ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۶، شماره ۲ (۱۴۰۰)، صص. ۱۷-۱۱

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

ساختاری برای تعمیم دادن گروه‌ها

نصرت اله شجره پورصلواتی

چکیده. در این مقاله، ساختاری جدید برای تعمیم دادن گروه‌ها با محدود کردن عمل دوتایی آن روی زیرمجموعه‌ای از دامنه‌اش ارائه شده است. برای مجموعه ناتهی G، تابع از $G \times G$ به G یک عمل دوتایی نامیده می‌شود. اگر زیرمجموعه‌ای ناتهی از حاصل‌ضرب دکارتی $G \times G$، مانند P درنظر گیریم و عمل دوتایی روی G را به روی P محدود کنیم و آن را با نماد $*$ نشان دهیم، یک عمل دوتایی جزیی روی G به‌دست می‌آوریم. درواقع، وقتی که $P = G \times G$ باشد، آنگاه $*$ یک عمل دوتایی روی G است. بنابراین، وقتی یک عمل دوتایی جزیی داریم، ممکن است برای دو عنصر x و y از مجموعه G، $x * y$ یا $y * x$ یا هردو در G تعریف نشده باشند. این تعمیم، به عمل دوتایی جزیی، با داشتن شرایطی، ساختاری تحت نام گروه جزئی پدید می آورد. دراین تعمیم، بعضی از خصوصیات و تعدادی از قضیه‌ها و نتیجه گیری‌های نظریه گروه‌ها مورد بررسی قرار گرفته و تعمیم داده شده است.

۱. مقدمه

تعمیم های متنوعی روی ساختار گروه‌ها، توسط دانشمندان زیادی و تحت عناوین متناسبی مانند ابرگروه‌ها[1] ، گروه‌های فازی[2]، گروه‌های تعمیم یافته [3] و غیره، که با تغییرات روی عمل دوتایی و یا تغییر در اصول گروه‌ها ارائه شده‌اند. برای مجموعه ناتهی G، تابع از $G \times G$ به G یک عمل دوتایی نامیده می‌شود. اگر زیرمجموعه‌ای ناتهی از حاصل‌ضرب دکارتی $G \times G$، مانند P درنظر گیریم و عمل دوتایی روی G را روی P تحدید کنیم و آن را با نماد $*$ نشان دهیم، یک عمل دوتایی جزیی [4] روی G به‌دست می‌آوریم. درواقع، وقتی که $P = G \times G$ باشد، آنگاه $*$ یک عمل دوتایی روی G است. بنابراین، وقتی یک عمل دوتایی جزیی داریم، ممکن است برای دو عنصر x و y از مجموعه G، $x * y$ یا $y * x$ یا هردو در G تعریف نشده باشند. برای راحتی در نوشتار، علامت $*$ را حذف می‌کنیم، یعنی به‌جای نوشتن x می‌نویسیم: xy. یک مثال از عمل دوتایی جزیی را می‌توان، عمل ترکیب ریخت‌ها [5]، روی مجموعه تمام ریخت‌های یک رسته [6] درنظر گرفت. ممکن است، دو ریخت در رسته، قابلیت ترکیب با یکدیگر را از لحاظ ترتیب ترکیب، داشته یا نداشته باشند.

ایده گروه‌های جزیی [7]، در ارتباط با مفاهیم سیستم‌های همجوشی [8] و سیستم‌های انتقال [9] در کتاب [۱]، و مقاله [۷]، ارائه شده‌اند. مفهوم سیستم‌های همجوشی، برای بررسی نمایش‌های پیمانه‌ای [10]، معرفی شده‌اند. این مفهوم توسط دانشمندان

عبارات و کلمات کلیدی: تعمیم ساختار گروه، ساختار گروه، گروه جزیی.
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۸/۲۷   تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۷

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131518.1478

[1]hypergroups [2]fuzzy groups [3]generalized groups [4]partial binary operation [5]morphisms [6]category [7]partial groups [8]fusion systems [9]transporter systems [10]madular representation

نظریه گروه‌ها و توپولوژی جبری‌ها، برای به‌دست آوردن اثبات راحتی، در رده‌بندی گروه‌های متناهی ساده [11] به‌کار گرفته شده است. چرماک [12]، توانست، زبان رسته‌ای سیستم‌های انتقال دهنده را به زبان جبری تفسیر کند و تحت نام گروه‌های جزیی ترجمه کند. سیستم‌های همجوشی، ابزار مهمی در توپولوژی جبری بوده‌اند که اثباتی بر حدس مارتینو_پریدی [13] هستند. چرماک با تحقیقاتش در این بحث، گروه‌های جزئی را ارائه داد. بنابراین، علاقه به گروه‌های جزئی نیز از طرف توپولوژیست‌ها به‌وجود آمد. یک نمونه از تحقیقات در حال انجام و در چنین جهتی را می‌توان در مقاله [۵] دید.

