ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۷، شماره ۱ (۱۴۰۱)، صص. ۷۳-۸۴
http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

چند خاصیت فضای شبه‌ریمانی همگن چهار بعدی با ایزوتروپی بدیهی

یداله آریانژاد

چکیده. در این مقاله، نخست فضاهای شبه‌ریمانی همگن همدیس تخت چهار بعدی با ایزوتروپی بدیهی ملاحظه می‌شود، سپس چند خاصیت هندسی مانند ریچی سالیتون یا والکر بودن روی فضاهای مذکور بررسی می‌شود. در حقیقت، یک طبقه‌بندی کامل از حالت‌هایی که فضاهای همگن همدیس تخت، والکر یا ریچی سالیتون با ایزوتروپیک بدیهی را نتیجه می‌دهد، ارائه خواهد شد.

۱. مقدمه

مطالعه ریچی سالیتون‌های همگن حوزه جالبی برای تحقیق در هندسه شبه‌ریمانی می‌باشند. برای مثال ارزیابی ریچی سالیتون همگن تحت کروشه فلو [۹]، سالیتون‌های جبری و ویژگی‌های حدس آلکسوسکی [۱۰]، ریچی سالیتون‌های گرادیان لورنتسی تخت همدیس [۱۱]، خواص ریچی سالیتون‌های جبری گروه‌های لی لورنتسی چهار بعدی [۲]، یا ریچی سالیتون جبری [۱] از حوزه‌های فعال در هندسه دیفرانسیل هستند. یک خمینه شبه‌ریمانی $\mathcal{M} = (M, g)$ همگن نامیده می‌شود اگر گروه G از ایزومتری‌ها به صورت متعدی روی $\mathcal{M}$ اثر کند. در این مورد، (M, g) را می‌توان به صورت $(G/H, g)$ تعریف کرد، که در آن H گروه ایزوتروپی در نقطه ثابت o از M و g یک متریک شبه‌ریمانی پایا می‌باشد. خمینه‌های همگن در تحقیقات مدرن در هندسه شبه‌ریمانی مورد استفاده قرار گرفته اند. به عنوان مثال فضاهای لورنتسی که برای آنها تمامی ژئودزی‌های پوچ همگن هستند در فیزیک پدیدار شده‌اند. در سال‌های اخیر مطالعه‌های زیادی روی فضاهای $g.o.$، یعنی فضاهایی که ژئودزی‌هایشان همگی همگن هستند، انجام شده است (بعنوان مثال [۵، ۶، ۴]). طبقه‌بندی کامل موضعی خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن چهاربعدی با ایزوتروپی غیر بدیهی به دست آمده است که با استفاده از آن، طبقه‌بندی خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن همدیس تخت چهار بعدی $M = G/H$ در [۳] نتیجه شد. فضاهای همدیس تخت موضوع بسیاری از تحقیقات در هندسه ریمانی و شبه‌ریمانی می‌باشد. یک خمینه ریمانی همگن همدیس تخت، متقارن می‌باشد [۱۳]. اخیرا ریچی سالیتون های گرادیان ریمانی منقبض شونده[1] و پایدار[2] طبقه بندی شده اند [۷، ۸]. خمینه‌های اینشتین شبه‌ریمانی همدیس تخت دارای انحنای مقطعی ثابت هستند. در ضمن آنها متقارن می‌باشند. خمینه‌های ریمانی همگن همدیس تخت همیشه متقارن می‌باشند [۱۳]. از طرف دیگر بعضی از مثال‌ها وجود ریچی سالیتون‌های شبه‌ریمانی همگن همدیس تخت را نشان می‌دهند که متقارن نیستند.

یک خمینه شبه‌ریمانی که یک توزیع موازی تبهگون را می‌پذیرد، خمینه والکر نامیده می‌شود. فضاهای والکر توسط آلثور گئوفری والکر در سال ۱۹۴۹ معرفی شد. وجود چنین ساختارهایی سبب بسیاری از ویژگی‌های جالب برای خمینه می‌شود که در حالت

عبارات و کلمات کلیدی: فضای همگن، شبه‌ریمانی، عملگر ریچی
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۰۴
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490 .

[1]Shrinking [2]Steady

ریمانی توجیهی ندارد. والکر، همچنین یک مختصات موضعی کانونیک برای چنین خمینه‌هایی تعیین کرد. [۱۴، ۱۵]. هدف از این مقاله بررسی خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن و همدیس تخت چهار بعدی با تمرکز بر عملگر ریچی نوع سگر می‌باشد که ریچی سالیتون یا والکر هستند. ابتدا جزییاتی درباره طبقه‌بندی خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن و همدیس تخت چهار بعدی به دست آمده در [۳] را می آوریم و سپس به همراه آن به مطالعه و طبقه‌بندی ریچی سالیتون همگن همدیس تخت چهاربعدی می‌پردازیم. فرض کنیم $M = G/H$ یک خمینه همگن (با H همبند)، $\mathfrak{g}$ جبر لی G و $\mathfrak{h}$ زیرجبر ایزوتروپی باشد. $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ را فضای خارج قسمتی در نظر بگیرید که با یک زیرفضای $\mathfrak{g}$، مکمل $\mathfrak{h}$ مشخص می‌شود. جفت $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ به طور منحصر به فرد نمایش ایزوتروپی

$$\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m}), \quad \psi(x)(y) = [x, y]_{\mathfrak{m}},$$

