

تعمیم مفهوم صدف‌واری به مجتمع‌های چندگانه سادگی

رحیم رحمتی‌اصغر

چکیده. در این مقاله مفهوم صدف‌واری را به عنوان یکی از مفاهیم مرسوم در نظریه توپولوژی ترکیبیاتی تعمیم می‌دهیم. برای انجام آن، مجتمع‌های چندگانه k -تجزیه‌پذیر را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که صدف‌واری در حالت خاصی با k -تجزیه‌پذیری معادل است.

۱. مقدمه

یک مجتمع سادگی Δ روی مجموعه رئوس $V(\Delta) = \{v_1, \dots, v_n\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $V(\Delta)$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\{v_i\} \in \Delta$ ، برای هر $v_i \in V(\Delta)$ ؛

۲. اگر $F \in \Delta$ و G زیرمجموعه‌ای از F باشد در اینصورت $G \in \Delta$.

برای سهولت، مجموعه رئوس Δ را با $\{1, 2, \dots, n\}$ نمایش می‌دهیم. عناصر یک مجتمع سادگی را وجه می‌نامیم. بُعد یک وجه را با $\dim(F)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $\dim(F) = |F| - 1$. بعد مجتمع سادگی Δ را با $\dim(\Delta)$ بعد یک وجه را با $\max\{\dim(F) | F \in \Delta\}$ تعریف می‌کنیم. یک وجه بیشین نسبت به شمول از Δ را وجه‌واره می‌نامیم. اگر همه‌ی وجه‌واره‌ها هم بُعد باشند، Δ را محض می‌نامیم. در غیر اینصورت آن را نامحض گوئیم. در این مقاله منظور از یک مجتمع سادگی، یک مجتمع سادگی است که لزوماً محض نیست، مگر اینکه به محض بودن آن اشاره شود. مجموعه‌ی وجه‌واره‌های Δ را با $\mathcal{F}(\Delta)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $\mathcal{F}(\Delta) = \{F_1, \dots, F_r\}$ ، می‌نویسیم $\Delta = \langle F_1, \dots, F_r \rangle$. مجتمع سادگی Δ را صدف‌وار (نامحض) گوئیم هرگاه ترتیب $F_1, F_2, \dots, F_r$ از وجه‌واره‌های آن موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $j \geq 2$ ، زیرمجتمع $\langle F_1, \dots, F_{j-1} \rangle \cap \langle F_j \rangle$ محض از بُعد $\dim(F_j) - 1$ باشد. چنین ترتیبی را ترتیب صدف‌وار می‌نامیم [۲].

یک مجتمع سادگی Δ ، k -تجزیه‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه Δ یا شامل تنها یک وجه‌واره باشد و یا وجه غالب σ از بعد حداکثر k موجود باشد به‌طوری‌که $\sigma \in \text{link}_{\Delta} \sigma$ و $\Delta \setminus \sigma$ هر دو k -تجزیه‌پذیر باشند [۷]. بدیهی است که مجتمع‌های سادگی $\{\emptyset\}$ و $\{\emptyset\}$ به ازای $k \geq -1$ ، k -تجزیه‌پذیر می‌باشند. توجه کنید که k -تجزیه‌پذیری یک ساختار طبقاتی روی خانواده‌ای از مجتمع‌های سادگی است. به عبارت دیگر، هر مجتمع سادگی k -تجزیه‌پذیر، $(k+1)$ -تجزیه‌پذیر نیز می‌باشد. بیلرا و پرووان در [۱] نشان دادند یک مجتمع سادگی d -بعدی، صدف‌وار است اگر و تنها اگر آن d -تجزیه‌پذیر باشد. مجتمع‌های سادگی 0 -تجزیه‌پذیر ساختار ترکیبیاتی مهمی دارند و به همین خاطر آن‌ها را رأس-تجزیه‌پذیر می‌نامند.

عبارات و کلمات کلیدی: مجتمع چندگانه سادگی، k -تجزیه‌پذیر، صدف‌وار.

دبیر تخصصی رابط: جواد اسدالهی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۲/۱۰

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131663.1483>

با توجه به آنچه اشاره شد برای هر مجتمع سادگی d - بعدی داریم:

صدفوار $d \Leftrightarrow d$ - تجزیه پذیر $\Rightarrow \dots \Rightarrow 1$ - تجزیه پذیر $\Rightarrow$ رأس - تجزیه پذیر.

مفهوم مجتمع چندگانه سادگی برای اولین بار توسط استنلی معرفی شده است [۶]. سپس هرزگوگ و پاپسکو تعریف استنلی را تعمیم دادند [۳] که در این مقاله از تعریف آن‌ها استفاده شده است. اگر $\mathbb{N}$ نشانگر مجموعه اعداد صحیح نامنفی باشد، بر $\mathbb{N}^n$ رابطه ترتیب جزئی $\preceq$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a \preceq b \text{ اگر برای هر } i, a(i) \leq b(i).$$