برای مطالعه بیشتر در مورد گروه‌های جزئی، دو مرجع [۲] و [۳] که هر دو توسط چرماک نوشته شده‌اند، توصیه می‌شود. مرجع [۲]، ارتباط بین این دو مفهوم را فراهم می‌کند و مرجع [۳]، در عوض، با موضعی‌ها [14] بدون نگاه کردن به سیستم‌های همجوشی سروکار دارد. موضعی‌ها، گروه‌های جزئی با ویژگی‌های خاص هستند که با هدفِ، گرفتن اطلاعات از نرمال‌ساز های p - زیرگروه‌های نابدیهی، مدل‌سازی شده‌اند. از آنجایی که طبقه‌بندی گروه‌های ساده متناهی با تجزیه و تحلیل چنین اطلاعاتی به‌دست می‌آید، امیدواری وجود دارد، که اثبات وجود، از طریق سیستم‌های همجوشی و گروه‌های جزئی، ساده‌تر شود.

در مقاله [۵]، مفهوم رسته جهانی [15]، بیان شده است و نشان داده شده است که رسته گروه‌های جزیی، یک رسته جهانی است و شامل رسته گروه‌هاست. در مقاله [۸]، نشان داده شده است که رسته گروه‌های جزیی، کامل [16] و هم_کامل [17] است و این حکم برای رسته گروه‌های جزیی متناهی هم برقرار است.

چرماک، گروه‌های جزیی را در سال ۲۰۱۳ میلادی، به‌صورت رسمی و به‌عنوان تعمیم مفهوم گروه‌ها و در چارچوب سیستم‌های همجوشی معرفی کرد. از همان ابتدا، ترجمه مفاهیم گروه‌ها در چارچوب سیستم‌های همجوشی نقش حیاتی و به سزایی در توسعه این نظریه از دیدگاه جبری ایفا کرده است. نظریه سیستم‌های همجوشی با تعامل با نظریه گروه‌ها، نظریه نمایش گروه‌ها و گروه‌های توپولوژی، به موضوع مهمی در جبر تبدیل شده است. تعریف زیر از مرجع [۳] گرفته شده است.

تعریف ۱.۱. [۳] فرض کنید G یک مجموعه ناتهی و $W = W(G)$، مونوئید آزاد روی G باشد. برای دو کلمه x و y، از مجموعه W، نماد xy، برای الحاق دو کلمه x و y، استفاده می‌شود. فرض کنید $D \subseteq W$، چنان باشد که:

(۱) $G \subseteq D$، (یعنی: Dشامل تمام کلمات با طول ۱ و شامل کلمه تهی است).

(۲) $xy \in D \Longrightarrow x,\ y \in D$.

نگاشت $\Pi : D \longrightarrow G$، یک ضرب نامیده می‌شود، هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

(۳) تحدید نگاشت Π به G، همانند نگاشت همانی باشد، $\Pi|_G = Id_G$.

(۴) $xyz \in D \Longrightarrow x\Pi(y)z \in D,\ \&\ \Pi(xyz) = \Pi(x\Pi(y)z)$

عنصر همانی ضرب Π یعنی $\Pi(\emptyset)$، را با نماد ۱، نشان می‌دهیم. سه تایی $G = (G, D, \Pi)$ با دارا بودن شرایط (۱) (۲)، (۳) و (۴)، یک مونوئید جزیی نامیده شده است. D دامنه و Π ضرب روی سه تایی (G, D, Π) نامیده شده است.

وارونگی یا معکوس روی G، تابع دوسویی روی G، با ضابطه $x \mapsto x^{-1}$، به همراه نگاشت القایی روی W، با ضابطه $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_n^{-1}, x_{n-1}^{-1}, \ldots, x_1^{-1})$ تعریف می‌شود.