را برای تمام $x \in \mathfrak{g}$ و $y \in \mathfrak{m}$ تعریف می‌کند. فرض کنید $\{e_۱, \dots, e_r, u_۱, \dots, u_n\}$ پایه $\mathfrak{g}$ باشد که در آن $\{e_j\}$ و $\{u_i\}$ به ترتیب پایه‌های $\mathfrak{h}$ و $\mathfrak{m}$ هستند، در اینصورت نسبت به $\{u_i\}$، ماتریس H_j نمایش ایزوتروپی برای e_j خواهد بود. یک فرم دو خطی B روی $\mathfrak{m}$ پایا است اگر و تنها اگر برای تمام xهای متعلق به $\mathfrak{h}$ داشته باشیم $\psi(x)^t \circ B + B \circ \psi(x) = ۰$، که در آن $\psi(x)^t$ ترانهاده $\psi(x)$ را نشان می‌دهد. نسبت به u_i، تانسور ریچی ϱ از g با رابطه زیر داده می شود:

$$\varrho(u_i, u_j) = \sum_{k=۱}^{۴} g(R(u_k, u_i)u_j, u_k), \quad i, j = ۱, \dots, ۴.$$

علاوه بر این هر وقت که $X = \sum_{k=۱}^{۴} x_k e_k$ باشد معادله ریچی سالیتون به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sum_{k=۱}^{۴} x_k(g([u_k, u_i], u_j) + g(u_i, [u_k, u_j])) + \varrho(u_i, u_j) = \varsigma g_{ij}, \qquad i, j = ۱, \dots, ۴.$$

۲. حالتهای با عملگر ریچی ناتبهگن

همانطور که قبلا عنوان کردیم اگر (M, g) عملگر ریچی قطری شدنی داشته باشد در آن صورت عملگر ریچی تبهگن است [۳]. برای هر نقطه $p \in M$ و اندیس k، جبر لی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathfrak{g}(k, p) = \{Y \in \mathfrak{so}(q, nq); Y.R(p) = Y.\nabla R(p) = \cdots = Y.\nabla^k R(p) = ۰\},$$

که در آن Y به صورت یک مشتق عمل می‌کند. فرض کنیم (M, g) یک خمینه ۴ بعدی همگن و تخت همدیس با عملگر ریچی ناتبهگن باشد، برای هر نقطه $p \in M$، داریم که $\mathfrak{g}(۰, p) = \{۰\}$ اگر و تنها اگر Q_p ناتبهگن باشد [۳]. بنابراین (M, g) به طور موضعی با گروه لی مجهز به متریک شبه‌ریمانی چپ–پایا ایزومتر می‌باشد و عملگر ریچی خمینه چهار بعدی شبه‌ریمانی همگن و تخت همدیس تنها از نوع سگر $[۱, ۱۱\bar{۱}]$ خواهد بود اگر g خنثی باشد یا $[۱۱, ۱\bar{۱}]$ اگر g لورنتسی باشد [۳]. در اینجا ما ساختار گروه لی انواع ذکر شده و تانسور ریچی آنها را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. [۳] فرض کنیم (M, g) یک خمینه ۴ بعدی همگن تخت همدیس با عملگر ریچی نوع سگر باشد $[۱, ۱۱\bar{۱}]$. در اینصورت، (M, g) با یک گروه لی حل ناپذیر $SU(۲) \times \mathbb{R}$ یا $SL(۲, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$، به صورت موضعی ایزومتر خواهد بود، که با یک متریک خنثی چپ–پایا مجهز بوده و پایه نرمال یکه، $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴\}$ را برای جبر لی خود می‌پذیرد، چنانکه کروشه‌های لی به صورت یکی از فرم‌های زیر خواهد بود،

$$\begin{aligned} i) \qquad & [e_۱, e_۲] = \varepsilon\alpha e_۳, \qquad [e_۱, e_۳] = -\varepsilon\alpha e_۲, \qquad [e_۲, e_۳] = ۲\alpha(e_۱ + \varepsilon e_۴), \\ & [e_۲, e_۴] = -\alpha e_۳, \qquad [e_۳, e_۴] = \alpha e_۲, \end{aligned}$$

$$ii)\qquad [e_1,e_2]=-\varepsilon\alpha e_1,\qquad [e_1,e_3]=\alpha e_1,\qquad [e_1,e_4]=2\alpha(\varepsilon e_2-e_3),$$
$$[e_2,e_4]=-\varepsilon\alpha e_4,\qquad [e_3,e_4]=\alpha e_4,$$

و تانسور ریچی در حالت (i) می‌شود

$$\varrho=\begin{pmatrix} -2\alpha^2+2\epsilon^2\alpha^2 & 0 & 0 & 4\epsilon\alpha^2\\ 0 & 2\alpha^2+4\epsilon\alpha^2-2\epsilon^2\alpha^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\epsilon\alpha^2-2\alpha^2+2\epsilon^2\alpha^2 & 0\\ 4\epsilon\alpha^2 & 0 & 0 & 2\alpha^2-2\epsilon^2\alpha^2\end{pmatrix},$$

همچنین تانسور ریچی در حالت (ii) می‌شود

$$\varrho=\begin{pmatrix} 2\epsilon^2\alpha^2-2\alpha^2 & 0 & 0 & -2\epsilon^2\alpha^2-2\alpha^2\\ 0 & -4\epsilon^2\alpha^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4\alpha^2 & 0\\ -2\epsilon^2\alpha^2-2\alpha^2 & 0 & 0 & -2\epsilon^2\alpha^2+2\alpha^2\end{pmatrix},$$

که در آن $\alpha\neq 0$ یک ثابت حقیقی است و $\varepsilon=\pm1$.