اگر $N_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ، برای $a \in \mathbb{N}_\infty^n$ تعریف می‌کنیم:

$$\text{fpt}(a) = \{i : a \neq \infty\},$$

$$\text{infpt}(a) = \{i : a(i) = \infty\},$$

$$\text{fpt}^*(a) = \{i : 0 < a(i) < \infty\}.$$

فرض کنید Γ یک زیرمجموعه $\mathbb{N}_\infty^n$ باشد. عضو $m \in \Gamma$ بیشین نامیده می‌شود اگر $a \in \Gamma$ با $a \succ m$ موجود نباشد. مجموعه‌ی عناصر بیشین Γ را با نماد $\mathcal{M}(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. در [۳، لم ۱.۹] نشان داده شده است که $\mathcal{M}(\Gamma)$ متناهی است. $\Gamma \subseteq \mathbb{N}_\infty^n$ یک مجتمع چندگانه سادگی نامیده می‌شود [۳] اگر

$$(1) \text{ برای هر } a \in \Gamma \text{ و هر } b \in \mathbb{N}_\infty^n \text{ با } b \preceq a \text{ داشته باشیم } b \in \Gamma.$$

$$(2) \text{ برای هر } a \in \Gamma, \text{ عضو } m \in \mathcal{M}(\Gamma) \text{ به قسمی موجود باشد که } a \preceq m.$$

ما در تمام این مقاله به جای عبارت "مجتمع چندگانه سادگی"، از عبارت ساده‌تر "مجتمع چندگانه" استفاده می‌کنیم. عناصر یک مجتمع چندگانه، وجه‌واره نامیده می‌شوند. عنصر $a \in \Gamma$ یک وجه از Γ است اگر برای هر $m \in \mathcal{M}(\Gamma)$ با $a \preceq m$ داشته باشیم $\text{infpt}(a) = \text{infpt}(m)$.

فرض کنید $\mathcal{F}(\Gamma)$ نشان دهنده مجموعه وجه‌واره‌های Γ باشد. وجه‌واره‌های $\mathcal{M}(\Gamma)$ بیشین نامیده می‌شوند. به وضوح، مجموعه وجه‌واره‌ها و مجموعه وجه‌واره‌های بیشین مجتمع چندگانه Γ ، Γ را مشخص می‌کنند. برای $A = \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}_\infty^n$ کوچکترین مجتمع چندگانه منحصر به فرد شامل A را با نماد $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ نمایش می‌دهیم. برای هر $a \in \Gamma$ تعریف می‌کنیم:

$$\dim(a) = |\text{infpt}(a)| - 1,$$

$$\dim(\Gamma) = \max \{\dim(a) : a \in \Gamma\}.$$

گوییم $S \subseteq \mathbb{N}_\infty^n$ یک مجموعه استنلی از درجه a است اگر $a \in \mathbb{N}_\infty^n$ و $m \in \mathbb{N}_\infty^n$ با $m(i) \in \{0, \infty\}$ موجود باشند به قسمی که $S = a + S^*$ که در آن $S^* = \langle m \rangle$. بُعد S را با نماد $\dim(\langle m \rangle)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. [۳] مجتمع چندگانه Γ صدفوار است اگر وجه‌واره‌های Γ را بتوان به صورت $a_1, \dots, a_r$ مرتب کرد به قسمی که

$$(1) S_i = \langle a_i \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle \text{ یک مجموعه استنلی برای } i = 1, \dots, r \text{ است،}$$

$$(2) \text{ اگر } S_i^* \subset S_j^* \text{ باشد، آنگاه } S_i^* = S_j^* \text{ یا } i > j.$$

یک ترتیب از وجه‌واره‌هایی که در ویژگی (۱) و (۲) صدق می‌کند، یک ترتیب صدفوار از Γ نامیده می‌شود.

برای $F \subseteq [n]$ و $a \in \mathbb{N}^n$ تعریف می‌کنیم

$$a_F(i) = \begin{cases} 1 & x_i \in F \\ 0 & \text{و گرنه} \end{cases}$$

قضیه ۲.۱. [۳، گزاره ۳.۱۰] فرض کنید Δ یک مجتمع ساده با وجه‌واره‌های $F_1, \dots, F_r$ و Γ مجتمع چندگانه با وجه‌واره‌های $a_{F_1}, \dots, a_{F_r}$ باشد. در این صورت Δ صدف‌وار است اگر و تنها اگر Γ صدف‌وار باشد.

هدف ما در این مقاله توسیع مفهوم مجتمع‌های چندگانه صدف‌وار است. لذا ما مفهوم مجتمع چندگانه k -تجزیه‌پذیر را تعریف می‌کنیم. این مفهوم جدید، خود تعریفی از مجتمع‌های سادگی k -تجزیه‌پذیر نیز می‌باشد و کمک می‌کند تا بتوان جزییات بیشتری از ساختار مجتمع‌های صدف‌وار و k -تجزیه‌پذیر ارائه کرد.

۲. مجتمع‌های چندگانه k -تجزیه‌پذیر

هدف از این بخش توسیع مفهوم k -تجزیه‌پذیری روی مجتمع‌های چندگانه است. در ابتدا به معرفی چند نماد می‌پردازیم. فرض کنیم $\Gamma \subseteq \mathbb{N}_{\infty}^n$ یک مجتمع چندگانه و $a \in \Gamma$ ستاره، حذف و پیوند a در Γ را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{star}_{\Gamma} a = \{b \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid a \preceq b\},$$

$$\Gamma \setminus a = \{b \in \mathcal{F}(\Gamma) \mid a \not\preceq b\},$$

$$\text{link}_{\Gamma} a = \{b - a : b \in \mathcal{F}(\Gamma), a \preceq b\}.$$

برای مجتمع‌های چندگانه $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{N}_{\infty}^n$ اتصال Γ_1 و Γ_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \{a + b : a \in \Gamma_1, b \in \Gamma_2\}.$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که

$$\text{star}_{\Gamma} a = \langle a \rangle \cdot \text{link}_{\Gamma} a,$$

$$\text{star}_{\Gamma} a = \{b \in \Gamma \mid a \vee b \in \Gamma\},$$

$$\text{link}_{\Gamma} a = \{a \vee b - a : a \vee b \in \Gamma\}.$$

اگر $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{N}_{\infty}^n$ آن‌گاه

$$\Gamma \setminus \{a_1, \dots, a_r\} = \{b \in \mathcal{F}(\Gamma) : a_i \not\preceq b \forall i\} = \bigcap_{i=1}^r \Gamma \setminus a_i.$$

