdot \text{Li}_2(x),$$

که در آن

$$C_2 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$$

و

$$\text{Li}_2(x) = \int_2^x \frac{dx}{(\log x)^2}.$$

تصمیم گرفتیم این مساله را با جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل داده‌ها، بررسی کنیم. برنامه ما جفت‌های اعداد اول را با استفاده از غربال اراتستن اصلاح شده پیدا کرد و سپس آنها را شمارش کرد. برخی از داده‌های اولیه در جدول ۸ جمع‌آوری شده است.

جدول ۸. $\pi_{2k}(x)$ تعداد جفت‌های اعداد اول $(p, p + 2k)$ که در آن $p \leq x$

x	$\pi_2(X)$	$\pi_4(X)$	$\pi_6(X)$	$\pi_8(X)$	$\pi_{10}(X)$
10^3	۳۵	۴۱	۷۴	۳۸	۵۱
10^4	۲۰۵	۲۰۳	۴۱۱	۲۰۸	۲۷۰
10^5	۱۲۲۴	۱۲۱۶	۲۴۴۷	۱۲۶۰	۱۶۲۴
10^6	۸۱۶۹	۸۱۴۴	۱۶۳۸۶	۸۲۴۲	۱۰۹۳۴
10^7	۵۸۹۸۰	۵۸۶۲۲	۱۱۷۲۰۷	۵۸۵۹۵	۷۸۲۱۱
10^8	۴۴۰۳۱۲	۴۴۰۲۵۸	۸۷۹۹۰۸	۴۳۹۹۰۸	۵۸۶۸۱۱
10^9	۳۴۲۴۵۰۶	۳۴۲۴۶۸۰	۶۸۴۹۰۴۷	۳۴۲۶۱۲۴	۴۵۶۷۶۹۱
10^{10}	۲۷۴۱۲۶۷۹	۲۷۴۰۹۹۹۹	۵۴۸۱۸۲۹۶	۲۷۴۱۱۵۰۸	۳۶۵۴۸۸۳۹
10^{11}	۲۲۴۳۷۶۰۴۸	۲۲۴۳۷۳۱۶۱	۴۴۸۷۲۵۰۰۳	۲۲۴۳۶۵۳۳۴	۲۹۹۱۴۰۳۳۰
10^{12}	۱۸۷۰۵۸۵۲۲۰	۱۷۸۰۵۸۵۴۵۹	۳۷۴۱۲۱۷۴۹۸	۱۸۷۰۵۸۰۳۹۴	۲۴۹۴۰۵۶۶۰۱

توجه داشته باشید که شمارش برای $2k = 2$ و 8 بسیار نزدیک است. ما نمودار مربوط به داده‌های $2k \leq 30$ را رسم کردیم، متوجه شدیم که $\pi_{2k}(x)$ و $\pi_l(x)$ به هم نزدیک‌اند اگر عوامل اول $2k$ و $2l$ یکسان باشند. در واقع حدس هاردی و

لیتلوود پیش‌بینی می‌کند که در این موقعیت $\pi_{2k}(x) \sim \pi_{2l}(x)$ ، بنابراین ما احساس کردیم که مطالعه‌ی «مسابقه اعداد اول دوقلو» جالب خواهد بود.

اگر می‌خواهیم $\pi_2(x)$ و $\pi_6(x)$ را با هم مقایسه کنیم، بنابراین منطقی است که نرمال‌سازی دوباره‌ای انجام گیرد به‌طوری که پیش‌بینی هاردی و لیتلوود برای هر دو یکسان باشد. به عبارت دیگر، این حدس پیش‌بینی می‌کند که به‌طور تقریبی $\frac{\pi_6(x)}{\pi_2(x)}$ برابر با $\pi_2(x)$ است، بنابراین مقایسه این دو کمیت منطقی است. به‌طور کلی، تعریف می‌کنیم

$$\pi'_{2k}(x) = \pi_{2k}(x) \cdot \prod_{p|k, p>2} \left(\frac{p-2}{p-1} \right) \quad (k \geq 1), \quad \pi_{HL}(x) = 2 C_2 \cdot \text{Li}_2(x).$$

حدس هاردی و لیتلوود پیش‌بینی می‌کند که برای هر k ، $\pi'_{2k}(X) \sim \pi_{HL}(X)$ ، بنابراین ما اختلاف بین آنها را ارائه داده‌ایم (جدول ۲.۵):