قضیه ۲.۲. [۳] فرض کنیم (M,g) یک خمینه چهار بعدی همگن تخت همدیس با عملگر ریچی نوع سگر باشد [۱۱,۱۲]. در آن صورت، (M,g) به طور موضعی با یکی از گروه های لی حل ناپذیر $SU(2)\times\mathbb{R}$ یا $SL(2,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$، ایزومتریک خواهد بود که با یک متریک لورنتسی مجهز است و پایه نرمال یکه $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ را برای جبر لی می‌پذیرد، چنان که کروشه لی به صورت یکی از فرم‌های زیر می‌شود

$$i)\qquad [e_1,e_2]=-2\alpha(\varepsilon e_3+e_4),\qquad [e_1,e_3]=\varepsilon\alpha e_2,\qquad [e_1,e_4]=\alpha e_2,$$
$$[e_2,e_3]=\varepsilon\alpha e_1,\qquad [e_2,e_4]=\alpha e_1,$$

$$ii)\qquad [e_1,e_2]=2\alpha(\varepsilon e_3+e_4),\qquad [e_1,e_3]=\varepsilon\alpha e_2,\qquad [e_1,e_4]=\alpha e_2,$$
$$[e_2,e_3]=\varepsilon\alpha e_1,\qquad [e_2,e_4]=\alpha e_1,$$

و تانسور ریچی در حالت (i) به صورت زیر داده می‌شود:

$$\varrho=\begin{pmatrix} 4\alpha^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4\epsilon^2\alpha^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha^2\epsilon\\ 0 & 0 & -4\alpha^2\epsilon & 0\end{pmatrix},$$

همچنین تانسور ریچی در حالت (ii) به صورت زیر خواهد بود:

$$\varrho=\begin{pmatrix} -4\alpha^2\epsilon^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4\alpha^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\alpha^2\epsilon\\ 0 & 0 & -4\alpha^2\epsilon & 0\end{pmatrix},$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

که در آن $\alpha \neq ۰$ یک ثابت حقیقی است و $\varepsilon = \pm ۱$ می‌باشد. حالا با استفاده از عبارات طبقه‌بندی بالا، ما خمینه‌های چهار بعدی ریچی سالیتون همگن و تخت همدیس را با عملگر ریچی ناتبهگن طبقه‌بندی می‌کنیم. نتیجه قضیه زیر می‌باشد.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم (M, g) یک خمینه ۴ بعدی همگن تخت همدیس با عملگر ریچی ناتبهگن باشد. در این صورت (M, g) نمی‌تواند یک خمینه ریچی سالیتون باشد.

اثبات. بر اساس بحث بالا برای حالت خنثی و لورنتسی، توضیح گروه‌های لی و جبرهای لی آن ها را داریم. محاسبات را برای قسمت (ii) از حالت خنثی را با $\varepsilon = \pm ۱$ توضیح می‌کنیم. برای محاسبه‌ی $\Lambda_i := \Lambda(e_i)$ برای تمامی اندیس‌ها $i = ۱, \ldots, ۴$، داریم:

$$\Lambda_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & -\epsilon\alpha & \alpha & ۰ \\ \epsilon\alpha & ۰ & ۰ & \epsilon\alpha \\ \alpha & ۰ & ۰ & -\alpha \\ ۰ & \epsilon\alpha & \alpha & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \epsilon\alpha \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \epsilon\alpha & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \alpha \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ \alpha & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_۴ = \begin{pmatrix} ۰ & \epsilon\alpha & \alpha & ۰ \\ -\epsilon\alpha & ۰ & ۰ & \epsilon\alpha \\ \alpha & ۰ & ۰ & \alpha \\ ۰ & \epsilon\alpha & -\alpha & ۰ \end{pmatrix}.$$

حالا تانسورهای ریچی را می توان از فرمول های بالا به وسیله محاسبه مستقیم و اعمال (۱) استنباط کرد. به خصوص تانسور ریچی در این حالت به شکلی که در (۴) شرح داده شد می‌باشد که در آن $\alpha \neq ۰$ یک ثابت حقیقی و $\varepsilon = \pm ۱$ می‌باشد.

ثابت می‌کنیم که وجود یک میدان برداری که یک ریچی سالیتون را در حالت ممکن تعیین می‌کند منجر به تناقض می‌شود. پایه نرمال یکه $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴\}$، و یک میدان برداری دلخواه $X = \sum_{k=۱}^{۴} x_k e_k$ و یک ثابت حقیقی ς، را انتخاب می کنیم که در آن x_kها برای $k = ۱ \cdots ۴$ توابع هموار دلخواهی هستند. با استفاده از (۲) دریافتیم که X و ς یک ریچی سالیتون را تعیین می‌کنند اگر و تنها اگر اجزاء x_k از X با توجه به $\{e_k\}$ و ς در معادلات زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} -۴\alpha^۲ + \varsigma = ۰, \\ -۴\epsilon^۲\alpha^۲ - \varsigma = ۰, \\ -۲\epsilon^۲\alpha^۲ - ۲\alpha^۲ = ۰, \\ x_۱\alpha - ۲x_۴\alpha = ۰, \\ ۲x_۱\alpha + x_۴\alpha = ۰, \\ -x_۱\epsilon\alpha - ۲x_۴\epsilon\alpha = ۰, \\ ۲x_۱\epsilon\alpha - x_۴\epsilon\alpha = ۰, \\ ۲x_۲\epsilon\alpha - ۲x_۳\alpha - ۲\epsilon^۲\alpha^۲ + ۲\alpha^۲ + \varsigma = ۰, \\ ۲x_۲\epsilon\alpha - ۲x_۳\alpha + ۲\epsilon^۲\alpha^۲ - ۲\alpha^۲ - \varsigma = ۰. \end{cases}$$

