

دکتر محمود لشکری زاده بمی: زندگی و آثار

سعید مقصودی



در پاییز ۱۳۹۸

جامعه ریاضی کشور در ۲۸ مهر ۱۴۰۰ دکتر محمود لشکری زاده بمی را از دست داد. او به تصدیق دوستان، همکاران، و دانشجویانش یک ویژگی بارز داشت: پیوسته و آرام در کار تحقیق. بارها از زبان خود او، با آن خنده ملیح همیشگی و تهلهجه شیرین کرمانی‌اش که بعد از این همه سال هم صحبتی با اصفهانی‌ها تغییری نیافته بود، شنیدم که می‌گفت: «مقاله‌های آدم مثل بچه‌های آدم هستند و همه آن‌ها را دوست دارم.» و چه سخن صائبی! خوش‌تر می‌داشت که کار تحقیق را به صورت فردی و مستقل انجام دهد مگر در موارد خاص. همیشه در جستجوی آثار جدید پیش‌قراولانی مثل لائو، پیم، اولگر، نیب، قهرمانی، لوزرت و دیگران در حوزه آنالیز هارمونیک روی گروه‌های توپولوژیک بود تا نتایج آن‌ها را برای شیء محبوب سراسر عمرش، یعنی نیمگروه‌های توپولوژیک پایه^۱، بیازماید. در هر سه باری که به فرصت مطالعاتی رفته بود (یکی در ۱۳۶۸ به دانشگاه شفیلد انگلستان به دعوت بیکر و دوبار به دانشگاه آلبرتای کانادا در ۱۳۷۴ و ۱۳۸۱ به مدت یکسال و به دعوت لائو) مقالات، کتاب‌ها، و موضوع‌های جدید در حوزه تخصصی خود را به ارمغان آورده بود. انتشار هر مقاله

در مجله‌ای تازه، برایش طعم یک کشورگشایی را داشت. آثارش تقریباً همه در جای درخورشان منتشر شده‌اند. به کتاب‌هایش عشق می‌ورزید و تا اطمینان پیدا نمی‌کرد آن‌ها را به امانت نمی‌سپرد. به جز به قدر ضرورت به کار آموزش و اجرایی نپرداخت. جزو آن دسته بود که ضرورتی در نگارش متون علمی به زبان فارسی نمی‌بینند، و به همین دلیل هیچ اثر علمی از او به زبان فارسی موجود نیست. باری، پس از این همه، جسم او همچون طبع آرامش در منزلگاهی در شهر کرمان و در کنار مادر گرامی‌اش آرامش ابدی یافت. در زمان حیاتش یک مصاحبه از او در هفته‌نامه طلوع بم (مورخ ۴ دی ۱۳۸۷) منتشر شد. آنچه در زیر می‌آید مروری است بر زندگی و آثار علمی او از زبان خانواده و بعضی دوستان و همکارانش. در اینجا لازم می‌دانم از فرزند ایشان (دکتر میلاد لشکری زاده بمی) و همسر آن مرحوم (سرکار خانم غمخوار) که با سعه صدر سوالات بنده را پاسخ گفتند و عکس‌هایی را از آلبوم خانوادگی در اختیارم گذاشتند سپاسگزاری کنم. همچنین بر خود لازم می‌دانم از استادان گرامی ام دکتر جعفر زعفرانی، دکتر علیرضا مدقالچی و دکتر علی رجالی که تقاضای بنده را برای نوشتن مطالبی درباره آن مرحوم پذیرفتند تشکر کنم. صورت پیراسته متن را مدیون دکتر رسول نصر اصفهانی و دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی هستم.

^۱ foundation topological semigroup

۱. از زبان خانواده

از اینکه قبول زحمت فرمودید بسیار سپاسگزارم. ضمن معرفی خودتان، بفرمایید که استاد در چه تاریخی و کجا متولد شدند؟ مختصری بفرمایید از خانواده پدری ایشان و اینکه استاد فرزند چندم خانواده بودند و آیا اعضای دیگر خانواده ایشان هم تحصیلات عالی دارند؟

این جانب میلاد لشکری زاده بمی فرزند مرحوم دکتر محمود لشکری زاده بمی هستم. ایشان متولد ۶ اسفند ۱۳۲۷ در محله باغدشت شهر بم هستند و پدر ایشان تاجر و باغدار و مادرشان خانه دار و دارای ۸ فرزند، ۴ پسر و ۴ دختر، بودند. ایشان فرزند سوم و اولین فرزند پسر بودند. طبق گفته دوستان و فامیل هایشان از کودکی بسیار درس خوان و پرتلاش بودند و نه تنها در درس بلکه در کمک به پدر در انجام امور بیرون از منزل، پیش قدم و متعهد بودند. به طور کلی در قبال پدر و مادر و خواهرها و برادرها و بعد از ازدواج نیز در قبال همسر و فرزندان و خانواده همسر و حتی همشهریان خودشان احساس مسئولیت و دلسوزی بی نظیری داشتند. به گونه ای که پس از درگذشتان همه این افراد از حمایت و پشتیبانی ایشان همانند یک پدر برای فامیل یاد می کردند. در مورد تحصیلات خانواده شان، عرض کنم که برادران ایشان دکتر

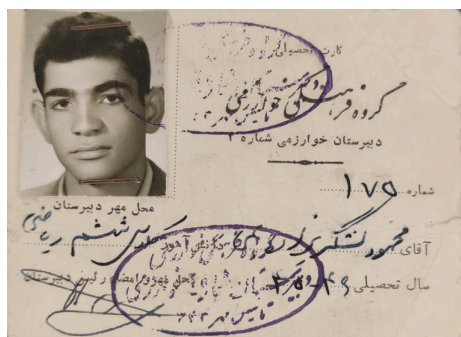


در کنار خانواده (آلبرتا، ۱۳۷۴)