(۵) $w \in D \Longrightarrow w^{-1}w \in D,\ \Pi(w^{-1}w) = 1$

با داشتن تمام شرایط فوق، چندتایی $G = (G,\ D,\ \Pi,\ {}^{-1})$ یک گروه جزیی نامیده می‌شود.

توجه دارید که با داشتن شرایط (۱) و (۵) می‌توان نتیجه گرفت، $w \in D \Longrightarrow w^{-1} \in D$ و لذا $(w^{-1})^{-1} = w$.

---

[11] classification of the finite simple groups [12] A. Chermak [13] Martino-Priddy conjecture [14] localities [15] universal category [16] complete [17] cocomplete

مثال ۲.۱. فرض کنید G، یک گروه باشد، در این‌صورت G یک مجموعه ناتهی است و با انتخاب $D = W(G)$، مونوئید آزاد روی G، به همراه نگاشت معکوس $^{-1}$ و ضرب چندمقداری $\Pi : D \longrightarrow G$، با ضابطه

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \cdots x_n$$

چندتایی $G = (G,\ D,\ \Pi,\ -^{1})$ یک گروه جزیی است.

برعکس، اگر $G = (G,\ D,\ \Pi,\ -^{1})$ یک گروه جزیی و $D = W(G)$، آنگاه G، با عمل دوتایی $xy = \Pi(x, y)$ یک گروه است. بنابراین می‌توان تعریف ساده زیر، را از مراجع [۴، ۶] برای گروه جزیی ارائه داد.

تعریف ۳.۱. [۴، ۶] فرض کنید G یک مجموعه ناتهی و $*$ یک عمل دوتایی جزیی روی G باشد اگر برای تمام عناصر $x, y, z \in G$ شرایط زیر برقرار باشد، آنگاه G یک گروه جزئی نامیده می‌شود:

(۱) اگر $xy,\ yz,\ (xy)z,\ x(yz)$ تعریف شده باشند، آنگاه $x(yz) = (xy)z$.

(۲) برای هر $x \in G$ ، عنصر $e \in G$ وجود دارد به طوری‌که xe و ex تعریف می شوند و $xe = ex = x$.

(۳) برای هر $x \in G$، عنصر $x' \in G$ وجود دارد طوری‌که xx' و $x'x$ تعریف می‌شوند و $xx' = x'x = e$.

در تعریف ۳.۱، شرط (۱) شرکت پذیری جزیی، تعریف نیم گروه جزیی [18] را ارائه می‌دهد. شرط (۲) عنصر همانی است که منحصربه فرد هم هست. شرط (۳) وارون عنصر $x \in G$، عنصر $x' \in G$ ارائه شده که منحصر به فرد است و لذا آن را با نماد x^{-1} مشخص می‌کنیم.

مثال ۴.۱. هر گروه دلخواه، یک گروه جزیی هست. اما عکس آن درست نیست. به‌عنوان مثال، اگر فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد، آنگاه مجموعه $\{-n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n-1, n\}$ با عمل جمع معمولی اعداد صحیح، یک گروه جزیی است اما یک گروه نیست.

مثال ۵.۱. فرض کنید G یک گروه و A زیرمجموعه‌ایی ناتهی از G باشد. در این‌صورت مجموعه

$$B = \{e, a, a^{-1} \mid a \in A\}$$

با عمل القایی از گروه G یک گروه جزیی است. اگر حداقل یک عنصر $a \in A$، چنان باشد که: $a^3 \neq e$، آنگاه B گروه نیست.

مثال ۶.۱. فرض کنید M مجموعه تمام ماتریس‌های با تعداد سطر و ستون‌های دلخواه باشند. با قرار دادن 0، به‌جای تمام ماتریس‌های صفر در این مجموعه، با عمل جمع معمولی ماتریس‌ها، یک گروه جزیی حاصل می‌شود که گروه نیست.

مثال ۷.۱. فرض کنید N مجموعه تمام ماتریس‌های مربعی معکوس پذیر، با رتبه دلخواه باشند. با قرار دادن I، به‌جای تمام ماتریس‌های واحد از هر مرتبه در این مجموعه، با عمل ضرب معمولی ماتریس‌ها، یک گروه جزیی حاصل می‌شود که گروه نیست.