مثال ۱.۲. فرض کنیم $\Gamma = \langle (2, \infty), (3, \circ) \rangle$. آن‌گاه

$$\mathcal{F}(\Gamma) = \{(\circ, \infty), (1, \infty), (2, \infty), (3, \circ)\}.$$

برای $a = (2, 1)$ داریم

$$\text{star}_{\Gamma} a = \langle (2, \infty) \rangle,$$

$$\Gamma \setminus a = \langle (\circ, \infty), (1, \infty), (3, \circ) \rangle,$$

$$\text{link}_{\Gamma} a = \langle (\circ, \infty) \rangle.$$

تعریف ۲.۲. فرض کنیم Γ یک مجتمع چندگانه $(d-1)$ -بعدی و $0 \leq k \leq d-1$. عضو $a \in \Gamma \cap \mathbb{N}^n$ با $|fpt^*(a)| \leq k+1$ یک وجه ریختنی نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

- (۱) برای همه $b \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma}(a))$ ، $b \in \langle a \rangle \setminus (\Gamma \setminus a)$ یک مجموعه استتلی از درجه a باشد.
 (۲) برای هر $b \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma}(a))$ و هر $c \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus a)$ ، اگر $fpt(b) \subseteq fpt(c)$ ، آن گاه $fpt(b) = fpt(c)$.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم Γ یک مجتمع چندگانه $(d-1)$ -بعدی و $0 \leq k \leq d-1$. گوئیم Γ ، k -تجزیه پذیر است اگر دارای یک وجهواره باشد یا وجه ریختنی $a \in \Gamma$ با $|fpt^*(a)| \leq k+1$ به قسمی موجود باشد که $\text{link}_{\Gamma}(a)$ و $\Gamma \setminus a$ ، k -تجزیه پذیر باشند.

ملاحظه ۴.۲. توجه داشته باشید که برای مجتمع چندگانه Γ با $\mathcal{F}(\Gamma) = \{a\}$ دارای $\{0, \infty\}^n$ است (۳، نتیجه ۱۱.۹) را ببینید.

حال به بررسی جزئیات ساختار مجتمع های چندگانه k -تجزیه پذیر می پردازیم.

قضیه ۵.۲. فرض کنید Γ یک مجتمع چندگانه k -تجزیه پذیر باشد. در این صورت برای هر $a \in \Gamma$ ، $\text{link}_{\Gamma} a$ ، k -تجزیه پذیر است.

اثبات. اگر Γ فقط دارای یک وجهواره باشد، آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی ماند. فرض کنید $|\mathcal{F}(\Gamma)| > 1$ باشد و وجه ریختنی $b \in \Gamma$ با $|fpt^*(b)| \leq k+1$ به قسمی موجود باشد که $\text{link}_{\Gamma}(b)$ و $\Gamma \setminus b$ ، k -تجزیه پذیر باشند.
حالت اول. فرض کنیم $b \prec a$ و $a \vee b \in \Gamma$. در این صورت

$$\text{link}_{\Gamma} a = \text{link}_{\text{link}_{\Gamma} b}(a - b).$$

از این که $|\mathcal{F}(\text{link}_{\Gamma} b)| \leq |\mathcal{F}(\Gamma)|$ ، و بنا به فرض استقرا $\text{link}_{\text{link}_{\Gamma} b}(a - b)$ ، k -تجزیه پذیر است.
حالت دوم. فرض کنیم $b \not\prec a$ و $a \vee b \in \Gamma$. در این صورت

$$\text{link}_{\Gamma} a \setminus (a \vee b - a) = \text{link}_{\Gamma \setminus b} a$$

و

$$\text{link}_{\text{link}_{\Gamma} b}(a \vee b - a) = \text{link}_{\Gamma}(a \vee b) = \text{link}_{\text{link}_{\Gamma} b}(a \vee b - b).$$

حال، بنا به اینکه $|\mathcal{F}(\text{link}_{\Gamma} b)| \leq |\mathcal{F}(\Gamma)|$ و $|\mathcal{F}(\Gamma \setminus b)| \leq |\mathcal{F}(\Gamma)|$ از فرض استقرا نتیجه می گیریم $\text{link}_{\text{link}_{\Gamma} b}(a \vee b - a)$ و $\text{link}_{\Gamma} a \setminus (a \vee b - a)$ ، k -تجزیه پذیر هستند. حال نشان می دهیم $a \vee b - a$ یک وجه ریختنی $\text{link}_{\Gamma} a$ است.