جدول ۹. نرمال‌سازی مجدد مسابقه اعداد اول دوقلو

X	$\pi_{HL}(X)$	$\pi'_2 - \pi_{HL}$	$\pi'_4 - \pi_{HL}$	$\pi'_6 - \pi_{HL}$	$\pi'_8 - \pi_{HL}$	$\pi'_{10} - \pi_{HL}$
10^3	۴۵	-۱۰	-۴	-۸	-۷	-۷
10^4	۲۱۴	-۹	-۱۱	-۹	-۶	-۱۲
10^5	۱۲۴۸	-۲۴	-۳۲	-۲۵	۱۲	-۳۰
10^6	۸۲۴۸	-۷۹	-۱۰۴	-۵۵	-۶	-۴۸
10^7	۵۸۷۵۳	۲۲۷	-۱۳۱	-۱۵۰	-۱۵۸	-۹۵
10^8	۴۴۰۳۶۷	-۵۵	-۱۰۹	-۴۱۳	-۴۵۹	-۲۵۹
10^9	۳۴۲۵۳۰۸	-۸۰۲	-۶۲۸	-۷۸۵	۸۱۶	۴۶۰
10^{10}	۲۷۴۱۱۴۱۶	۱۲۶۳	-۱۴۱۷	۲۲۶۸	۹۲	۲۱۳
10^{11}	۲۲۴۳۶۸۸۶۶	۷۱۸۲	۴۲۹۵	-۶۳۶۵	-۳۵۳۲	-۱۳۶۱۹
10^{12}	۱۸۷۰۵۵۹۸۸۱	۲۵۳۳۹	۲۵۵۷۸	۴۸۸۶۸	۲۰۵۱۳	-۱۷۴۳۰

چه تناسب قابل توجهی! به نظر می‌رسد $|\pi'_{2k}(x) - \pi_{HL}(x)|$ معمولاً کمتر از $\sqrt{x}$ است. در واقع، در این محدوده x ، ما داده‌های مربوط به $k = 1, 2, \dots, 50$ جمع‌آوری کردیم، و این پیش‌بینی به نظر می‌رسد همیشه بسیار خوب باشد. به هر حال، این یک مقاله درباره مسابقات اعداد اول است، و ما می‌خواستیم بیشتر بررسی و تحقیق کنیم که آیا برنده یا بازنده خاصی در این مسابقات وجود دارد. در ابتدای تحقیق، به نظر می‌رسید که برنده و بازنده مسابقه را کشف کرده‌ایم. به نظر می‌رسید که جفت‌های $(p, p+60)$ و $(p, p+80)$ بر اساس داده‌های تا 5×10^9 ، از دیگر جفت‌هایی با تعداد عوامل اول یکسان، جلوتر هستند. از سوی دیگر بعد از شمارش تا 10^{12} آنها دیگر به‌طور منظم برنده نبودند. به‌طور مشابه، چندین جفت از اعداد اول در شروع مسابقه اعداد اول دوقلو به‌طور مداوم بازنده بودند، اما پس از مدتی بازنده ثابتی وجود نداشت. به‌عنوان یک خبر جالب، برنامه ما به این نکته اشاره کرد که در وهله اول ۴۵۵، ۱۴ تغییر بین 10^3 تا 10^9 وجود داشته است. در پایان، به نظر می‌رسد این یک مسابقه است که در آن هیچ برنده یا بازنده خاصی وجود ندارد و هنوز هم سوالات بی‌پاسخ بسیاری وجود دارد. مشکل اصلی در تجزیه و تحلیل مسابقه جفت‌های اعداد اول این است که نمی‌دانیم چه فرمولی مشابه (۱.۲) قادر خواهد بود جفت‌های اعداد اول را به‌عنوان مجموع امواج مناسب، شمارش کند.

۶. تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی حسنی تشکر و قدردانی کنم؛ ترجمه حاضر پیشنهاد ارزنده ایشان بود. از داور محترم بابت مطالعه دقیق مقاله و نظرات اصلاحی و پیشنهادی سازنده‌شان، که باعث روایی بیشتر این نوشته شده است، بسیار تشکر و قدردانی می‌کنم. همچنین از مسئولین و اعضای محترم هیات تحریریه مجله ریاضی و جامعه، بویژه از سردبیر محترم مجله جناب آقای دکتر محمدرضا پوریایولی مراتب تشکر و قدردانی را دارم.