محمدرضا لشکری زاده فوق تخصص جراحی و مهندس مصطفی لشکری زاده فوق لیسانس مهندسی تاسیسات از انگلستان دارند که به توصیه و تشویق ایشان به آنجا رفتند و پس از اتمام تحصیلات به ایران برگشتند و مشغول خدمت شدند؛ برادر دیگر ایشان احمد لشکری زاده دبیر زمین شناسی دبیرستان های بم و خواهرشان دبیر زیست شناسی دبیرستان های بم بودند که به جز دکتر محمدرضا بقیه بازنشسته شده اند. به لطف خدا و با تشویق های ایشان هم اکنون تمام برادرزاده ها و خواهرزاده های ایشان تحصیلات عالی دارند و اغلب پزشک یا دندانپزشک و یا دکتر در رشته های دیگر دارند و به عنوان استاد در دانشگاه های کشور و یا در سایر سازمان ها به وطن خود خدمت می کنند. به توصیه اکید ایشان همگی در کشور خود مانده اند و علی رغم موج مهاجرت جوانان تحصیل کرده به کشورهای دیگر، هیچ یک به خارج از کشور مهاجرت نکرده اند. به فرزندان خود نیز سفارش می کردند که به غربت نروند و به کشور خود خدمت کنند. به گونه ای که یکی از دختران ایشان که دوره دکترا را پس از اخذ مدرک کارشناسی ارشد از دانشگاه تهران در خارج گذرانده بود، به کشور برگشت و در وطن خود مشغول به کار شد.

در صورتی که مقدور باشد مختصری از تحصیلات ابتدایی تا دبیرستان ایشان بفرمایید که در چه شهری و مدرسه‌ای بودند؟ هیچ وقت صحبت می‌کردند که چگونه به ریاضی علاقه‌مند شدند؟

دوران ابتدایی را در دبستان سعدی و دوران دبیرستان به‌جز کلاس ششم متوسطه را در دبیرستان امیری یا همان افخم شهر بم گذراندند و برای کلاس ششم متوسطه یا دوازدهم به‌تنهایی به تهران رفتند و با وجود اینکه تا آن زمان از خانواده دور نشده بودند، با سختی‌های فراوانی که در آن زمان برای دانش‌آموزی تنها در شهر غریب وجود داشت، با پشتکار و هدفی که داشتند، در دبیرستان خوارزمی تحصیل کردند و دیپلم ریاضی را در سال ۱۳۴۷ اخذ نمودند و همان سال در رشته ریاضی دانشگاه اصفهان پذیرفته شدند.

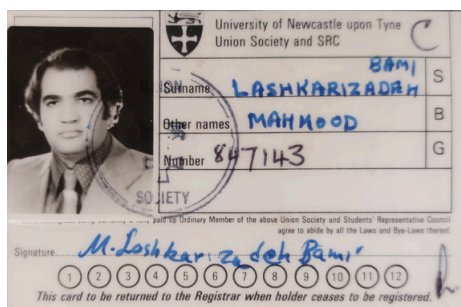


خودشان تعریف می‌کردند که کلاس ۱۲ در اتاقی که در تهران اجاره کرده بودند به‌سختی می‌شد درس خواند، چون صاحب‌خانه ساعت ۱۰ شب برق را قطع می‌کرده تا هزینه برق زیاد نشود و بنابراین ناچار به استفاده از چراغ گردسوز برای انجام تکالیف و خواندن دروس آن سال حساس و مهم بودند. با این حال آخر سال با رتبه اول توانستند سال آخر دبیرستان را به پایان ببرند. مسائلی که ایشان در زمینه ریاضی در آن سال طرح می‌کردند، در مجله‌ای به نام «یکان» منتشر می‌شده و از همان زمان، علاقه و استعداد ایشان در زمینه ریاضی بیشتر نمایان شد.

تحصیلات دانشگاهی را در چه سالی و در چه دانشگاهی انجام دادند؟

دوره کارشناسی رشته ریاضی را در سال ۱۳۴۷ در دانشگاه اصفهان آغاز کردند و در سال ۱۳۵۰ مقطع کارشناسی را با کسب رتبه اول به اتمام رسانده و وارد مقطع کارشناسی ارشد ریاضی در دانشگاه شیراز شدند و در سال ۱۳۵۳ با کسب رتبه اول در این مقطع به اصفهان برگشته و به استخدام دانشگاه اصفهان درآمدند.

در چه سالی برای ادامه تحصیل به خارج تشریف بردند و آیا قبل از آن در جایی استخدام شده بودند؟



پس از اینکه در سال ۱۳۵۳ به استخدام دانشگاه اصفهان درآمدند، به مدت ۴ سال به‌عنوان مربی در دانشگاه تدریس کردند و در سال ۱۳۵۷ برای ادامه تحصیل به نیوکاسل انگلستان رفتند و چون قبلاً در زمینه جبر کار کرده بودند و تصمیم به ادامه در رشته آنالیز داشتند، یک سال در نیوکاسل دوره جدید ارشد را مجدداً طی کردند و سال بعد در دانشگاه شفیلد دوره دکترا را شروع کردند. ولی به دلیل وقوع انقلاب، بورس‌ها قطع شده بود و باید به ایران برمی‌گشتند که چون کار علمی‌شان شروع شده بود و خوب پیش می‌رفت، با هزینه خود در انگلیس ماندند و دکترای خود در زمینه آنالیز ریاضی را به اتمام رساندند و در سال ۱۳۶۱ با وجود قبولی در آزمون استخدامی

یکی از دانشگاه‌های کانادا به ایران و دانشگاه اصفهان برگشتند تا طبق عقیده خود به هم‌وطنان خود خدمت کنند نه به بیگانه.

سرکار عالی ضمن معرفی خودتان بفرمایید در چه سالی با ایشان آشنا شدید و آیا در زمان تحصیل در خارج کشور همراه ایشان بودید؟ مختصری از آن زمان بفرمایید.