۲. برخی خواص و ویژگی گروه جزیی

در این بخش، برخی خواص و ویژگی گروه جزیی، مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. تعدادی از تعاریف و قضایای نظریه گروه را برای گروه جزیی ارائه داده و درستی یا نادرستی آنها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و S یک زیرمجموعه ناتهی از G باشد که با عمل جزیی روی G تشکیل یک گروه جزیی دهد در این‌صورت S را یک زیرگروه جزیی G نامند و از نماد $S \leq G$ استفاده می‌کنیم.

[18] partial semigroup

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131518.1478

قضیه ۲.۲. *فرض کنید G یک گروه جزیی و S یک زیرمجموعه ناتهی از G باشد. دراین‌صورت S یک زیرگروه جزیی G است، اگر و تنها اگر، $e \in S$ و برای هر $s \in S$، وارون آن، s^{-1} در S باشد.*

اثبات. اگر $S \le G$، آنگاه شامل عضو همانی و وارون هر عضو s در S، یعنی s^{-1} هم در S وجود دارد.
اکنون طرف برگشت را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x, y, z \in S$ باشند در این‌صورت $x, y, z \in G$ و لذا خاصیت (۱)، تعریف ۱.۱، برقرار است. طبق فرض $e \in S$، لذا خاصیت (۲) تعریف ۱.۱، برقرار است و برای هر $s \in S$، وارون آن، s^{-1} در S می باشد. بنابراین، S یک گروه جزیی است، پس $S \le G$. □

قضیه ۳.۲. *فرض کنید G یک گروه جزیی ، x و y عناصری از G باشند. دراین‌صورت $x = (x^{-1})^{-1}$ و اگر ضرب‌های $xy, (xy)y^{-1}, y^{-1}x^{-1}, (xy)y^{-1}x^{-1}, x^{-1}(xy), y^{-1}x^{-1}(xy)$ در G تعریف شده باشند، آنگاه $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.*

اثبات. با توجه به اینکه $e = x^{-1}x = xx^{-1}$ بنابراین $x = (x^{-1})^{-1}$. برای اثبات قسمت دوم، ملاحظه می‌شود که:

$$(y^{-1}x^{-1})(xy) = y^{-1}(x^{-1}(xy)) = y^{-1}(x^{-1}x)y) = y^{-1}(ey) = y^{-1}y = e$$

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = ((xy)y^{-1})x^{-1} = (x(yy^{-1}))x^{-1} = (xe)x^{-1} = xx^{-1} = e.$$

بنابراین حکم برقرار است. □

قضیه ۴.۲. *فرض کنید G یک گروه جزیی و S، یک زیرگروه جزیی G باشد، مجموعه*

$$C_G(S) := \{g \in G \mid gx = xg, \text{برای تمام } x\text{ها در } S \text{ که } xg \text{ و } gx \text{ تعریف شده باشند}\}$$

یک زیرگروه جزیی G است. آن را مرکز ساز زیرگروه جزیی S در G نامیده می‌شود.

اثبات. می‌دانیم که برای هر $x \in S$، $ex = xe$، بنابراین $e \in C_G(S)$. اکنون فرض کنید $g \in C_G(S)$ باشد، پس $g^{-1} \in G$ وجود دارد در این‌صورت برای $x \in S$، وارون آن یعنی $y = x^{-1}$ در S قرار دارد و همچنین $gy = yg$ لذا داریم:

$$xg^{-1} = y^{-1}g^{-1} = (gy)^{-1} = (yg)^{-1} = g^{-1}y^{-1} = g^{-1}x,$$

بنابراین $g^{-1} \in C_G(S)$. لذا $C_G(S)$ یک زیرگروه جزیی G است. □

تبصره ۵.۲. زیرگروه جزیی $C_G(G)$ را مرکزساز گروه جزیی G نامیده‌اند.
درحالتی که $G = C_G(G)$، باشد، G را یک گروه جزیی آبلی نامیم.