از معادله سوم نتیجه می‌شود که $\alpha = ۰$ است که غیر ممکن است. □

قضیه ۴.۲. (M, g) را یک خمینه به طور همدیس تخت همگن چهار بعدی با عملگر ریچی ناتبهگون در نظر بگیرید. پس، (M, g) هیچ ساختار والکر پایای چپی را نمی‌پذیرد.

اثبات. ثابت می‌کنیم که وجود یک توزیع خنثی موازی پایای چپ در هر حالت احتمالی به یک تناقض منجر می‌شود. ما محاسبات را برای حالت (i) از علامت $(2,2)$ گزارش می‌کنیم. پایه شبه متعامد یکه $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ را انتخاب کنید و فرض کنید که یک توزیع موازی دو بعدی $\bar{\mathfrak{D}} = span(v,w)$ وجود دارد، که در آن $v=\sum_{i=1}^{4} v_ie_i$ و $w=\sum_{i=1}^{4} w_ie_i$ مستقل خطی هستند و برای متغیرهای اختیاری v_i و w_i

$$g(v,v)=g(w,w)=g(w,v)=0.$$

موازی بودن $\mathfrak{D}$ به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}v &= a_1v+b_1w, & \nabla_{e_1}w &= c_1v+d_1w,\\
\nabla_{e_2}v &= a_2v+b_2w, & \nabla_{e_2}w &= c_2v+d_2w,\\
\nabla_{e_3}v &= a_3v+b_3w, & \nabla_{e_3}w &= c_3v+d_3w,\\
\nabla_{e_4}v &= a_4v+b_4w, & \nabla_{e_4}w &= c_4v+d_4w,
\end{aligned} \tag{5}$$

که در آن $\{a_i,b_i,c_i,d_i\}_{i=1}^{4}$ متغییرهای دلخواه هستند. از $g(v,v)=g(w,w)=g(w,v)=0$ و معادلات $\nabla_{e_1}v = a_1v+b_1w$ و $\nabla_{e_2}v=a_2v+b_2w$ داریم که:

$$\begin{aligned}
&v_1^2+v_2^2-v_3^2-v_4^2=0, \quad w_1^2+w_2^2-w_3^2-w_4^2=0, \quad v_1w_1+v_2w_2-v_3w_3-w_4v_4=0,\\
&b_1w_1+a_1v_1=0, \quad b_1w_4+a_1v_4=0, \quad b_1w_2+a_1v_2-\alpha v_3=0,\\
&b_1w_3+a_1v_3-\alpha v_2=0, \quad b_2w_2+a_2v_2=0, \quad b_2w_1+a_2v_1-\alpha v_3(1-\varepsilon)=0,\\
&b_2w_4+a_2v_4-\alpha v_3(1+\varepsilon)=0, \quad b_2w_3+a_2v_3+\alpha(v_1+v_4)(1-\varepsilon)=0.
\end{aligned}$$

این معادلات نشان می‌دهند، بردار v بایستی صفر باشد که مستقل خطی بودن v و w را نقض می‌کند. با بحثی مشابه، فرض می‌کنیم $\mathfrak{D}=span(x)$ یک میدان خطی موازی خنثی باشد که در آن برای متغیرهای اختیاری x_i داریم $x=\sum_{i=1}^{4}x_ie_i$ موازی بودن $\mathfrak{D}$ به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}x &= \omega_1x\\
\nabla_{e_2}x &= \omega_2x,\\
\nabla_{e_3}x &= \omega_3x,\\
\nabla_{e_4}x &= \omega_4x,
\end{aligned}$$

برای چند متغیر $\{\omega_i\}_{i=1}^{4}$. بنابراین، معادلات زیر داریم:

$$\begin{aligned}
&x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0,\\
&\omega_1x_1=0, \quad \omega_1x_4=0, \quad \omega_1x_2-\alpha x_3=0, \quad \omega_1x_3-\alpha x_2=0,\\
&\omega_2x_2=0, \quad \omega_2x_1+\alpha x_3(\varepsilon-1)=0, \quad \omega_2x_4-\alpha x_3(\varepsilon+1)=0,\\
&\omega_2x_3+\alpha x_4(\varepsilon+1)+\alpha x_1(\varepsilon-1)=0,\\
&\omega_3x_3=0, \quad \omega_3x_1+\alpha x_2(\varepsilon+1)=0, \quad \omega_3x_4+\alpha x_2(\varepsilon-1)=0,\\
&\omega_3x_2+\alpha x_4(\varepsilon-1)-\alpha x_1(\varepsilon+1)=0,\\
&\omega_4x_1=0, \quad \omega_4x_4=0, \quad \omega_4x_2+\alpha x_3\varepsilon=0, \quad \omega_4x_3+\alpha x_2\varepsilon=0.
\end{aligned}$$

این دستگاه معادلات نشان می‌دهد که $x=0$ که یک تناقض است. پس، این نشان می‌دهد که هیچ میدان خطی پوچ موازی پایای چپ وجود ندارد و این بحث اثبات را به پایان می‌رساند. $\square$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