فرض کنید $c \in \mathcal{F}(\text{star}_{\text{link}_{\Gamma} b}(a \vee b - a))$. بنا به اینکه $\text{star}_{\text{link}_{\Gamma} b}(a \vee b - a) = \text{link}_{\text{star}_{\Gamma} b}(a)$ داریم $c + a \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma} b)$. در نتیجه $c + a \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma} b)$. پس $m \in \{0, \infty\}^n$ به قسمی موجود است که $\langle c + a \rangle \setminus (\Gamma \setminus b) = \langle m \rangle + b$. این نتیجه می دهد

$$\langle c \rangle \setminus (\text{link}_{\Gamma} a \setminus (a \vee b - a)) = \langle c \rangle \setminus (\text{link}_{\Gamma \setminus b} a) = a \vee b - a + \langle m \rangle.$$

فرض کنید $u \in \mathcal{F}(\text{star}_{\text{link}_{\Gamma} a}(a \vee b - a))$ و $v \in \mathcal{F}((\text{link}_{\Gamma} a) \setminus (a \vee b - a))$ با $fpt(u) \subseteq fpt(v)$. بنابراین داریم $fpt(u + a) \subseteq fpt(v + a)$ و $u + a \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus b)$ ، $v + a \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus b)$. بنا به این که b یک وجه ریختنی Γ است، داریم $fpt(u) = fpt(v)$. این نتیجه می دهد $fpt(u + a) = fpt(v + a)$.

حالت سوم. فرض کنید $a \vee b \notin \Gamma$. پس $\text{link}_{\Gamma} a = \text{link}_{\Gamma \setminus b} a$. بنا به این که $|\mathcal{F}(\Gamma \setminus b)| \leq |\mathcal{F}(\Gamma)|$ است، بنا به فرض استقرا نتیجه می گیریم $\text{link}_{\Gamma} a$ ، k -تجزیه پذیر است. $\square$

قضیه ۶.۲. فرض کنید $\Gamma \in \mathbb{N}_{\infty}^n$ یک مجتمع چندگانه‌ای باشد که فقط دارای وجهواره ماکزیمال b است. در این صورت Γ ، k -تجزیه‌پذیر است اگر و تنها اگر $|\text{fpt}^*(b)| \leq k + 1$ باشد.

اثبات. "قسمت تنها اگر": فرض کنید Γ ، k -تجزیه‌پذیر باشد. اگر Γ تنها دارای یک وجهواره باشد آنگاه ادعا از ملاحظه ۴.۲ برقرار است. فرض کنید $|\mathcal{F}(\Gamma)| > 1$ باشد و a یک وجه ریختنی Γ با $|\text{fpt}^*(a)| \leq k + 1$ باشد به قسمی که $\text{link}_{\Gamma} a$ و $\Gamma \setminus a$ ، k -تجزیه‌پذیر باشند. بنا به این که $b \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma} a)$ ، $m \in \{0, \infty\}^n$ به قسمی که $\langle b \rangle \setminus (\Gamma \setminus a) = a + \langle m \rangle$. توجه داشته باشید که $\text{infpt}(b) = \text{infpt}(m)$.

فرض کنید که برای i ، $0 < b(i) < \infty$ باشد. اگر $a(i) = 0$ آنگاه بنا به این که $b \in a + \langle m \rangle$ داریم $0 < m(i) < \infty$ و این تناقض است. بنابراین $a(i) \neq 0$. این نتیجه می‌دهد $\text{fpt}^*(b) \subseteq \text{fpt}^*(a)$ از این رو $|\text{fpt}^*(b)| \leq k + 1$. "قسمت اگر": اگر $|\text{fpt}^*(b)| = 0$ باشد، آنگاه $b \in \{0, \infty\}^n$ و همچنین Γ دارای یک وجهواره است. در نتیجه Γ ، k -تجزیه‌پذیر است. فرض کنید که $|\text{fpt}^*(b)| > 0$ باشد. نشان می‌دهیم a با

$$a(i) = \begin{cases} b(i), & b(i) \neq 0 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک وجه ریختنی Γ است.

در نتیجه $\mathcal{F}(\text{link}_{\Gamma} a) = \{b - a\}$ نتیجه می‌دهد $\text{link}_{\Gamma} a$ ، k -تجزیه‌پذیر است. داریم $\langle b \rangle \setminus (\Gamma \setminus a) = a + \langle m \rangle$ که $\text{infpt}(m) = \text{infpt}(b)$. بنا به این که برای هر $c \in \mathcal{F}(\Gamma)$ است، $\text{infpt}(c) = \text{infpt}(b)$ نتیجه می‌دهد $\text{fpt}(c) = \text{fpt}(b)$ و همچنین شرط (ii) تعریف ۲.۲ برقرار است. حال این می‌ماند که نشان دهیم $\Gamma \setminus a$ ، k -تجزیه‌پذیر است. فرض کنید $0 < b(i) < \infty$. قرار می‌دهیم

$$c(j) = \begin{cases} b(j), & j \neq i \\ b(i) - 1, & j = i \end{cases}$$

در حالت مشابه برای a در Γ ، نشان می‌دهیم که c یک وجه ریختنی $\Gamma \setminus a$ است. اثبات به استقرا کامل می‌شود. $\square$

در نتیجه، Γ ، k -تجزیه‌پذیر است.

مجتمع‌های چندگانه $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathbb{N}_{\infty}^n$ مجزا از هم نامیده می‌شوند اگر

$$\left(\bigcup_{a \in \Gamma_1} \{i : a(i) \neq 0\} \right) \cap \left(\bigcup_{a \in \Gamma_2} \{i : a(i) \neq 0\} \right) = \emptyset.$$

قضیه ۷.۲. فرض کنید Γ_1 و Γ_2 مجتمع‌های چندگانه مجزا باشند. اگر $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ ، k -تجزیه‌پذیر باشند، آنگاه Γ_1 و Γ_2 ، k -تجزیه‌پذیرند. عکس این مطلب برقرار است اگر به علاوه داشته باشیم $\mathcal{F}(\Gamma_2) \subseteq \{0, \infty\}^n$.