قضیه ۶.۲. *فرض کنید G یک گروه جزیی باشد و $\{S_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیرگروه جزیی های G باشند. آن گاه مجموعه های $\cup_{i\in I}S_i$ و $\cap_{i\in I}S_i$ زیرگروه جزیی هستند، که به ترتیب کوچکترین زیرگروه جزیی شامل هر عضو خانواده $\{S_i\}_{i\in I}$ و بزرگترین زیرگروه جزیی درون هر عضو خانواده $\{S_i\}_{i\in I}$ هستند.*

اثبات. با توجه به اینکه برای هر $i \in I$، $e \in S_i$، پس داریم: $e \in \cup_{i\in I}S_i$ و $e \in \cap_{i\in I}S_i$. اکنون فرض کنید $x \in \cup_{i\in I}S_i$ پس عنصر i چنان موجود است که $x \in S_i$ و از اینکه S_i، زیرگروه جزیی است، پس $x^{-1} \in S_i$ و در نتیجه $x^{-1} \in \cup_{i\in I}S_i$. بنابراین، $\cup_{i\in I}S_i$، زیرگروه جزیی است.
به‌همین ترتیب، اگر فرض کنید $x \in \cap_{i\in I}S_i$ پس برای هر عنصر $i \in I$ داریم: $x \in S_i$ و از اینکه S_i، زیرگروه جزیی است، پس $x^{-1} \in S_i$ و در نتیجه $x^{-1} \in \cap_{i\in I}S_i$. بنابراین، $\cap_{i\in I}S_i$، زیرگروه جزیی است. □

قضیه ۷.۲. *فرض کنید G یک گروه جزیی و A یک زیر مجموعه G باشد. مجموعه $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$ را تعریف می‌کنیم، آن گاه مجموعه $< A >= A \cup A^{-1} \cup \{e\}$ که در آن e عضو خنثای G است با عمل القایی G یک گروه جزیی است. $< A >$ را زیرگروه جزیی مینیمال تولید شده توسط A نامیده‌اند. تمام ضرب‌های متناهی از عناصر A و A^{-1} به همراه عنصر همانی یک گروه جزیی را در G می‌سازند و لذا تشکیل یک زیرگروه جزیی شامل A، در G می‌دهد. این زیرگروه جزیی را زیرگروه جزیی ماکسیمال تولید شده توسط A نامیده می‌شود و آن را با نماد $< A >^*$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه $G \leq < A >^* \leq < A > \leq \{e\}$.*

اثبات. مجموعه‌های $< A >$ و $< A >^*$، هر دو شامل عنصر همانی e هستند و لذا ناتهی و زیرمجموعه G هستند. فرض کنید $x \in < A >$ $e \neq x$ در این‌صورت $x \in A$ یا $x \in A^{-1}$، اگر $x \in A$، آنگاه $x^{-1} \in A^{-1}$ و اگر $x \in A^{-1}$، آنگاه $x^{-1} \in (A^{-1})^{-1} = A$ بنابراین در هر صورت، $x^{-1} \in < A >$، پس $< A >$ زیرگروه جزیی است. اکنون فرض کنید $x = x_1x_2\cdots x_n$، حاصل‌ضرب متناهی عناصری از $A \cup A^{-1}$ در G باشند، در این‌صورت: $x^{-1} = x_n^{-1}x_{n-1}^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}$ عنصری در G است و لذا در $< A >^*$ قرار دارد. پس $< A >^*$، یک زیرگروه جزیی است. □

تبصره ۸.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و x عنصری از G باشد. در این‌صورت $< \{x\} >^*$ یک زیرگروه جزیی دوری G نامیده می‌شود. درحالتی‌که $G =< \{x\} >^*$، آنگاه G را یک گروه جزیی دوری نامیم. توجه کنید که ممکن است زیرگروه جزیی یک گروه جزیی دوری، دوری نباشد. به‌عنوان مثال، گروه جزیی مثال ۲.۱. دوری است و توسط $\{1\}$ تولید می‌شود. اما برای $n > 3$ زیرگروه جزیی $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$ گروه جزیی دوری نیست.

قضیه ۹.۲. *هر گروه جزیی دوری، یک گروه جزیی آبلی است. اما عکس آن درست نیست، یعنی، گروه جزیی‌های آبلی وجود دارند که دوری نیستند.*

اثبات. فرض کنید $G =< x >^*$، گروه جزیی دوری باشد. اگر a و b دو عنصر G باشند. در این‌صورت اعداد صحیح n و m چنان موجودند که $a = x^n$ و $b = x^m$. اکنون داریم:

$$ab = x^nx^m = x^{n+m} = x^{m+n} = x^mx^n = ba.$$

در تبصره ۸.۲، نشان دادیم که گروه جزیی آبلی $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$ گروه جزیی دوری نیست. □

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید G یک گروه جزیی و x عنصری از G باشد. اگر عدد صحیح و مثبت، n، چنان باشد که برای عنصر $x \neq e$، $x^n = e$ تعریف شده باشد و n کوچکترین عدد مثبت باشد که $x^n = e$ آنگاه n را مرتبه x نامیده و با نماد $o(x)$ نشان می‌دهیم. در غیر این‌صورت مرتبه x نامتناهی تعریف می‌شود.