۳. حالت‌های با عملگر ریچی تبهگون و ایزوتروپی بدیهی

با استفاده از بحث‌های قبلی اکنون ما خمینه‌های با عملگر ریچی تبهگون می‌پردازیم. حالا فرض کنیم (M,g) یک خمینه همگن تخت همدیس ریچی ناموازی (و بنابراین به طور موضعی نامتقارن) با عملگر ریچی تبهگون باشد. ابتدا ما به حالت‌های با ایزوتروپی بدیهی می‌پردازیم. با جدا کردن حالت‌های عملگر ریچی قطری شدنی، چنان فضاهایی به طور موضعی با گروه لی G، ایزومتر هستند و با متریک خنثی چپ–پایا مجهز شده و Q یکی از انواع سگر را دارا می‌باشد: [۱, (۱۲)]، [۱, ۱۲]، [۲۲]، [(۱۳)] و [(۱, ۳)]. همچنین برای قسمت لورنتسی، Q نوع‌های سگر [(۱۱, ۲)]، یا [(۱, ۳)] را می‌پذیرد(ببینید [۳]).

قضیه ۱.۳. فرض کنیم (M,g) گروه لی ۴ بعدی ریچی–ناموازی تخت همدیس با عملگر ریچی از انواع سگر [۱, (۱۲)]، [۲۲]، [(۱۳)] و [(۱, ۳)] باشد، در اینصورت (M,g) یک خمینه ریچی سالیتون نمی‌باشد.

اثبات. ما همان بحث را که برای اثبات قضیه ۳.۲ استفاده کردیم بکار می‌بریم ثابت می‌کنیم که در حالت [(۲۲)] هیچ ریچی سالیتونی وجود ندارد. پایه نرمال یکه $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$، را در نظر بگیرید که

$$g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=-g(e_3,e_3)=-g(e_4,e_4)=1.$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}
[e_1,e_2]&=\tfrac{1-4k_1^2}{4k_1}e_2+\tfrac{1}{8k_1}e_4, &\qquad [e_1,e_3]&=\tfrac{1+8k_1^2}{4k_1}e_1+\tfrac{1+8k_1^2}{4k_1}e_3,\\
[e_1,e_4]&=\tfrac{1+16k_1^2}{8k_1}e_2+\tfrac{1+4k_1^2}{4k_1}e_4, &\qquad [e_2,e_3]&=\tfrac{1+4k_1^2}{4k_1}e_2+\tfrac{1+16k_1^2}{8k_1}e_4,\\
[e_3,e_4]&=\tfrac{-1}{8k_1}e_2-\tfrac{1-4k_1^2}{4k_1}e_4,
\end{aligned}$$

که در آن k_1 یک ثابت حقیقی است. برای محاسبه‌ی $\Lambda_i:=\Lambda(e_i)$ برای همه اندیس‌ها ی i = ۱،...،۴، داریم:

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1+8k_1^2}{4k_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+8k_1^2}{8k_1}\\ \frac{1+8k_1^2}{4k_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1+8k_1^2}{8k_1} & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda_2=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{-1+4k_1^2}{4k_1} & 0 & k_1\\ \frac{-1+4k_1^2}{4k_1} & 0 & \frac{1+4k_1^2}{4k_1} & 0\\ 0 & \frac{1+4k_1^2}{4k_1} & 0 & -k_1\\ k_1 & 0 & k_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1+8k_1^2}{4k_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+8k_1^2}{8k_1}\\ -\frac{1+8k_1^2}{4k_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1+8k_1^2}{8k_1} & 0 \end{pmatrix},\ \Lambda_4=\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & -\frac{1+4k_1^2}{4k_1}\\ -k_1 & 0 & -k_1 & 0\\ 0 & -k_1 & 0 & \frac{-1+4k_1^2}{4k_1}\\ -\frac{1+4k_1^2}{4k_1} & 0 & \frac{-1+4k_1^2}{4k_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

در این حالت ریچی تانسور به شکل زیر خواهد بود:

$$\varrho=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

یک میدان برداری دلخواه $X = \sum_{k=۱}^{۴} x_k e_k$ برای یک ثابت حقیقی ς، یک ریچی سالیتون است اگر و تنها اگر مولفه‌های x_k از X با توجه به $\{e_k\}$ و ς در معادلات زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} \frac{x_۲}{۸k_۱} + \frac{x_۴(۱+۴k_۱^۲)}{۴k_۱} = ۰, \\ -\frac{x_۴(۱+۱۶k_۱^۲)}{۸k_۱} + \frac{x_۲(-۱+۴k_۱^۲)}{۴k_۱} = ۰, \\ \frac{x_۴}{۸k_۱} + \frac{x_۲(۱+۴k_۱^۲)}{۴k_۱} = ۰, \\ -\frac{x_۲(۱+۱۶k_۱^۲)}{۸k_۱} + \frac{x_۴(-۱+۴k_۱^۲)}{۴k_۱} = ۰, \\ ۱ + \varsigma - \frac{x_۱(۱+۸k_۱^۲)}{۲k_۱} = ۰, \\ \frac{x_۱(۱+۸k_۱^۲)}{۴k_۱} + \frac{x_۳(۱+۸k_۱^۲)}{۴k_۱} = ۱, \\ -\frac{x_۳(۱+۸k_۱^۲)}{۲k_۱} + ۱ - \varsigma = ۰, \\ -\frac{x_۱(-۱+۴k_۱^۲)}{۲k_۱} + ۱ - \varsigma + \frac{x_۳(۱+۴k_۱^۲)}{۲k_۱} = ۰, \\ -\frac{x_۱(۱+۴k_۱^۲)}{۲k_۱} + ۱ + \varsigma + \frac{x_۳(-۱+۴k_۱^۲)}{۲k_۱} = ۰, \\ x_۱(-\frac{۱}{۸k_۱} + \frac{(۱+۱۶k_۱^۲)}{۸k_۱}) + x_۳(-\frac{۱}{۸k_۱} + \frac{(۱+۱۶k_۱^۲)}{۸k_۱}) = ۱. \end{cases}$$