اثبات. توجه کنید که $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ دارای یک وجهواره است اگر و تنها اگر Γ_1 و Γ_2 دارای یک وجهواره باشند. پس فرض می‌کنیم یا $|\mathcal{F}(\Gamma_1)| > 1$ یا $|\mathcal{F}(\Gamma_2)| > 1$. برای هر وجه $a \in \Gamma$ داریم

$$(1) \quad \text{link}_{\Gamma} a = \text{link}_{\Gamma_1}(a_1) \cdot \text{link}_{\Gamma_2}(a_2)$$

و

$$(2) \quad \Gamma \setminus a = (\Gamma_1 \setminus a_1) \cdot \Gamma_2 \cup \Gamma_1 \cdot (\Gamma_2 \setminus a_2),$$

که $a = a_1 + a_2$ و $a_2 \in \Gamma_2$ ، $a_1 \in \Gamma_1$.

«قسمت تنها اگر»: فرض کنید $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ با وجه ریختنی $a = a_1 + a_2$ که $a_i \in \Gamma_i$ می‌خواهیم نشان دهیم Γ_i با وجه ریختنی a_i که k -تجزیه پذیر است و $\text{link}_{\Gamma_i}(a_i)$ و $\Gamma_i \setminus a_i$ برای $i = 1, 2$ k -تجزیه پذیرند. فرض می‌کنیم $\text{star}_{\Gamma_1} a_1 \neq \Gamma_1$. بنا به اینکه $\text{link}_{\Gamma} a_1 = \text{link}_{\Gamma_1} a_1 \cdot \Gamma_2$ بنا به استقرا نتیجه می‌گیریم $\text{link}_{\Gamma_1} a_1$ و Γ_2 k -تجزیه پذیرند. از طرفی $a \in \Gamma \setminus a_1$ که k -تجزیه پذیر است. در نتیجه بنا به قضیه ۵.۲، $\text{link}_{\Gamma \setminus a} a_2 = \Gamma_1 \setminus a_1 \cdot \text{link}_{\Gamma_2} a_2$ k -تجزیه پذیرند. حال از استقرا نتیجه می‌شود که $\Gamma_1 \setminus a_1$ k -تجزیه پذیر است.

فرض کنید $b_1 \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma_1} a_1)$ و $b_2 \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma_2} a_2)$ وجه‌واره $b = b_1 + b_2$ را انتخاب کنید و b را در نظر بگیرید. در این صورت $b \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma} a)$

$$\begin{aligned} \langle b \rangle \setminus (\Gamma \setminus a) &= [\langle b \rangle \setminus (\Gamma_1 \setminus a_1 \cdot \Gamma_2)] \cap [\langle b \rangle \setminus (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \setminus a_2)] \\ &= [\langle b_1 \rangle \setminus (\Gamma_1 \setminus a_1) \cdot \langle a_2 \rangle] \cap [\langle b_1 \rangle \cdot \langle b_2 \rangle \setminus (\Gamma_2 \setminus a_2)] \\ &= \langle b_1 \rangle \setminus (\Gamma_1 \setminus a_1) \cdot \langle b_2 \rangle \setminus (\Gamma_2 \setminus a_2). \end{aligned}$$

از طرفی دیگر، $\langle b \rangle \setminus (\Gamma \setminus a) = a + \langle m \rangle$ که $m(i) \in \{0, \infty\}$ فرض کنیم $a = a_1 + a_2$ و $m = m_1 + m_2$ که $a_i, m_i \in \Gamma_i$. از رابطه (۳) نتیجه می‌گیریم که $\langle b_1 \rangle \setminus (\Gamma_1 \setminus a_1) = a_1 + \langle m_1 \rangle$.

فرض کنیم $b_1 \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma_1} a_1)$ و $c_1 \in \mathcal{F}(\Gamma_1 \setminus a_1)$ با $\text{fpt}(b_1) \subseteq \text{fpt}(c_1)$ و $b_2 \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma_2} a_2)$ و $c_2 \in \mathcal{F}(\Gamma_2 \setminus a_2)$ با $\text{fpt}(b_2) \subseteq \text{fpt}(c_2)$ بنا براین $c'_1 \in \mathcal{M}(\Gamma_2)$ به قسمی موجود می‌باشد که $c'_1 \prec c_2$. در نتیجه $b_1 + b_2 \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma} a)$ و $c_1 + c'_1 \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus a)$ توجه کنید که $\text{fpt}(c_2) = \text{fpt}(c'_1)$ بنا براین $\text{fpt}(b_1 + b_2) = \text{fpt}(c_1 + c'_1)$ بخصوص $\text{fpt}(b_1 + b_2) = \text{fpt}(c_1 + c_2)$ این نتیجه می‌دهد $\text{fpt}(b_1) = \text{fpt}(c_1)$ پس a_1 یک وجه ریختنی Γ_1 است.

