http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۶، شماره ۳ (۱۴۰۰)، صص. ۲۴-۱۹
© ۱۴۰۰ دانشگاه اصفهان

http://www.ui.ac.ir

# بسط مجانبی یک دنباله مرتبط با عدد نپر و کاربرد آن در شمارش تحلیلی تعداد مسیرها در گراف کامل

مهدی حسنی

**چکیده.** در این مقاله تعداد مسیرهای بین دو رأس دلخواه و ثابت در گراف کامل $K_{n+2}$ را بررسی می‌کنیم. نخست نشان می‌دهیم تعداد این مسیرها برابر است با $w_{n+2} = e_n n!$ که در آن $e_n = \sum_{j=0}^{n} 1/j!$ مجموع جزئی سری معرّف عدد $e$ است. سپس با بدست آوردن یک نمایش انتگرالی برای $e_n$، شبیه انتگرال تابع گاما، بسط مجانبی زیر را برای $w_{n+2}$ به‌دست می‌آوریم

$$w_{n+2} = en! - \sum_{k=1}^{r} \frac{c_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

که در آن $r \geqslant 1$ عددی صحیح و دلخواه است و ضرایب $c_k$ قابِل محاسبه و مشخص هستند. ضمناً نشان می‌دهیم که ضریب نماد $O$ در این بسط حداکثر برابر $e^2 B_{r+1}$ است، که در آن $B_{r+1}$ عدد بل از مرتبهٔ $r+1$ است.

## ۱. مقدمه

گراف کامل[۱] $K_n$ گراف ساده با $n$ رأس است که در آن هر دو رأس مجاورند. یک مسیر[۲] بین دو رأس دلخواه و متمایز مانند $u$ و $v$ دنباله‌ای متشکل از رئوس متمایز با ابتدا و انتهای $u$ و $v$ است. ترتیب عناصر دنبالهٔ مشخص کنندهٔ یک مسیر مهم است. هدف اصلی این مقاله شمارش تحلیلی[۳] تعداد مسیرهای بین دو رأس دلخواه و ثابت در گراف کامل $K_{n+2}$ است. منظورمان از شمارش تحلیلی [۲، ۵] یک مساله که در آن موضوع شمارش پدیده‌ای مد نظر است این است که جدای از آنکه امکان به‌دست آوردن رابطه‌ای صریح برای شمارش وجود داشته باشد، بتوانیم یک بسط مجانبی[۴] [۴] برای موضوع مورد نظر به‌دست آوریم. چنین بسطی اغلب اطلاعات مفیدتری نسبت به روابط صریح در اختیار ما می‌گذارد. مثالی معروف از این موضوع مساله شمارش جایگشت‌های یک مجموعهٔ $n$ عضوی است که جواب آن $n!$ است. هرچند نماد فاکتوریل برایمان آشناست، امّا زمانی شناخت ما از آن عمیقتر می‌شود که فرمول مجانبی استرلینگ[۵] برای تابع گاما[۶] و فاکتوریل را درنظر بگیریم ([۱۳، بخش ۱۱.۵] را ببینید). نمونه‌های بیشتر که با مسائل شمارشی مرتبطند را در [۱، ۳، ۱۱، ۱۲] می‌توان پیدا کرد.

عبارات و کلمات کلیدی: گراف کامل، عدد نپر، شمارش تحلیلی، بسط مجانبی، اعداد بِل
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۱۳   تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۹

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130416.1468

[1]complete graph [2]path [3]analytic enumeration [4]asymptotic expansion [5]Stirling's approximation [6]gamma function

برای آغاز شمارش تعداد مسیرها در گراف کامل $K_{n+2}$ اجازه دهید رئوس بین $u$ و $v$ در یک مسیر را رأس‌های واسطه بنامیم. تعداد رأس‌های واسطه می‌تواند بین ۰ تا $n$ تغییر کند. یک مسیر با $k$ رأس واسطه به شکل زیر است

$$u \bigcirc \bigcirc \cdots \bigcirc \bigcirc v$$

که در آن هر $\bigcirc$ یک رأس واسطه را نشان می‌دهد، و تعدادشان در این مدل $k$ است. لذا با توجه به اهمیت ترتیب قرار گرفتن رئوس واسطه و همچنین اینکه رئوس واسطه از بین $n$ رأس گراف $K_{n+2}$ (همه رئوس بجز $u$ و $v$) انتخاب می‌شوند، تعداد مسیرهای بین $u$ و $v$ با $k$ رأس واسطه برابر $P(n,k)$، و تعداد تمام آنها برابر است با

$$w_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} P(n,k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!} = e_n n!, \tag{1}$$