از معادله‌های دوم و سوم با هم نتیجه می‌شود $x_۲ = x_۴ = ۰$، همچنین اگر معادلات پنجم و هفتم را با هم جمع کنیم داریم $۲ = \frac{(x_۱+x_۳)(۱+۸k_۱^۲)}{۲k_۱}$. همچنین اگر معادلات هشتم و نهم را نیز با هم جمع کنیم در این صورت داریم $۴k_۱(x_۱ + x_۳) = ۲$. در نهایت طبق این دو معادله واضح است که $۰ = ۱$ و این یک تناقض است. □

فرض کنیم (M, g) یک گروه لی ۴ بعدی ریچی–ناموازی تخت همدیس با عملگر ریچی نوع سگر $[(۱, ۱۲)]$ باشد. دراین صورت، (M, g) به طور موضعی با گروه لی حل پذیر $G = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^۳$ مجهز به یک متر خنثی پایای چپ ایزومتر است که برای پایه $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴\}$ جبر لی آن به صورت زیر است:

$$[e_۱, e_۲] = -[e_۱, e_۳] = -\frac{۱}{۲k_۱}e_۱ - k_۲e_۲ - k_۲e_۳, \qquad [e_۲, e_۳] = \frac{۲k_۱^۲+۱}{۲k_۱}e_۲ + \frac{۲k_۱^۲+۱}{۲k_۱}e_۳,$$
$$[e_۲, e_۴] = -[e_۳, e_۴] = k_۳e_۲ + k_۳e_۳ + k_۱e_۴,$$

که در آن $k_۱ \neq ۰, k_۲, k_۳$ ثابت‌های حقیقی دلخواه هستند.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم (M, g) یک گروه لی ۴ بعدی ریچی–ناموازی تخت همدیس با عملگر ریچی نوع سگر $[(۱،۱۲)]$ می‌باشد، در اینصورت (M, g) ریچی سالیتون است و برای ς دلخواه داریم:

$$X = \frac{k_۱}{۱+۲k_۱^۲}e_۲ + \frac{k_۱}{۱+۲k_۱^۲}e_۳.$$

اثبات. برای محاسبه $\Lambda_i := \Lambda(e_i)$ داریم:

$$\Lambda_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۲k_۱} & \frac{۱}{۲k_۱} \\ \frac{۱}{۲k_۱} & ۰ & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۲k_۱} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & k_۲ & -k_۲ & ۰ \\ -k_۲ & ۰ & -\frac{۱+۲k_۱^۲}{۲k_۱} & -k_۳ \\ -k_۲ & -\frac{۱+۲k_۱^۲}{۲k_۱} & ۰ & -k_۳ \\ ۰ & -k_۳ & k_۳ & ۰ \end{pmatrix},$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

$$\Lambda_2=\begin{pmatrix} 0 & -k_2 & k_2 & 0\\ k_2 & 0 & \frac{1+2k_1^2}{2k_1} & k_3\\ k_2 & \frac{1+2k_1^2}{2k_1} & 0 & k_3\\ 0 & k_3 & -k_3 & 0\end{pmatrix},\qquad \Lambda_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -k_1\\ 0 & 0 & 0 & -k_1\\ 0 & -k_1 & k_1 & 0\end{pmatrix}.$$

تانسور ریچی را حالا می‌توان از هموستار بالا با محاسبه مستقیم به دست آورد:

$$\varrho=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

فرض کنیم $X=\sum_{k=1}^{4}x_k e_k$ یک میدان برداری دلخواه، ς یک ثابت حقیقی باشد. با استفاده از تمامی اطلاعات مورد نیاز بالا در می‌یابیم که شرایط ریچی سالیتون بودن برقرار می‌شود اگر و تنها اگر:

$$\begin{cases} -\frac{x_1}{2k_1}+x_2k_2-x_3k_2=0,\\ \frac{x_2}{k_1}-\frac{x_3}{k_1}-\varsigma=0,\\ -2x_2k_1+2x_3k_1+\varsigma=0,\\ -x_2k_3+x_3k_3-x_4k_1=0,\\ -2x_1k_2-2x_4k_3+1+\varsigma-\frac{x_2(1+2k_1^2)}{k_1}=0,\\ -2x_1k_2-2x_4k_3+1-\varsigma-\frac{x_3(1+2k_1^2)}{k_1}=0,\\ 2x_1k_2+2x_4k_3-1+\frac{x_2(1+2k_1^2)}{2k_1}+\frac{x_3(1+2k_1^2)}{2k_1}=0.\end{cases}$$