این جانب مهنوش غمخوار هستم که افتخار همسری ایشان را به مدت ۳۸ سال داشتم و پس از بازگشت ایشان از انگلستان به ایران، در مردادماه سال ۱۳۶۲ به‌واسطه معرفی یکی از استادان، که با ایشان دوست بودند و با همسرشان که با خانواده بنده آشنایی داشتند و در پیوند ازدواج ما نقش مهمی ایفا کردند، با ایشان ازدواج کردم. در آن زمان بنده در مقطع کارشناسی فیزیک در دانشگاه اصفهان درس می‌خواندم و بعد از فارغ‌التحصیلی به‌عنوان دبیر فیزیک مشغول به کار شدم. در دوران تحصیل بسیار با من همکاری می‌کردند تا بتوانم با حساسیتی که در درس خواندن داشتم این دوره را با وجود فرزندی که خداوند در سال ۱۳۶۳ به ما عطا کرده بود با آرامش بگذرانم که از این بابت همیشه سپاسگزار و مدیونشان هستم.



روز فارغ التحصیلی در مقطع دکترا از دانشگاه شفیلد انگلستان

در چه سالی به ایران برگشتند و چرا در اصفهان ماندگار شدند؟

ایشان در سال ۱۳۶۱ به ایران برگشتند و چون همکاران و دوستان قدیمی در اصفهان و دانشگاه اصفهان بودند و نیز به دلیل علاقه‌شان به این دانشگاه که استخدام‌شان در آنجا انجام شده بود و همچنین ازدواج در این شهر، تصمیم گرفتند که در این شهر اقامت کنند. مختصری درباره فرزندان استاد بفرمایید.

از ایشان ۳ فرزند به یادگار مانده: دو دختر و یک پسر. فرزند اول مهکامه لشکری‌زاده بمی که دوره کارشناسی مهندسی شیلات را در دانشگاه صنعتی اصفهان طی کرد و با کسب رتبه ۷ کنکور ارشد در دانشگاه تهران این دوره را سپری کرد و سپس در دانشگاه UPM دکترای منابع طبیعی شاخه شیلات را اخذ کرد و به ایران برگشت و هم‌اکنون در واحد تحقیق و توسعه شرکتی مرتبط با رشته خود مشغول به کار است. فرزند دوم مهسایه لشکری‌زاده بمی متخصص دندانپزشکی است و هم‌اکنون دوره طرح تخصصی را می‌گذراند. فرزند سوم میلاد لشکری‌زاده بمی که ایشان نیز دندانپزشک و مشغول به کار در حرفه خود است. دامادهای ایشان نیز دکتر علی ماهانی (استاد برق و الکترونیک دانشگاه شهید باهنر کرمان) و دکتر بهشاد مفید (جراح مغز و اعصاب) می‌باشند.

اوقات فراغت استاد چگونه می‌گذشت؟ آیا به‌جز ریاضیات به کار و سرگرمی دیگری علاقه‌مند بودند؟

اوقات فراغت مرحوم دکتر بیشتر به تحقیق در رشته خود و مطالعه و کار علمی با استادان معروف دنیا در رشته آنالیز هارمونیک و نیز دانشجویان دوره دکترا می‌گذشت. ایشان همچنین به رفتن به کوه و پیاده‌روی و معاشرت، به‌خصوص با خانواده و فامیل، بسیار پایبند و علاقه‌مند بودند و از بازی و تفریح با فرزندان نیز غافل نمی‌شدند. به طور کلی، اوقات فراغتشان به این امور اختصاص داشت. دفتر کاری در طبقه پایین منزل برای خود در نظر گرفته بودند که لبریز از کتاب‌های معروف و مرجع ریاضی بود و به آن‌ها عشق می‌ورزیدند و زمان زیادی را با آن‌ها سپری می‌کردند.



در کنار جمعی از استادان: (نشسته از راست) دکتر بیرشد، پروفیسور پالیس، دکتر گوپتا، و پروفیسور لائو؛ (ایستاده از راست) دکتر نویختیان، دکتر پوریای ولی، دکتر اعظم، دکتر رجالی، دکتر توکلی، دکتر لشکری زاده، (شناخته نشد)، دکتر علیخانی، دکتر زعفرانی، دکتر طالبی، دکتر انشایی، دکتر محمدی، دکتر خاتون آبادی، آقای ناهید، و دکتر دانایی (اصفهان، ۱۳۷۱)

به نظر سرکار عالی، ویژگی بارز ایشان به عنوان همسر و پدر خانواده چه بود؟



ایشان بسیار رقیق القلب و حساس و مهربان بودند، همچنین بسیار متواضع و با صداقت و آرام. تحصیل فرزندان در مقاطع بالا برایشان بسیار اهمیت داشت. از آن‌ها می‌خواستند که بسیار جدی درس بخوانند و به بچه‌ها از بچگی تفهیم کرده بودند که تحصیلات عالی باید برایشان به مراتب مهم‌تر از کسب درآمد باشد. در ضمن به روابط اعضای خانواده بسیار اهمیت می‌دادند و حتما زمانی در روز را به صحبت و دورهمی با همسر و فرزندان و تبادل نظر در مورد مسائل مختلف اختصاص می‌دادند. بعد از شاغل شدن بنده هم، از من خواستند که هیچ‌گاه اضافه کار نداشته باشم و ضمن حضور در جامعه بقیه اوقات را به نظارت بر درس فرزندان و در کنار خانواده بگذرانم که با کمال میل قبول کردم.