مراجع

- [1] C. Bays and R. H. Hudson, Details of the first region of integers x with $\pi_{3,2}(x) < \pi_{3,1}(x)$, *Math. Comp.*, **32** (1978) 571–576.
- [2] C. Bays and R. H. Hudson, Zeros of Dirichlet L-functions and irregularities in the distribution of primes, *Math. Comp.*, **69** (2000) 861–866.
- [3] C. Bays and R. H. Hudson, A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \text{Li}(x)$, *Math. Comp.*, **69** (2000) 1285–1296.
- [4] E. Bombieri, Prime Territory: Exploring the infinite landscape at the base of the number system, *The Sciences*, **32** (1992) 30–36.
- [5] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [6] G. Davidoff, C. Osowski, J. vanden Eynden, Y. Wang and N. Wrinkle, *Extensions of some results of Harold Stark on comparative prime number theory*, (to appear).
- [7] G. Davidoff, *A generalization of Littlewood's theorem* (to appear).
- [8] A. Feuerverger and G. Martin, Biases in the Shanks-Rényi prime number race, *Experiment. Math.*, **9** (2000) 535–570.
- [9] K. Ford and S. Konyagin, The prime number race and zeros of Dirichlet L-functions off the critical line, *Duke Math. J.*, **113** (2002) 313–330.
- [10] K. Ford and S. Konyagin, The prime number race and zeros of L-functions off the critical line. II., *Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations*, , Bonner Math. Schriften, **360**, Univ. Bonn, Bonn, 2003 40 pp.
- [11] R. K. Guy, The strong law of small numbers, *Amer. Math. Monthly*, **95** (1988) 697–712.
- [12] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Partitio Numerorum III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.*, **44** (1922) 1–70.
- [13] R. H. Hudson, A common combinatorial principle underlies Riemann's formula, the Chebyshev phenomenon, and other subtle effects in comparative prime number theory. I, *J. Reine Angew. Math.*, **313** (1980) 133–150.
- [14] J. Kaczorowski, On the Shanks-Rényi race problem, *Acta Arith.*, **74** (1996) 31–46.
- [15] J. Kaczorowski, On the distribution of primes (mod 4), *Analysis*, **15** (1995) 159–171.
- [16] S. Knapowski and P. Turán, Comparative prime-number theory, I-III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **13** (1962) 299–364.
- [17] S. Knapowski and P. Turán, *Comparative prime-number theory, IV-VIII*, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963) 31–250.

- [18] J. E. Littlewood, Distribution des nombres premiers, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **158** (1914) 1869–1872.
- [19] G. Martin, *Asymmetries in the Shanks-Rényi prime number race*, Millennial Conference on Number Theory (Urbana, Illinois) (to appear).
- [20] N. Ng, *Limiting Distributions and Zeros of Artin L-Functions*, Ph. D. thesis, University of British Columbia, 2000.
- [21] M. Rubinstein and P. Sarnak, Chebyshev's bias, *Experiment. Math.*, **3** (1994) 173–197.
- [22] P. Sarnak, *unpublished correspondence*.
- [23] J. -P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [24] D. Shanks, Quadratic residues and the distribution of primes, *Math. Comp.*, **13** (1959) 272–284.
- [25] H. M. Stark, A problem in comparative prime number theory, *Acta. Arith.*, **68** (1971) 311–320.
- [26] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1986.
- [27] A. Winter, On the distribution function of the remainder term of the prime number theorem, *Amer. J. Math.*, **63** (1941) 233–248.

محمد رضا اسفندیاری

گروه آموزشی ریاضی، پردیس خواجه نصیرالدین طوسی کرمان، دانشگاه فرهنگیان، کرمان، ایران.

m.esfandiari@znu.ac.ir

محمد رضا اسفندیاری متولد اسفندماه ۱۳۶۴ در کرمان (رابر) است. وی در سال ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه فرهنگیان مشهد و در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی در دانشگاه فردوسی مشهد شد. در سال ۱۳۹۳ دوره دکتری ریاضی خود را در گرایش نظریه تحلیلی اعداد تحت راهنمایی آقای دکتر مهدی حسنی در دانشگاه زنجان شروع کرد و در سال ۱۳۹۸ موفق به دفاع از رساله خود شد.



Prime Number Races

Andrew Granville and Greg Martin

Translator: Mohammad Reza Esfandiari

Translator's abstract: This paper deals with one of the important and interesting topics in Number Theory under the title of prime number races, which is less discussed in Persian texts. All prime numbers (except 2) can be written in the form $4n+1$ or $4n+3$. The question that naturally arises is, which category contains more prime numbers? Certainly, the infinity of prime numbers makes it difficult for the spectator to predict the competition. The present article, which was written by two prominent mathematicians in this field, has comprehensively discussed the history of this problem, the types of prime number races, and the research work done in this field.

Mohammad Reza Esfandiari

Department of Mathematics, Khwajeh Nasiruddin Toosi Kerman Campus, Farhangian University, Kerman, Iran.

Email: m.esfandiari@znu.ac.ir

Communicated by Alireza Abdollahi.

Article Type: Translation Paper.

Received: 21/11/2021, Accepted: 28/06/2022.