«قسمت اگر»: فرض کنید Γ_1 و Γ_2 به ترتیب با وجه‌های ریختنی a_1 و a_2 که k -تجزیه پذیر باشد و $\text{link}_{\Gamma_1}(a_1)$ و $\Gamma_1 \setminus a_1$ برای $i = 1, 2$ k -تجزیه پذیر باشد. فرض کنیم $\mathcal{F}(\Gamma_2) \subset \{0, \infty\}^n$. ادعا می‌کنیم a_1 یک وجه ریختنی Γ باشد. از روابط (۱) و (۲) داریم

$$\text{link}_{\Gamma}(a_1) = \text{link}_{\Gamma_1}(a_1) \cdot \Gamma_2, \quad \Gamma \setminus a_1 = (\Gamma_1 \setminus a_1) \cdot \Gamma_2.$$

بنا به فرض استقرا، $\text{link}_{\Gamma}(a_1)$ و $\Gamma \setminus a_1$ k -تجزیه پذیر هستند. فرض کنیم $b = b_1 + b_2 \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma}(a_1))$ که $b_i \in \Gamma_i$ بنا براین

$$\langle b \rangle \setminus (\Gamma \setminus a_1) = [\langle b_1 \rangle \setminus (\Gamma_1 \setminus a_1)] \cdot \langle b_2 \rangle = (a_1 + \langle m \rangle) \cdot \langle b_2 \rangle = a_1 + \langle m + b_2 \rangle$$

یک مجموعه استتلی است.

فرض کنیم $b = b_1 + b_2 \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma} a_1)$ و $c = c_1 + c_2 \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus a_1)$ با $b_i, c_i \in \Gamma_i$. همچنین فرض کنیم $\text{fpt}(b) \subseteq \text{fpt}(c)$. در این صورت برای $i = 1, 2$ $\text{fpt}(b_i) \subseteq \text{fpt}(c_i)$. بنا به این که b_2 و c_2 وجه‌واره‌های Γ هستند و به علاوه $\mathcal{F}(\Gamma_2) \subseteq \{0, \infty\}^n$ پس بنا به تعریف داریم $\text{infpt}(c_2) = \text{infpt}(b_2)$. در نتیجه $\text{fpt}(b_2) = \text{fpt}(c_2)$. از طرفی دیگر، بنا به اینکه Γ_1 k -تجزیه پذیر است، $\text{fpt}(b_1) = \text{fpt}(c_1)$. در نتیجه $\text{fpt}(b) = \text{fpt}(c)$.

□

۳. نتایج اصلی

حال نتایج اصلی این مقاله را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. هر مجتمع چندگانه k -تجزیه‌پذیر Γ صدف‌وار است. همچنین هر مجتمع چندگانه صدف‌وار به ازای برخی $k \geq 0$ ، k -تجزیه‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید Γ ، k -تجزیه‌پذیر باشد. اگر Γ فقط دارای یک وجه‌واره باشد اثبات تمام است. فرض کنید $|\mathcal{F}(\Gamma)| > 1$. همچنین فرض کنید $a \in \Gamma$ یک وجه Γ با $|fpt^*(a)| \leq k + 1$ باشد به قسمی که $\Gamma \setminus a$ و $\text{link}_{\Gamma} a$ ، k -تجزیه‌پذیر باشند. بنا به استقرا، $\Gamma \setminus a$ و $\text{link}_{\Gamma}(a)$ صدف‌وار هستند. فرض کنید $a_1, \dots, a_t, a_{t+1} - a, \dots, a_r - a$ به ترتیب، ترتیب‌های صدف‌واری مرتب $\Gamma \setminus a$ و $\text{link}_{\Gamma} a$ باشند. به آسانی می‌توان دید که $a_{t+1}, \dots, a_r$ ترتیب صدف‌واری مرتب شده $\text{star}_{\Gamma} a$ باشد. ادعا می‌کنیم $a_1, \dots, a_r$ ترتیب صدف‌واری Γ باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر i ، $S_i = \langle a_i \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle$ یک مجموعه استتلی است. حالت $i \leq t$ واضح است. فرض کنید $i > t$ باشد. به وضوح

$$\langle a_i \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle = (\langle a_i \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_t \rangle) \cap (\langle a_i \rangle \setminus \langle a_{t+1}, \dots, a_{t+1}, \dots, a_{i-1} \rangle).$$

بنا به اینکه Γ ، k -تجزیه‌پذیر است، $\langle a_i \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_t \rangle = a + \langle m \rangle$ که $m \in \{0, \infty\}^n$. به علاوه، $\text{star}_{\Gamma}(a)$ صدف‌وار است، $a' \in \mathbb{N}^n$ با $|fpt^*(a')| \leq k + 1$ و $m' \in \{0, \infty\}$ به قسمی موجود است که

$$\langle a_i \rangle \setminus \langle a_{t+1}, \dots, a_{i-1} \rangle = a' + \langle m' \rangle.$$

به وضوح $m = m'$. بنابراین $\langle a_i \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle = a \vee a' + \langle m \rangle$.

فرض کنید $S_i^* \subseteq S_j^*$ اگر $i, j \leq t$ یا $i, j > t$ باشد، آنگاه بنا به این که $\Gamma \setminus a$ و $\text{star}_{\Gamma}(a)$ صدف‌وار هستند، اثبات تمام است. فرض کنید $j > t \geq i$. چون $\text{infpt}(a_j) = \text{infpt}(S_j^*)$ و $\text{infpt}(a_i) = \text{infpt}(S_i^*)$ داریم $\text{fpt}(a_j) \subseteq \text{fpt}(a_i)$. اما $\text{fpt}(a_j) = \text{fpt}(a_i)$ چون $a_j \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma}(a))$ و $a_i \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus a)$. در نتیجه $\text{infpt}(a_j) = \text{infpt}(a_i)$ و همچنین $S_i^* = S_j^*$ که این همان مطلوب است.