پس از بازنشستگی روزگار چگونه می‌گذراندند؟ فعالیت خاصی انجام می‌دادند؟ اوضاع جسمانی ایشان در سال‌های آخر چگونه بود؟

پس از بازنشستگی که بعد از ۴۳ سال خدمت در دانشگاه در بهمن ۱۳۹۶ انجام شد، متأسفانه سه الی چهار ماهی بیشتر طول نکشید که در تاریخ ۵ خرداد ۱۳۹۷ دچار سکته مغزی شدند و با تلاش‌های فراوانی که در جهت بهبودشان انجام دادیم، دوباره

در حاشیه پنجمین دوره کنفرانس ریاضی (کرمانشاه، ۱۳۵۳)

توانستند راه بروند، اما نه مثل قبل، بلکه نیاز به همراهی داشتند. به دلیل دیابت و سکنه مغزی و کسالت، فعالیت علمی‌شان کمتر شد و روابط با فامیل و دوستان را بیشتر کردیم تا روحیه‌شان حفظ شود، ولی متأسفانه از شروع سال ۱۴۰۰ تا زمان فوت که ۲۸ مهرماه ۱۴۰۰ بود، چندین بار سکنه‌های مغزی کوچک و متوالی برای‌شان اتفاق افتاد به گونه‌ای که داروها و اقدامات پزشکی دیگر پیش‌گیرنده و موثر نبود. اما تا مرداد ۱۴۰۰ توانستیم هر روز ایشان را به پیاده‌روی در پارک ببریم که در آنجا برادرانشان با همسران مهربانشان به ما ملحق می‌شدند و بدین‌صورت همگی تلاش می‌کردیم که از نظر روحی و جسمی ایشان را تقویت کنیم و فکر می‌کنم همین‌کار باعث شد که سه سال و نیم پس از سکنه اصلی از وجود ایشان بیشتر بهره‌مند شویم. امیدوارم همان‌طور که در این دنیا برای ما آرامش و امنیت فراهم کرده بودند، خداوند آسایش و آرامش در دیار باقی برای‌شان فراهم کند و روانشان همواره شاد باشد که خود منشا خیر و برکت و انسانی بسیار بخشنده و باگذشت بودند.

در پایان از اینکه این فرصت در اختیار خانواده ایشان قرار داده شد که از خصوصیات منحصر به فرد و فضایل اخلاقی و وطن‌دوستی ایشان یاد شود، کمال تشکر و امتنان را داریم. راهش پر رهرو و نامش جاودان باد.



در کنار جمعی از استادان گروه ریاضی دانشگاه اصفهان: (ایستاده از راست) آقای زینی، دکتر محمدی، آقای اصفهانی، آقای ناهید، و آقای پردل؛ (نشسته از راست) دکتر لشکری‌زاده و دکتر زعفرانی

۲. از زبان دکتر جعفر زعفرانی

بسم الله الرحمن الرحيم. وَبَشِّرِ الصَّابِرِينَ الَّذِينَ إِذَا أَصَابَتْهُمُ مُصِيبَةٌ قَالُوا إِنَّا لِلَّهِ وَإِنَّا إِلَيْهِ رَاجِعُونَ. آشنایی من با مرحوم دکتر محمود لشکری‌زاده به سال ۱۳۴۸ برمی‌گردد. در آن موقع دکتر، دانشجوی مستعد کارشناسی رشته ریاضی بودند و من دوران طرح سربازی را در دانشگاه اصفهان می‌گذراندم. در طی دو سالی که از تحصیل ایشان در دوره کارشناسی مانده بود با ایشان آشنایی کامل داشتم؛ در آن موقع مرحوم آقای دکتر وصال از دانشگاه شیراز (پهلوی سابق) به اصفهان جهت تدریس دروس آنالیز ریاضی تشریف می‌آوردند و با توجه به توان علمی دانشجویان در سال اول آقای دکتر عبدالحمید ریاضی و سال بعد آقای دکتر محمود لشکری‌زاده را، که هر دو شاگردهای اول رشته ریاضی بودند، تشویق به ادامه تحصیل در دانشگاه شیراز نمودند. من سال ۱۳۵۱ جهت ادامه تحصیل به خارج از کشور رفتم، وقتی برگشتم در پاییز سال ۱۳۵۵ خوشبختانه آقای دکتر لشکری‌زاده و یک نفر دیگر از دانش‌آموختگان دانشگاه شیراز، آقای دکتر محمدعلی انصاری را که با هم، هم‌اتاق بودند ملاقات کردم. در طول یک‌سال و نیم قبل از اعزام به خارج در خدمت ایشان بودم. آقای دکتر لشکری‌زاده در سال ۱۳۵۷ با بورس تحصیلی عازم انگلستان شدند و در سال ۱۳۶۱ با موفقیت تمام به اصفهان برگشتند.

زننده یاد لشکری زاده مقالات متعددی در زمینه های آنالیز هارمونیک و آنالیز تابعی در مجلات معتبر به چاپ رسانیده اند؛ طبق گوگل اسکولار ۶۷ مقاله ارزنده که تاکنون برای ۶۲ عنوان آن در متمتیکال ریویوز گزارش مروری موجود است.

اما در مورد خصوصیات و سجایای اخلاقی و علمی مرحوم دکتر لشکری زاده: من همیشه ایشان را فردی علمی و از نظر اخلاقی همواره مدافع علم و ریاضی به معنای اخص آن می دانم. پیشنهادات ارزنده ایشان در جهت ارتقاء علمی گروه همواره راهگشا بوده است، هیچ وقت تملق کسی را نمی گفت و صادقانه صحبت می کرد. روحش شاد.

در اینجا لازم می دانم از طرف خود و همکاران به خانواده محترم این عزیز از دست رفته صمیمانه تسلیت عرض نمایم. به بنده نیز از طرف تعدادی از همکاران ماموریت داده شده است که ضمن ذکر سجایای اخلاقی و علمی این بزرگ مرد به خانواده مرحوم دکتر لشکری زاده مراتب تسلیت آنان را به حضورشان عرض نمایم.