که در آن

$$e_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}.$$

از آنجائیکه $\lim_{n\to\infty} e_n = e$، یک تقریب اوّلیه برای $w_{n+2}$ عبارتست از $en!$. پرسشی که به ذهن خطور می‌کند این است که این تقریب چقدر خوب است؟ در مسیر بررسی این سوال نگارنده در [۷] رابطهٔ صریحی را برای $w_n$ به‌دست آورده است، که به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$w_{n+2} = \lfloor en! \rfloor.$$

جزئیات اثبات و همچنین کاوش ارتباط با عدد $e$ در همین مجله [۱۸] آمده است. تلاش بیشتری در این راستا در [۹] با ارائه نامساوی‌هایی برای $w_n$ و همچنین یک بسط مجانبی با چند جملهٔ آغازین، صورت گرفته است. همان‌طور که در (۱) می‌بینیم، بررسی $w_{n+2}$ ارتباط مستقیمی با بررسی جمع روی نماد $P(n,k)$ دارد. نکته جالب این است که تعداد قابِل توجّهی اتّحاد جمعی بر روی نماد $C(n,k)$ را می‌توان در منابع ترکیبیاتی، به‌عنوان مثال [۶، ۱۴، ۱۵]، پیدا کرد. با اینحال اتّحادهای جمعی بسیار کمی بر روی نماد $P(n,k)$ وجود دارد. با همین انگیزه نگارنده اخیراً در [۸، ۱۰] روش‌هایی برای محاسبهٔ جمع‌هایی بر روی تعداد جایگشت‌ها ارائه کرده است. در خلال این مطالعات مشخص شد که برای به‌دست آوردن بسط مجانبی برای تعداد مسیرها در گراف کامل بهتر است به‌جای $w_{n+2}$ با $w_n$ کار کنیم.

## ۲. بسط مجانبی تعداد مسیرها

در این بخش به هدف اصلی مقاله می‌پردازیم، که همانا به‌دست آوردن یک بسط مجانبی برای $w_{n+2}$ است. جملهٔ پیشروی این بسط $en!$ است که در آن $n!$ را می‌توان توسط فرمول استرلینگ از هر مرتبه‌ای بسط داد. ضرایب سایر جملات بسط مجانبی برای $w_{n+2}$ که با $c_k$ نشان می‌دهیم توسط رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$\frac{(-1)^{k-1}}{e} c_k = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{j^k}{j!}. \tag{2}$$

ضرایب $c_k$ جملات دنباله‌ای متشکل از اعداد صحیح بوده و در دایره‌المعارف برخط دنباله‌های صحیح[7] نمایه شده است. چند مقدار آغازین این دنباله عبارت است از:

$$1, 0, -1, 1, 2, -9, 9, 50, -267, 413, 2180, -17731, 50533, 110176, -1966797, 9938669, -8638718, \ldots.$$

[7] the on-line encyclopaedia of integer sequences: https://oeis.org/A014182

رابطهٔ (۲) شکل متناوب فرمول دوبینسکی[8] برای اعداد بِل[9] است ([۱۷، صفحه ۱۷۸])، که به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$e\, B_k = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^k}{j!}. \qquad (۳)$$

**قضیه ۱.۲.** *فرض کنید $r \geqslant 1$ عددی صحیح، دلخواه و ثابت باشد. در اینصورت برای هر $n \geqslant 1$ داریم*

$$w_{n+2} = en! - \sum_{k=1}^{r} \frac{c_k}{n^k} + E_r(n), \qquad (۴)$$

*که در آن ضرایب $c_k$ توسط (۲) مشخص می‌شوند. همچنین جملهٔ خطای $E_r(n)$ در نامساوی زیر، بر حسب اعداد بِل، صدق می‌کند*

$$|E_r(n)| < \frac{e^2 B_{r+1}}{n^{r+1}}.$$

**اثبات.** برای $n \geqslant 0$ قرار می‌دهیم

$$I_n := \int_{-\infty}^{-1} t^n e^t dt.$$

با انتگرالگیری جزء‌به‌جزء رابطهٔ کاهشی زیر برای هر عدد حقیقی $\alpha$ به‌دست می‌آید

$$\int t^\alpha e^t dt = t^\alpha e^t - \alpha \int t^{\alpha-1} e^t dt.$$

با استفاده از این رابطهٔ کاهشی، رابطهٔ بازگشتی زیر برای $j \geqslant 1$ حاصل می‌شود

$$I_j = \frac{(-1)^j}{e} - j I_{j-1}.$$

با ضرب طرفین در $\frac{(-1)^j}{j!}$ نتیجه می‌شود

$$\frac{(-1)^j}{j!} I_j - \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} I_{j-1} = \frac{1}{ej!}.$$