از آنجائیکه k_1 یک عدد حقیقی دلخواه است، طبق معادلات دوم و سوم داریم $\varsigma=0$. همچنین از معادلات پنجم و ششم نتیجه می‌شود که $x_2=x_3$. اکنون با این نتایج بنا به معادله اول $x_1=0$ و بر حسب معادله چهارم $x_4=0$ است. همچنین دوباره بر حسب معادلات پنجم و ششم داریم که $x_2=x_3=\frac{k_1}{(1+2k_1^2)}$. پس، X به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{k_1}{1+2k_1^2}e_2+\frac{k_1}{1+2k_1^2}e_3.$$

از آنجائیکه $k_1\neq 0$، هیچ حالت انیشتینی روی نمی‌دهد. □

قضیه ۳.۳. (M,g) را یک گروه لی چهار بعدی ریچی–ناموازی به طور همدیس تخت با عملگر ریچی از نوع سگر $[(12),1]$ یا $[(1,3)]$ را در نظر بگیرید، پس (M,g) یک ساختار والکر پایای چپ را نمی‌پذیرد.

اثبات. ما همان بحث استفاده شده برای اثبات قضیه ۴.۲ را بکار می‌بریم. به عنوان مثال، ما ثابت می‌کنیم که در مورد نوع سگر و علامت $[(1,3)]$ و $(2,2)$ هیچ توزیع موازی پوچ دو بعدی وجود ندارد. توجه شود که این قضیه برای انواع سگر $[(1,3)]$ از علامت های خنثی و لورنتسی معتبر است. فرض کنید که توزیع موازی پوچ $\bar{\mathfrak{D}}=span(v,w)$ است. چون v در راستای بردارهای e_1 و e_2 موازی است و همچنین با استفاده از خنثی بودن $\bar{\mathfrak{D}}$ تنها صفر بودن v امکان پذیر است . این با مستقل خطی بودن v و w متناقض است و بنابراین، هیچ توزیع موازی خنثی پایای چپی در این حالت وجود ندارد. بحثی مشابه نتیجه می‌دهد که هیچ میدان خطی موازی خنثی پایای چپی وجود ندارد و بنابراین، (M,g) یک خمینه والکر نیست. با توجه به [۵] برای انواع سگر دیگر از عملگر ریچی و راه حل مشخص آن بیان شده است، نتیجه زیر را داریم. □

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

قضیه ۴.۳. (M,g) را یک گروه لی چهار بعدی نا موازی ریچی به طور همدیس تخت با عملگر ریچی نوع سگر $[(1,12)]$، $[(22)]$ یا $[(11,2)]$ در نظر بگیرید. در اینصورت (M,g) یک خمینه والکر در هر یک از موارد نوع سگر باشد:

۱- $[(1,12)]$ گروه لی حل پذیر $G=\mathbb{R}\ltimes\mathbb{R}^3$، که جبر لی آن $\mathfrak{g}$ به صورت زیر توصیف می‌شود.

$$[e_1,e_2]=-[e_1,e_3]=-\tfrac{1}{2c_1}e_1-c_2e_2-c_2e_3,\qquad [e_2,e_3]=\tfrac{2c_1^2+1}{2c_1}e_2+\tfrac{2c_1^2+1}{2c_1}e_3,$$
$$[e_2,e_4]=-[e_3,e_4]=c_3e_2+c_3e_3+c_1e_4,$$

که در آن $c_1\neq 0, c_2, c_3$ ثابت‌های حقیقی دلخواه می باشند. در این حالت، یک میدان خطی تبهگون موازی پایای چپ داده شده توسط $\mathfrak{D}=span(e_2+e_3)$ و $\bar{\mathfrak{D}}=span(e_2+e_3,e_1-e_4)$ یک میدان مسطح تبهگون موازی پایای چپ تولید می‌کند .

۲- $[(22)]$ گروه لی حل پذیر $G=\mathbb{R}\ltimes E(1,1)$، که جبر لی آن $\mathfrak{g}$ به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$[e_1,e_2]=\tfrac{1}{2}e_4,\qquad [e_1,e_3]=\tfrac{3}{2}(e_1+e_3),$$
$$[e_1,e_4]=\tfrac{5}{4}e_2+e_4,\quad [e_2,e_3]=e_2+\tfrac{5}{4}e_4,$$
$$[e_3,e_4]=-\tfrac{1}{2}e_2,$$

که در آن $c_1\neq 0$ یک مقدار ثابت حقیقی دلخواه است. در این حالت، $\bar{\mathfrak{D}}=span(e_1+e_3,e_2+e_4)$ یک میدان مسطح موازی پایای چپ را ایجاد می‌کند.

۳- $[(11,2)]$ گروه لی حل پذیر $G=\mathbb{R}\ltimes H$، که در آن H گروه هایزنبرگ است جبر لی $\mathfrak{g}$ به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$[e_1,e_2]=c_1e_3+c_1e_4,\qquad [e_1,e_3]=-[e_1,e_4]=-\tfrac{1}{2c_2}e_1-c_1e_2-c_3e_3-c_3e_4,$$
$$[e_3,e_4]=\tfrac{2c_2^2+1}{2c_2}(e_3+e_4),\qquad [e_2,e_3]=-[e_2,e_4]=-c_2e_2+c_4e_3+c_4e_4,$$

که در آن c_1,c_3,c_4 و $c_2\neq 0$ ثابت‌های حقیقی دلخواه هستند. در این حالت، یک میدان خطی تبهگون موازی پایای چپ، بوسیله $\mathfrak{D}=span(e_3+e_4)$ تولید می‌شود.