- آقای دکتر واعظ پور (رئیس سابق انجمن ریاضی ایران، استاد دانشگاه صنعتی امیرکبیر)
- آقای دکتر احمد پاریسیان (رئیس سابق شورای عالی برنامه ریزی، استاد دانشگاه تهران)



خداحافظی دکتر لشکری زاده و دکتر انصاری با همکاران گروه ریاضی قبل از اعزام به انگلستان (۱۳۵۷)



در اردوی دانشجویان شبانه دانشگاه اصفهان قبل از اعزام به انگلستان (۱۳۵۶)



دیدار با خانواده دانشجوی شهید در شاهین شهر



پروفسور پالیس رئیس اتحادیه ریاضی دانان جهان، مرحوم دکتر بیرشت و دکتر گوپتا همراه با اعضای گروه ریاضی در محوطه دانشگاه اصفهان



هیئت داوران اولین دفاعیه دکترای ریاضی (آنالیز تابعی) دانشگاه اصفهان: (به ترتیب از چپ) مرحوم دکتر عظیمی، دکتر زعفرانی، دکتر نیکنام، مرحوم دکتر صدیقی، دکتر علیخانی، مرحوم دکتر لشکریزاده، دکتر موحدی‌نیا، و آقای علیمحمدی

- آقایان دکتر اسدالله نیکنام، دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم و دکتر کامیار وحیدیان (استادان دانشگاه فردوسی مشهد)
- آقای دکتر بیژن زنگنه (استاد دانشگاه صنعتی شریف)
- آقای دکتر محسن تقوی (استاد دانشگاه شیراز) و تعداد دیگری از شاگردان این بزرگوار و پیشکسوت ریاضی کشور

از همکاران ایرانی در آمریکا:

- آقای دکتر محمدعلی انصاری (از دانشگاه پنسیلوانیای آمریکا) و آقای دکتر عبدالحمید ریاضی و دکتر علیخانی (از دیگر دانشگاه‌های آمریکا)

۳. از زبان دکتر علیرضا مدقالچی

یاد و خاطری از یک دوست و ریاضیدانی برجسته و پرتلاش

در سخنرانی افتتاحیه سمینار آنالیز هارمونیک در دانشگاه صنعتی اصفهان اشاره کردم که یکی از بنیانگذاران و توسعه‌دهندگان اصلی آنالیز هارمونیک در کشور آقای دکتر محمود لشکریزاده بومی بودند. در سال هفتاد دوره دکترای ریاضی، به‌ویژه گرایش آنالیز هارمونیک در دانشگاه اصفهان تاسیس شد؛ دانشگاه‌های تربیت‌معلم (خوارزمی فعلی) و فردوسی نیز دوره دکترا، به‌ویژه در این شاخه، ایجاد کرده بودند. آشنایی من با ایشان به سال ۵۹ برمی‌گردد که هر دوی ما دانشجوی دوره دکترای ریاضی در همین شاخه در دانشگاه شفیلد بودیم. ایشان از دانشگاه اصفهان به دانشگاه نیوکاسل آمده بود و در آنجا یک فوق‌لیسانس دیگر گرفته بودند و برای ادامه دکترا در گرایش آنالیز

هارمونیک (تخصص آنالیز هارمونیک روی نیمگروه‌ها) به دانشگاه شفیلد آمدند و زیر نظر دکتر بیکر^۲ رساله دکترای خود را شروع کردند. در آن زمان بیکر و پیم^۳ تنها ریاضی‌دانانی در دانشگاه شفیلد بودند که در زمینه آنالیز هارمونیک و شاخه‌های مرتبط کار می‌کردند. البته بورکیل^۴ هم در نظریه اندازه و انتگرال در دوره فوق‌لیسانس درس می‌داد. به‌همت این سه دانشگاه (اصفهان، تربیت‌معلم و فردوسی) و متعاقب آن در سایر دانشگاه‌ها، گرایش آنالیز هارمونیک یا همساز در زمینه محض و کاربردی در ایران بعدها پیشرفت قابل ملاحظه‌ای یافت. تربیت‌شدگان و فارغ‌التحصیلان زبده‌ای تحویل جامعه داده شد که نه تنها تدریس دروس پیشرفته را به عهده گرفتند، مقاله‌های بسیار عمیقی منتشر نمودند. آقای دکتر رسول نصر اصفهانی، دانش‌آموخته ممتاز دانشگاه اصفهان، اولین سمینار آنالیز هارمونیک را در دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار کردند و امسال (۱۴۰۰) نهمین دوره آن قرار است در دانشگاه امیرکبیر برگزار شود.



ردیف اول سمت راست: دکتر اسلام‌زاده، دکتر نیکنام، دکتر مدقالچی، مرحوم دکتر پورعبدالله‌نژاد، و مرحوم دکتر لشکری‌زاده (نهمین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن، دانشگاه تربیت معلم، شهریور ۱۳۷۷)

آنالیز هارمونیک از یک مسئله واقعی دنیای فیزیکی شروع شد و متعاقباً تجرید شد و به دنبال آن فضاها و جبرهای متنوعی روی گروه‌های توپولوژیک ساخته شد. کتاب معروف هیوئیت و راس^۵ سالیان سال، مرجع بخش اصلی این شاخه بوده و خواهد بود. عمده بحث این دو جلد کتاب روی گروه‌های توپولوژیک و جبرهای آن‌ها است. یکی از مباحث مهم و مطرح در آنجا نظریه نمایش است. در جاهای دیگر تاکید نموده‌ام که واقعیت این است که آنالیز هارمونیک دامنه وسیعی از ریاضیات محض را در بر می‌گیرد. از طریق گروه‌های لی با هندسه ارتباط دارد؛ C^* -جبرهای گروهی و قضیه‌های مربوط و توسیع آن‌ها به دستگاه‌های دینامیکی مجرد، گسترش آنالیز هارمونیک را نشان می‌دهد.

از سوی دیگر، آنالیز هارمونیک به نیمگروه‌ها، ابرگروه‌ها و گروه‌واره‌ها توسیع یافته است. باید توجه داشت که تعامل بین ریاضیات و سایر علوم و فناوری همواره باعث پیشرفت یکدیگر بوده است و خواهد بود. یکی از پرکاربردترین موضوعات، نظریه نمایش است. ویگنر،

^۲J. W. Baker ^۳J. S. Pym ^۴H. Burkil ^۵Abstract harmonic analysis, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1963.