بر روی طرفین رابطهٔ اخیر جمع روی $1 \leqslant j \leqslant n$ می‌بندیم. مشاهده می‌کنیم که مجموع سمت چپ تلسکوپی است. در نتیجه برای $n \geqslant 1$ داریم

$$\frac{(-1)^n}{n!} I_n - I_0 = \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}.$$

همچنین مشاهده می‌کنیم که $I_0 = \frac{1}{e}$. بنابراین برای $n \geqslant 0$ نتیجه می‌شود

$$\frac{(-1)^n}{n!} I_n = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = \frac{e_n}{e}.$$

با کمک این رابطه مقدار $w_{n+2}$ بر حسب انتگرال $I_n$ بدین صورت به‌دست می‌آید

$$w_{n+2} = e_n n! = (-1)^n e I_n.$$

با اعمال تغییر متغیّر $t \to -t$ در این انتگرال نتیجه می‌گیریم

$$w_{n+2} = (-1)^n e \int_1^\infty (-t)^n e^{-t} dt = e \int_1^\infty t^n e^{-t} dt.$$

انتگرال اخیر بسیار شبیه انتگرال معرّف تابع گاماست، که تعمیمی از فاکتوریل است. در واقع داریم

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt.$$

در نتیجه

$$w_{n+2} = en! - e \int_0^1 t^n e^{-t} dt.$$

[8] Dobiński's formula [9] Bell numbers


http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130416.1468

این رابطه توصیف صریحی از تفاضل $w_{n+2} - en!$ را بر حسب انتگرالی که مقدارش با بزرگ شدن $n$ کوچک می‌شود بیان می‌کنید. ادامهٔ اثبات بررسی دقیق‌تر انتگرال اخیر است. داریم

$$\int_0^1 t^n e^{-t} dt = \int_0^1 t^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^1 t^{n+j} dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j+1)}.$$

تعویض ترتیب مجموع و انتگرال در فرآیند بالا به‌دلیل همگرایی یکنواخت مجموع زیر انتگرال انجام شده است ([۱۶، بخش ۷.۱] را ببینید). برای محاسبهٔ مجموع سمت راست در تساوی اخیر دقّت می‌کنیم که اتّحاد مقدماتی زیر برای $n + c \neq 0$ برقرار است

$$\frac{1}{n+c} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \frac{c^{k-1}}{n^k} + \frac{(-1)^r}{n+c} \left(\frac{c}{n}\right)^r.$$

با قرار دادن $c = j + 1$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^n e^{-t} dt &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^{k-1}}{n^k} \frac{(-1)^j (j+1)^{k-1}}{j!} + (-1)^r \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j+1)} \left(\frac{j+1}{n}\right)^r \\
&= \sum_{k=1}^{r} \frac{(-1)^{k-1}}{n^k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (j+1)^{k-1}}{j!} + \frac{(-1)^r}{n^r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (j+1)^r}{j!(n+j+1)}.
\end{aligned}$$

دقّت می‌کنیم که

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (j+1)^{k-1}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(j+1)^k}{(j+1)!} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{j^k}{j!} = \frac{(-1)^{k-1}}{e} c_k,$$

که در آن $c_k$ در رابطهٔ (۲) توصیف شده است. درخصوص جمله خطا با استفاده از فرمول دوبینسکی (۳) داریم

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (j+1)^r}{j!(n+j+1)} \right| &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)^r}{j!(n+j+1)} \\
&< \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)^r}{j!} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)^{r+1}}{(j+1)!} = \frac{e\, B_{r+1}}{n}.
\end{aligned}$$

به این ترتیب رابطه مجانبی (۴) اثبات می‌شود، و اثبات قضیه کامل است. □

## ۳. تشکر وقدردانی

از مسئولین و اعضای محترم هیات تحریریهٔ مجلهٔ ریاضی و جامعه، و همچنین داور محترم بخاطر مطالعه دقیق مقاله و پیشنهادات سازنده‌شان تشکر می‌کنم.