اثبات. یک حالت واضح از یک گروه لی به طور همدیس تخت ناموازی ریچی برای انواع سگر در این عبارت در مرجع [۵] بیان شده است . ما جزئیات حالت نوع سگر $[(1,12)]$ را ارائه می‌دهیم. نمونه‌های دیگر می‌توانند با محاسباتی مشابه بررسی شوند.

$[(1,12)]$. مولفه‌های هموستار لوی چویتا با استفاده از فرمول کازول محاسبه می‌شوند که به صورت زیر است:

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{2c_1}&\frac{1}{2c_1}&0\\ \frac{1}{2c_1}&0&0&0\\ \frac{1}{2c_1}& &0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix},\Lambda_2=-\Lambda_3=\begin{pmatrix}0&-c_2&c_2&0\\ c_2&0&\frac{1+2c_1^2}{2c_1}&c_3\\ c_2&\frac{1+2c_1^2}{2c_1}&0&c_3\\ 0&c_3&-c_3&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&c_1\\0&0&0&-c_1\\0&-c_1&c_1&0\end{pmatrix}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

اگر قرار دهیم $v = e_1 - e_4$ و $w = e_2 + e_3$ ، سپس $g(v,v) = g(w,w) = g(w,v) = 0$، که نشان می دهد $\bar{\mathfrak{D}}$ یک توزیع خنثی است. همچنین محاسبات مستقیم نتیجه می دهد که

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_1} v = \frac{1}{2c_1} w, && \nabla_{e_1} w = 0,\\
&\nabla_{e_2} v = (c_2 - c_3) w, && \nabla_{e_2} w = \frac{1+2c_1^2}{2c_1} w,\\
&\nabla_{e_3} v = (c_3 - c_2) w, && \nabla_{e_3} w = -\frac{1+2c_1^2}{2c_1} w,\\
&\nabla_{e_4} v = c_1 w, && \nabla_{e_4} w = 0,
\end{aligned}$$

بنابراین، $\bar{\mathfrak{D}} = span(v,w)$ یک توزیع پوچ موازی دو بعدی است. از مشتقات بالا واضح است که w یک میدان خطی موازی پوچ را تولید می‌کند. و این بحث اثبات را کامل می‌کند. □

مراجع

[1] W. Batat and K. Onda, Four-dimensional pseudo-Riemannian generalized symmetric spaces which are algebraic Ricci solitons, *Results Math.*, **64** (2013) 253–267.

[2] W. Batat and K. Onda, Algebraic Ricci solitons of three-dimensional Lorentzian Lie groups, *Lie groups. J. Geom. Phys.*, **114** (2017) 138–152.

[3] G. Calvaruso and A. Zaeim, Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds, *Tohoku Math. J. (2)*, **66** (2014) 31–54.

[4] G. Calvaruso, Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.*, **66** (2007) 1279–1291.

[5] G. Calvaruso and R. A. Marinosci, Homogeneous geodesics of three dimensional unimodular Lorentzian Lie groups, *Mediterr. J. Math.*, **3** (2006) 467–481.

[6] G. Calvaruso and R. A. Marinosci, Homogeneous geodesics of non unimodular Lorentzian Lie groups and naturally Lorentzian spaces in dimension three, *Adv. Geom.*, **8** (2008) 473–489.

[7] H. D. Cao and Q. Chen, On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **364** (2012) 2377–2391.

[8] M. Fernandez-Lopez and E. Garcia-Rio; Rigidity of shrinking Ricci solitons, *Math. Z.*, **269** (2011) 461–466.

[9] R. Lafunte and J. Lauret, *On homogeneous Ricci solitons*, *Q. J. Math.*, **65** (2014) 399–419.

[10] R. Lafunte and J. Lauret, Structure of homogeneous Ricci solitons and the Alekseevskii conjectur, *J. Differ. Geom.*, **98** (2014) 315–347.

[11] M. Brozos-vazquez, E. Garcia-Rio and S. Gavino-Fernandez, Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons, *J. Geom. Anal.*, **23** (2013) 1196–1212.

[12] P. Ryan, A note on conformally at spaces with constant scalar curvature, *Proc. 13th Biennal Seminar of the Canadian Math. Congress Diff. Geom. Appl.*, Dalhousie Univ., Halifax, 1971, **2** (1972) 115–124.

[13] H. Takagi, Conformally at Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries, I,II, *Tohôku Math. J.*, **27** (1975) 103–110 and 445–451.

[14] A. G. Walker, On parallel fields of partially null vector spaces, *Quart. J. Math. Oxford*, **20** (1949) 135–145.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

[15] A. G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **1** (1950) 69–79.

یداله آریانژاد
گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران
y.aryanejad@pnu.ac.ir

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490

Some geometrical properties of 4D homogeneous pseudo-Riemannian space with trivial isotropy

Yadollah Aryanejad

Abstract: In this paper, we first consider $4D$ conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian space with trivial isotropy, then, we investigate some geometrical properties such as being Ricci solitons and Walker on the spaces under consideration. Indeed, we give a complete classification of the cases giving rise to conformally flat homogeneous Ricci solitons or Walker spaces with trivial isotropy.
Keywords: Homogeneous atmosphere, quasi-rhyme, Ritchie operator.

Yadollah Aryanejad
Department of Mathematics, Payame noor University, Tehran, Iran.
Email: y.aryanejad@pnu.ac.ir

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.
Article Type: Research Paper.
Received: 12/01/2022, Accepted: 25/05/2022.
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.132276.1490