کنفرانس جبرهای باناخ (آلبرتا، ۲۰۰۳)

یکی از برندگان جایزه نوبل فیزیک، می‌گوید: «من نظریه نمایش را از فون نویمان آموختم. او به همراه هرمان وایل، کاربرد وسیع این نظریه را در مکانیک کوانتوم معرفی کردند.» در جایی این جمله را نوشته‌ام که: «در تعجبم از اینکه هر چیزی در ریاضیات محض، کشف یا ابداع می‌شود همواره کاربرد پیدا می‌کند.»

به بحث اول برمی‌گردم. بیکر قبلا سه مقاله درباره نیمگروه‌های توپولوژیک نوشته بود و در نهایت روی نیمگروه S جبر $\tilde{L}(S)$ را ساخته بود که نظیر جبر $L^1(G)$ روی گروه توپولوژیک G بود. دکتر لشکری‌زاده با کار مداوم، نظریه نمایش را روی $\tilde{L}(S)$ توسعه دادند و رساله خود را در این زمینه نوشتند. همچنین قضیه بوخنر را توسعه دادند. با توجه به اینکه دو مقاله اولیه ایشان محتوایی عمیق داشت و زیربنای برخی از کارهای اصلی شد، به نظریه بمی معروف شد.^۶

بدنیست اشاره کنم که در طبقه هشتم ساختمان هیکس^۷ که دفتر استادها، دانشجویان دکترا، و دفتر بخش ریاضی قرار داشت، اتاقی در یک طبقه مخصوص چای خوری بود که صبح‌ها و عصرها به مدت نیم‌ساعت باز می‌شد. استادان و دانشجویان در این نیم‌ساعت‌ها ضمن خوردن یک فنجان چای در مورد مسائل مختلف گپ‌وگفت می‌کردند. معمولا، این گفت‌وگوها و اطلاع از کارهای همدیگر نتایج ثمربخشی داشت و تبادل اطلاعات خوبی صورت می‌گرفت (توضیح اینکه برای هر فنجان چایی، یک دو پنسی باید در یک صندوقچه انداخته می‌شد؛ ظاهرا حرف بیش از یک فنجان هم جایز نبود).

دکتر لشکری‌زاده، پس از بازگشت به ایران، در همان زمینه تحقیقاتی خود، مقاله‌های متعدد، فاخر و ارزشمند منتشر کردند. فارغ‌التحصیلان بسیاری تربیت کردند. امید است این تربیت‌شدگان، پژوهشگران ارزنده و گسترش‌دهندگانی توانا در آموزش و پژوهش باشند.

درگذشت ایشان را در وهله اول به خانواده محترم، و در وهله دوم به جامعه ریاضی تسلیت می‌گویم. از خداوند بزرگ برای شادی روح ایشان طلب مغفرت واسعه و برای کلیه بازماندگان طلب صبر جمیل دارم.

۴. از زبان دکتر علی رجالی

در پاسخ به تقاضای دکتر مقصودی برای ذکر خاطرات خود از مرحوم دکتر محمود لشکری‌زاده، استاد گروه ریاضی، مطالبی عرض می‌کنم. استاد راهنمای بنده و ایشان دکتر بیکر، هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه شفیلد انگلستان، بود که چند سال قبل فوت کردند و در

^۶ *The analytical and topological theory of semigroups*, K. H. Hofmann, J. D. Lawson, and J. S. Pym, eds., Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990. ^۷ Hicks building

زمینه آنالیز هارمونیک مجرد کارهای ماندگار از خود باقی گذاشتند. در یک کتاب کارهای پژوهشی این‌جانب و دکتر لشکری‌زاده در دوره دکترا آورده شده است.^۸ پس از فراغت از تحصیل، هر دو در گروه ریاضی دانشگاه اصفهان مشغول به کار شدیم.

پس از فراغت از تحصیل در دوره دکترا، کار تحقیقاتی مشترک نداشتیم، اما در ایجاد دوره دکترا و کارشناسی ارشد همکاری زیادی داشتیم و در شاخه آنالیز هارمونیک شاگردان مشترک زیادی در شاخه‌های گوناگون تربیت گردید به‌طوری‌که برخی از آن‌ها هم‌اکنون در دانشگاه‌های کشور مشغول فعالیت‌اند. ایشان و بنده هر دو هم‌زمان از دانشگاه اصفهان بازنشسته شدیم. پس از کسالت ایشان، راهنمایی سه نفر از دانشجویان دکترای ایشان را برعهده گرفتیم.

اولین سمینار آنالیز هارمونیک در دانشگاه صنعتی اصفهان با حضور ایشان و بنده و جمعی از همکاران دانشگاه‌های دیگر تشکیل گردید که مدیریت سمینار با دکتر رسول نصر اصفهانی، استاد آن دانشگاه، برگزار شد. در حال حاضر به‌طور مرتب هر سال، سمینار آنالیز هارمونیک مجرد برگزار می‌شود. به‌جرات می‌توان گفت آنالیز هارمونیک مجرد در ایران در سطح دنیا حرف برای گفتن دارد و مجلات معتبری برای داوری در این زمینه از متخصصان داخلی تقاضای داوری مقاله می‌کنند. ایشان و بنده عضو قطب علمی جبرهای باناخ در دانشگاه اصفهان بودیم، که در چند نوبت بین قطب‌های علمی کشور سرآمد بود.