## مراجع

[1] M. Aigner, *A course in enumeration*, Graduate Texts in Mathematics, **238**, Springer, Berlin, 2007.

[2] E. A. Bender, Asymptotic methods in enumeration, *SIAM Rev.*, **16** (1974) 485–515.

[3] L. Comtet, *Advanced combinatorics: the art of finite and infinite expansions*, Dordrecht, Netherlands, Reidel, 1974.

[4] N. G. De Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1961.

[5] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.

[6] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th Edition, Academic Press, 2007.

[7] M. Hassani, Cycles in graphs and derangements, *Math. Gaz.*, **88** (2004) 123–126.

[8] M. Hassani, Derangements and alternating sum of permutations by integration, *J. Integer Sequences*, **23** (2020) Article 20.7.8.

[9] M. Hassani, Enumeration by $e$, in T. M. Rassias and N. J. Daras, eds., *Modern discrete mathematics and analysis: with applications in cryptography, information systems and modelling*, Springer, 2018 227–233.

[10] M. Hassani, On a difference concerning the number $e$ and summation identities of permutations, *J. Inequal. Spec. Funct.*,**12** (2021) 14–22.

[11] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, 2nd ed., Amsterdam, Netherlands, North-Holland, 1993.

[12] A. M. Odlyzko, *Asymptotic enumeration methods*, in *Handbook of combinatorics*, **1, 2**, Elsevier, Amsterdam, 1995 1063–1229.

[13] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert and C. W. Clark (editors), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, 2010.

[14] K. H. Rosen, J. G. Michaels, J. L. Gross, J. W. Grossman and D. R. Shier, *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*, CRC Press, 2000.

[15] M. Z. Spivey, *The art of proving binomial identities*, CRC Press, 2019.

[16] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford University Press, 1975.

[17] E. W. Weisstein, *CRC Concise encyclopedia of mathematics*, 2nd ed., CRC Press, 2003.

[۱۸] م. حسنی، ع. احمدی، جای خالی عدد نپر در کتاب‌های متوسّطه، *ریاضی و جامعه*، **۱** (۱۳۹۳) ۱۳—۲۳.


---


**مهدی حسنی**

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

mehdi.hassani@znu.ac.ir


مهدی حسنی، متولّد مرداد ماه ۱۳۵۸ در شهر زنجان است. وی از رسالهٔ دکترای خود با عنوان «دربارهٔ توزیع توابع حسابی» به راهنمایی مشترک پروفسور مهرداد شهشهانی از ایران و پروفسور ژان‌ـ مارک دیزوئیه از فرانسه در سال ۱۳۸۹ در گرایش نظریهٔ تحلیلی و احتمالاتی اعداد دفاع کرد. در همان سال به عضویت هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه زنجان در آمد، وی در سال ۱۳۹۴ به رتبهٔ دانشیاری ارتقا یافت. حوزه‌های پژوهشی وی شامل نظریه مقدّماتی، تحلیلی و احتمالاتی اعداد، شمارش تحلیلی و کاربرد توابع خاص در موارد فوق است.



http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130416.1468

# Asymptotic expansion of a sequence related to the number **e** and its application in analytical counting of number of paths in full graph

Mehdi Hassani

**Abstract:** In this paper we study the number of distinct paths between any pair of vertices in the complete graph $K_{n+2}$. First we show that the number of these paths is $w_{n+2} = e_n n!$, where $e_n = \sum_{j=0}^{n} 1/j!$ is the partial sum of the series representing the number $e$. Then we obtain an integral representation, similar to the integral representation of the Gamma function, for $e_n$. By using this representation we get an asymptotic expansion for $w_{n+2}$ as follows

$$w_{n+2} = en! - \sum_{k=1}^{r} \frac{c_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

where $r \geq 1$ is any fixed integer and the constants $c_k$ are computable. Moreover, we show that the constant of $O$-term does not exceed $e^2 B_{r+1}$, where $B_{r+1}$ denotes the $r+1$-th Bell number.

**Keywords:** complete graph, the number e, analytic enumeration, asymptotic expansion, bell numbers.

**Mehdi Hassani**

Department of Mathematics, University of Zanjan, University Blvd., Zanjan, Iran.

Email: mehdi.hassani@znu.ac.ir

Communicated by Arireza Abdollahi.

Article Type: Research Paper.

Received: 04/09/2021, Accepted: 28/02/2022.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.130416.1468