برای قسمت دوم اثبات، فرض کنید Γ با پوسته $a_1, \dots, a_r$ صدف‌وار باشد. اگر $r = 1$ آنگاه Γ برای $k \geq 0$ ، k -تجزیه‌پذیر است. حال فرض کنید $r > 1$. بنا به استقرا روی تعداد وجه‌واره‌های Γ حکم را ثابت می‌کنیم. چون $S_r = \langle a_r \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_{r-1} \rangle$ یک مجموعه استتلی است پس $a \in \mathbb{N}^n$ و $m \in \{0, \infty\}^n$ به قسمی موجودند که

$$S_r = a + \langle m \rangle. \text{ فرض کنید } |fpt^*(a)| \leq k + 1 \text{ برای برخی } k \geq 0. \text{ به وضوح } \text{star}_{\Gamma}(a) = \langle a_r \rangle$$

$\Gamma \setminus a = \langle a_1, \dots, a_{r-1} \rangle$. بنا به فرض استقرا، $\Gamma \setminus a$ برای برخی $k \geq 0$ ، k -تجزیه‌پذیر است. اگر $k' \geq k$ ، آنگاه $|fpt^*(a)| \leq k' + 1$ و اگر $k' < k$ ، آنگاه $k \leq k' + 1$ ، $\Gamma \setminus a$ ، k -تجزیه‌پذیر است. حال اگر نشان دهیم که a در شرط (ii) تعریف ۲.۲ صدق می‌کند در اینصورت نشان داده‌ایم که a یک وجه ریختنی Γ است و همچنین در حالت $k' \geq k$ ، Γ ، k' -تجزیه‌پذیر خواهد شد و در حالتی که $k' < k$ ، Γ ، k' -تجزیه‌پذیر خواهد بود.

فرض کنید $i < r$ و $\text{fpt}(a_r) \subseteq \text{fpt}(a_i)$ و همچنین $S_i^* \subseteq S_r^*$. این نتیجه می‌دهد $S_i^* = S_r^*$ و لذا $\text{fpt}(a_r) = \text{fpt}(a_i)$ و این همان مطلوب است. $\square$

برای $F \subset [n]$ ، $a_F \in \mathbb{N}_{\infty}^n$ را به صورت $a_F(i) = \infty$ اگر $i \in F$ و $a_F(i) = 0$ در غیر این صورت تعریف کنید. همچنین، برای $a \in \{0, \infty\}^n$ در نظر بگیرید $F_a = \{i \in [n] : a(i) = \infty\}$. نتیجه بعدی نشان می‌دهد که تعریف ما از k -تجزیه‌پذیری مجتمع‌های چندگانه، مفهوم k -تجزیه‌پذیری مجتمع‌های سادگی ارائه شده در مراجع [۷، ۱] را تعمیم می‌دهد.

گزاره ۲.۳. فرض کنید Δ یک مجتمع ساده با وجه‌واره‌های $F_1, \dots, F_r$ و Γ یک مجتمع چندگانه با وجه‌واره‌های $a_{F_1}, \dots, a_{F_r}$ باشد. در این صورت Δ ، k -تجزیه‌پذیر است اگر و تنها اگر Γ ، k -تجزیه‌پذیر باشد.

اثبات. «قسمت تنها اگر»: از استقرا روی تعداد وجه‌واره‌های Δ استفاده می‌کنیم. فرض کنید Δ با وجه ریختنی σ ، k -تجزیه‌پذیر باشد به قسمی که $\text{link}_{\Delta}\sigma$ و $\Delta \setminus \sigma$ ، k -تجزیه‌پذیر باشند. ادعا می‌کنیم $e_{\sigma} = \sum_{i \in F} e_i$ یک وجه ریختنی Γ است که e_i نشان دهنده i -امین بردار واحد استاندارد در $\mathbb{N}^n$ است. به وضوح، $|\text{fpt}^*(e_{\sigma})| \leq k + 1$. توجه داشته باشید که

$$\text{link}_{\Gamma}e_{\sigma} = \langle a_F \in \mathcal{F}(\text{link}_{\Delta}\sigma) \rangle$$

و

$$\Gamma \setminus e_{\sigma} = \langle a_F : F \in \mathcal{F}(\Delta \setminus \sigma) \rangle.$$

بنا به استقرا، $\Gamma \setminus e_{\sigma}$ و $\text{link}_{\Gamma}e_{\sigma}$ ، k -تجزیه‌پذیر است.

فرض کنید $a_F \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma}e_{\sigma})$. در این صورت

$$\langle a_F \rangle \setminus (\Gamma \setminus e_{\sigma}) = \{u \in \Gamma : e_{\sigma} \preceq u \preceq a_F\} = e_{\sigma} + \langle a_F \rangle.$$

بنابراین $\langle a_F \rangle \setminus (\Gamma \setminus e_{\sigma})$ یک مجموعه استتلی از درجه e_{σ} است.