در دوران همکاری، همواره حرمت مرحوم دکتر لشکری‌زاده را پاس داشتیم و در انتخاب دانشجو و درس، ابتدا نظر ایشان را جویا می‌شدم. در چندین رساله دکترا و ارشد، مشاوره دانشجویان یا گاهی به‌طور مشترک در هدایت رساله همکاری داشتیم. ایشان حتی در این اواخر، با وجود بیماری، مشتاق به تدریس و کارهای علمی بودند و به‌سختی با کمک فرزند خود در محل کار حاضر می‌شدند. در پایان، شعری برای ایشان سروده‌ام که تقدیم می‌کنم:

به یاد استاد دکتر محمود لشکری‌زاده

دریغا همدم و همکارمان رفت	بهین استاد خوش‌گفتارمان رفت
عجب لطفی خدا دارد به آدم	ولی غافل ز اسراریم هر دم
به یکباره گزفتی لشکری را	جدا کردی ز ما آن یآوری را
زهجرت محفل ما گشته خاموش	نگردد یاد او هرگز فراموش
مرامش درخور صد آفرین بود	مقید بر اصول و هم امین بود
صبور و با صفا و با کرامت	گل بی‌خار گلزار محبت
به حق سرچشمه انوار رفت	چو باران بهاری باطراوت
عزیز و مهربان و همدم بود	هماره رهگشا از هر غم بود
نوی اهل حق را شد پذیرا	خداوندا ببخشا یار والا
خدایا قبر او پرنور گردان	ورا با اولیا محشور گردان
شود مغفور در روز قیامت	رجالی شاهد و خواهد سعادت

۵. آثار علمی

سوی تعدادی مقاله در کنفرانس و تعدادی طرح‌های پژوهشی، آثار ایشان به‌صورت ۶۰ مقاله پژوهشی در مجلات بین‌المللی منتشر شده است؛ در انتشار این مقالات وقفه‌هایی در بازه‌های ۱۹۸۵-۱۹۹۲ و ۲۰۰۹-۲۰۱۲ مشاهده می‌کنیم. با نگاهی به عنوان مجلات می‌توان دقت در انتخاب مجله‌ها را دریافت. بیشتر این مجله‌ها از مجله‌های خوش‌نام در حوزه تخصصی آنالیز ریاضی و یا حوزه عمومی ریاضیات‌اند. آنچه از این آثار می‌توان دریافت این است که دل‌مشغولی او در سراسر عمر حرفه‌ای، آنالیز هارمونیک مجرد روی دسته خاصی از نیم‌گروه‌های موضعا فشرده بوده است. الگوی اصلی آثار او تحقیقات روز در آنالیز هارمونیک مجرد روی گروه‌های موضعا فشرده بوده است. البته این مطلب مختص ایشان نیست و به‌طور کلی رویه جاری در بین آنالیز هارمونیک‌دان‌های غیرگروهی است.

^۸ همان

آشنایی ما با شاخه آنالیز هارمونیک از طریق دو نسل از تحصیل‌کردگان خارج از کشور صورت گرفت؛ خصوصا از نسل دوم به بعد و با ایجاد دوره دکترای این رشته، این آشنایی بیشتر شد و تداوم یافت و اکنون می‌توان گفت که این رشته در ایران کاملاً تثبیت شده است. شاهد این مدعا تعداد زیاد فارغ‌التحصیلان این شاخه و همچنین تعداد مقاله‌های نمایه‌شده در پایگاه متمتیکال ریویوز با سرکد اختصاصی ۴۳ است که در فاصله ۱۹۷۰-۱۹۹۵ تعداد ۱۶ مقاله، در فاصله ۱۹۹۵-۲۰۰۰ تعداد ۴۹ مقاله، و در فاصله ۲۰۰۰-۲۰۲۰ تعداد ۳۵۴ مقاله با آدرس ایران را نشان می‌دهد. البته جای تعجب دارد که هیچ فارغ‌التحصیلی، تا آنجا که نگارنده اطلاع دارد، در زمینه آنالیز هارمونیک کلاسیک یا همان آنالیز فوریه نداشته‌ایم به جز یک مورد که در دهه ۲۰۱۰ در این رشته از خارج از کشور فارغ‌التحصیل شده است.



جفری دنیس وستون

پدربزرگ علمی دکتر لشکری‌زاده، ریاضی‌دانی انگلیسی به نام وستون^۹ بود. وستون در رشته مهندسی برق در سال ۱۹۳۹ از دانشگاه لندن مدرک کارشناسی و در ۱۹۴۶ در همین رشته از دانشگاه شفیلد (که در ۱۸۹۷ به صورت کالج تاسیس و بعدا در ۱۹۰۴ به دانشگاه تبدیل شد) دکترا گرفته بود. در دوران جنگ دوم جهانی در کارخانه‌ای چندین نمونه اختراع در زمینه مخابرات ثبت کرد و در همان‌جا با افرادی از جمله استریچی^{۱۰}، متخصص رایانه، آشنا می‌شود که بذریعۀ علاقه به ریاضیات محض و به‌خصوص آنالیز ریاضی در دل او کاشته می‌شود. پس از استخدام در دانشگاه شفیلد تصمیم گرفت در زمینه آنالیز تابعی تحقیق کند. به همین دلیل به گروه مشهور آنالیز روگوسینسکی^{۱۱} و (دانشجویش) بانسل^{۱۲} معروف در کینگز کالج (نیوکاسل) پیوست و ۳۳ مقاله در طی ۵ سال منتشر کرد و در سال ۱۹۶۰ دانشگاه لندن به وی مدرک

دکترا در علوم^{۱۳} اعطا کرد. در ۱۹۶۱ مدیر گروه ریاضی در دانشگاه (کالج) سوانسی (یکی از چهار کالج دانشگاه ولز تاسیس شده در ۱۹۲۰) شد و تا زمان بازنشستگی در ۱۹۸۲ در آنجا بود. او شاخه آنالیز و توپولوژی آنجا را تقویت کرد و ریاضی‌دانانی مثل الیس^{۱۴} و کلتون^{۱۵} را به آنجا آورد. او ریاضی‌دان و مدیری فعال در عرصه ریاضیات انگلستان بود. اولین دانشجوی دکترای او جان بیکر و آخرین آن‌ها هم کیت رولندز^{۱۶} به سال ۱۹۶۹ بود. موضوع رساله رولندز مطالعه ضربگرها روی بعضی فضاهای خطی بود و جالب است که بعضی از شاگردان او هم (مثل ضیا آرگون^{۱۷}) آثاری در آنالیز هارمونیک روی گروه‌ها دارند.