تبصره ۱۱.۲. قضیه لاگرانژ برای گروه جزیی ها، ممکن است درست نباشد. ملاحظه می‌شود که اگر k و n دو عدد طبیعی باشند که نسبت به هم اول باشند و $1 \neq k < n$، آنگاه گروه جزیی $G = \{-n, -n+1, \ldots, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$ با عمل جمع معمولی اعداد صحیح، دارای زیرگروه جزیی $S = \{-k, -k+1, \ldots, 0, 1, \ldots, k-1, k\}$ است که $card(S)$ نمی‌تواند $card(G)$ را عاد کند. همچنین ملاحظه می‌شود که $o(1) = \infty \neq card(< \{1\} >^*) = n$. به‌عبارت بهتر، ممکن است مرتبه عنصر یک گروه جزیی متناهی، عدد اصلی مجموعه زمینه گروه جزیی را نتواند بشمارد.

۳. نتایج

در این مقاله، تعمیمی از ساختار عمل دوتایی، روی گروه‌ها را با محدود کردن عمل دوتایی، روی زیرمجموعه‌ای ناتهی از دامنه‌اش مرور کردیم. تعدادی از تعاریف و قضایای نظریه گروه‌ها را برای این تعمیم، به همراه تعدادی مثال، بررسی کردیم. پیشنهاد می‌شود سایر تعاریف و قضایای کلاسیک نظریه گروه‌ها را برای این تعمیم بررسی نمود.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131518.1478

مراجع

[1] M. Aschbacher, R. Kessar and B. Oliver, *Fusion systems in algebra and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **391**, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[2] A. Chermak, Finite localities I, 2021.

[3] A. Chermak, Fusion systems and localities, *Acta Math.*, **211** (2013) 47–13.

[4] Z. Çiloğlu Şahin and Y. Çeven, A Generalization of Groups: Partial Groups, *Emerging Applications of Differential Equations and Game Theory*, (2020) 1–12.

[5] A. Dìaz Ramos, R. Molinier and A. Viruel, Path partial groups, 2021.

[6] S. Jekel, Partial Groups, Technical Report, Northeastern University, (2015) 1 – 6.

[7] B. Oliver, Existence and uniqueness of linking systems: Chermak's proof via obstruction theory, *Acta Math.*, **211** (2013) 141 – 175.

[8] E. Salati, Limits and colimits, generators and relations and relattions of partial groups, 2022.

نصرت اله شجره پورصلواتی
بخش ریاضی محض، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.
salavati@uk.ac.ir

نصرت اله شجره پورصلواتی، عضو هیأت علمی و دانشیار بخش ریاضی محض، دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانش آموخته کارشناسی ریاضی محض، از دانشگاه شهید باهنر کرمان و دکترای ریاضی محض از دانشگاه تهران است. علائق پژوهشی وی، جبر، ساختارهای جبری، گروه و تعمیم آنها است.

A structure for generalizing groups

Nosratollah Shajareh Pourslavati

Abstract: In this paper, a new structure for generalizing groups by limiting its binary operation to a subset of its domain is presented. For the set G, the function from $G \times G$ to G is called a binary operation. If we consider a subset of the Cartesian product $G \times G$, such as P, and limit the binary operation on G to P and denote it by the symbol $*$, we obtain a partial binary operation on G . In fact, when $P = G \times G$, then $*$ is a binary operation on G . Therefore, when we have a partial binary operation, it may be $x * y$ or $y * x$ or both are not defined in G. In this generalization, some characteristics and a number of theorems and conclusions of group theory are examined and generalized.

Keywords: Generalized group structure, group structure, partial group.

Nosratollah Shajareh Pourslavati
Department of Pure Mathematics, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.
Email: salavati@uk.ac.ir

Communicated by Alireza Abdollahi.
Article Type: Research Paper.
Received: 18/11/2021, Accepted: 16/02/2022.

 http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2022.131518.1478