حال $b \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma}e_{\sigma})$ و $c \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus e_{\sigma})$ را با $\text{fpt}(b) \subseteq \text{fpt}(c)$ در نظر بگیرید. اگر $\text{fpt}(b) \neq \text{fpt}(c)$ باشد، آنگاه $F_c \subsetneq F_b$ و همچنین $x \in \sigma$ به قسمی موجود است که $x \in F_b \setminus F_c$. بخصوص $F_b \setminus x$ یک وجه‌واره $\sigma \setminus \text{star}_{\Delta}\sigma$ و $\Delta \setminus \sigma$ است و این با فرض وجه ریختنی بودن σ در Δ در تناقض است. پس $\text{fpt}(b) = \text{fpt}(c)$. «قسمت اگر»: اگر $r = 1$ آنگاه اثبات تمام است. فرض کنید $r > 1$ ، Γ ، k -تجزیه‌پذیر و $a \in \mathbb{N}^n$ یک وجه ریختنی Γ با $|\text{fpt}^*(a)| \leq k + 1$ باشد به قسمی که $\text{link}_{\Gamma}a$ و $\Gamma \setminus a$ ، k -تجزیه‌پذیر باشند.

$\sigma = \text{fpt}^*(a)$ را در نظر بگیرید. بنا به این که $\text{link}_{\Gamma}e_{\sigma} = \text{link}_{\Gamma}a$ و $\Gamma \setminus e_{\sigma} = \Gamma \setminus a$ پس $\Gamma \setminus e_{\sigma}$ و $\Gamma \setminus a$ ، k -تجزیه‌پذیر هستند. در نتیجه بنا به فرض استقرا، $\text{link}_{\Delta}\sigma$ و $\Delta \setminus \sigma$ ، k -تجزیه‌پذیرند. تنها مطلب باقی‌مانده این است که نشان دهیم σ در خاصیت تعویض صدق می‌کند. فرض کنید F یک وجه‌واره $\sigma \setminus \text{star}_{\Delta}\sigma$ و $G \in \text{star}_{\Delta}\sigma$ و $x \in \sigma$ به قسمی موجودند که $F = G \setminus x$. به وضوح، $\text{infpt}(a_F) \subsetneq \text{infpt}(a_G)$. این نتیجه می‌دهد که $\text{fpt}(a_G) \subsetneq \text{fpt}(a_F)$ و این تناقض است چون $a_G \in \mathcal{F}(\text{star}_{\Gamma}e_{\sigma})$ و $a_F \in \mathcal{F}(\Gamma \setminus e_{\sigma})$. در نتیجه σ وجه ریختنی Δ است. $\square$

برای مجتمع‌های ساده Δ_1 و Δ_2 روی مجموعه رؤوس مجزا، الحاق Δ_1 و Δ_2 را به صورت

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \{\sigma \cup \tau : \sigma \in \Delta_1, \tau \in \Delta_2\}$$

تعریف کنید.

قضیه ۷.۲ به همراه گزاره ۲.۳ نتیجه زیر را می‌دهد که برای حالت صدف‌واری در [۲] و حالت تجزیه‌پذیری در [۷] آمده است.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید Δ_1 و Δ_2 مجتمع‌های ساده‌ی روی مجموعه رؤوس مجزا باشند. در این صورت Δ_1 و Δ_2 ، k -تجزیه‌پذیر هستند اگر و تنها اگر $\Delta_1 \cdot \Delta_2$ ، k -تجزیه‌پذیر باشند.

مراجع

- [1] L. J. Billera and J. S. Provan, Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra, *Math. Oper. Res.*, **5** no. 4 (1980) 576–594.
- [2] A. Björner and M. L. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349** (1997) 3945–3975.

- [3] J. Herzog and D. Popescu, Finite filtrations of modules and shellable multicomplexes, *Manuscripta Math.*, **121** no. 3 (2006) 385–410.
- [4] S. Moriyama and F. Takeuchi, Incremental construction properties in dimension two: shellability, extendable shellability and vertex decomposability, *Discrete Math.*, **263** (2003) 295–296.
- [5] R. Rahmati-Asghar, k -clean monomial ideals, *Math. Rep. (Bucur.)*, **20(70)** no. 4 (2018) 371–387.
- [6] R. P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, Progress in Mathematics, **41**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983.
- [7] R. Woodroffe, Chordal and sequentially Cohen-Macaulay clutters, *Electron. J. Combin.*, **18** (2011) no. 1 20 pp.

رحیم رحمتی اصغر

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

rahmatiasghar.r@gmail.com

اینجانب رحیم رحمتی اصغر متولد مرداد ماه ۱۳۶۳، در سال ۱۳۸۱ در مقطع کارشناسی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی قبول شدم. چهار سال بعد از فارغ التحصیلی، یعنی در سال ۱۳۸۵ در دانشگاه تهران در مقطع کارشناسی ارشد رشته جبر شروع به تحصیل نمودم. در سال ۱۳۸۷ از مقطع کارشناسی ارشد فارغ التحصیل شدم و همان سال مشغول به تحصیل در مقطع دکتری ریاضی گرایش جبر جابجایی دانشگاه تهران شدم. از سال ۱۳۹۱ پس از فارغالتحصیلی از مقطع دکتری، تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه مراغه هستم.



A generalization of shellability to simplicial multicomplexes

Rahim Rahmati Asghar

Abstract: In this paper, we generalize the concept of shellability as one of the common concepts in combinatorial topological theory. In order to do that, we introduce k -decomposable simplicial multicomplexes and show that the shellability is equivalent to k -decomposability in a special case.

Keywords: Single Multiple Complex, k -acceptance decomposition, oyster-like.

Rahim Rahmati Asghar

Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Maragheh University, Maragheh, Iran.

Email: rahmatiasghar.r@gmail.com