جان بیکر پدر علمی دکتر لشکری‌زاده، و همچنین یک نفر دیگر از هم‌نسلان او، به حساب می‌آید. جان والتر بیکر^{۱۸} رساله دکترای خود را با عنوان مسائلی در آنالیز تابعی زیر نظر وستون در دانشگاه سوانسی در سال ۱۹۶۵ به انجام رسانده بود. دوره فوق لیسانس را نیز در دانشگاه ریدینگ (که به صورت کالجی از دانشگاه آکسفورد در ۱۸۹۲ تاسیس شده بود) در سال ۱۹۶۱ با رساله‌ای به نام قضیه نگاشت باز در فضاهای توپولوژیک برداری تمام کرده بود. جان بیکر تا سال ۱۹۶۸ در دانشگاه سوانسی و دو سال آخر را دانشگاه ملی استرالیا استاد مدعو بود. پنج مقاله مشترک با پیترسن^{۱۹} (یا اگر اصل دانمارکی او را در نظر بگیریم، پدرسن)، ریاضی‌دان معروف که طی ۱۹۵۹-۱۹۶۵ در دانشگاه سوانسی بود، در زمینه نظریه مجموع‌پذیری (بخشی از رساله دکترای بیکر) دارد. چهار مقاله هم در زمینه نگاشت باز و قضیه نمودار بسته در فضاهای موضعا محدب و گروه‌های توپولوژیک، که بخش دیگری از رساله است، دارد. از ۱۹۶۷ به مسئله دوگانی روی گروه‌ها و نیمگروه‌های توپولوژیک علاقه‌مند می‌شود و از ۱۹۶۸ تا ۱۹۷۰ طی چهار مقاله جبر نیمگروهی مهمی را تعریف می‌کند. این مقالات مشترکا با آن‌سی. بیکر نوشته شده‌اند. بیکر از ۱۹۶۹ به بعد به دانشگاه شفیلد نقل مکان کرد و با رتبه دانشیاری^{۲۰} از آنجا بازنشسته شد. جان بیکر در ۱۹۶۷ با آن‌سی. تامپسن^{۲۱} که هم‌دوره او در دانشگاه سوانسی بود و در ۱۹۶۴ تحت نظر پیترسن با موضوع

^{۱۳}مدرک Dsc تقریباً معادل با دکترای رایج ولی تخصصی‌تر است و بنابر تحقیقات و مقالات منتشرشده در رشته مشخصی از علوم، در انگلستان و بعضی کشورهای اروپایی اعطا می‌شود.

^۹Jeffrey Dennis Weston (1919–2000) ^{۱۰}Christopher Strachey (1916–1975) ^{۱۱}Werner Wolfgang Rogosinski (1894–1964)

^{۱۲}Frank Featherstone Bonsall (1920–2011) ^{۱۳}Alan J. Ellis (1940–1992) ^{۱۴}Nigel J. Kalton (1946–2010) ^{۱۵}Keith Rowlands

(1943–) ^{۱۶}Ziya Argün ^{۱۷}John Walter Baker (1940?–2016) ^{۱۸}Gordon Marshall Petersen (1921–1996) ^{۱۹}Senior lecturer

^{۲۰}Anne Craig. Thompson



در میان بیکرها (جان و همسرش)

چند مسئله درباره دستگاه نامتناهی از معادلات خطی دکترا گرفته بود ازدواج کرد. آن بیکر تعدادی مقاله مشترک با پترسون و تعدادی با جان بیکر (تماما در زمینه نیمگروه‌های توپولوژیک) تا ۱۹۷۰ نگاشته است و از آن زمان به بعد به تدریس ریاضیات در کالجی در شفیلد اشتغال داشته است. متأسفانه بر اثر بیماری چند سال زودتر از جان بیکر فوت کرد.

به گفته زنده‌یاد لشکری‌زاده: «چون رشته من جبر بود و من می‌خواستم در رشته آنالیز ادامه دهم مجبور شدم یک دوره کارشناسی ارشد آنالیز در حدود یک‌سال بخوانم.» این دوره یک‌ساله را که شامل چهار درس و یک پایان نامه می‌شد در سال ۱۹۷۸ در دانشگاه نیوکاسل طی می‌کند و ضمن رفت‌وآمدی که پیم به نیوکاسل داشت تصمیم می‌گیرد که به دانشگاه شفیلد نقل مکان کند، ولی سرانجام دوره سه‌ساله دکترا را با جان بیکر در ۱۹۷۹ شروع می‌کند. در این دوره درس رسمی ارائه نمی‌شد و فقط به صورت مسئله‌محور درباره موضوعی باید کار تحقیقاتی انجام می‌گرفت و پس از اعلام رضایت استاد راهنما و دفاع از نتایج حاصل در پشت درهای بسته بدون استاد راهنما در حضور یک داور داخلی و یک داور خارج از موسسه درجه دکترا به شخص اعطا می‌شد. دکتر لشکری‌زاده از اینکه پیم داور داخلی رساله دکترای او بود مباهات می‌کرد. اما جان سیدنی پیم^{۲۲} هم تا سال ۱۹۶۴ هیئت علمی دانشگاه سوانسی بود و بعد به دانشگاه شفیلد نقل مکان کرد. پیم، که با بری جانسون^{۲۳} معروف همدرس بود، رساله دکترا را در کالج پیترهاوس کمبریج تحت نظر جان هانتز ویلیامسن^{۲۴} در ۱۹۶۱ با عنوان اندازه‌های پوچ توان روی نیمگروه‌ها گذرانده بود. از شاگردان پیم که در داستان ما نقش دارند یکی ویلیام مورن^{۲۵} است که در سال ۱۹۶۸ از رساله خود تحت عنوان اندازه‌ها روی فضاهای کاملاً منظم در دانشگاه شفیلد دفاع کرد و دیگری هم دکتر علیرضا مدقالجی است که در ادامه از ایشان خواهیم گفت.

قبل از آنکه تصویری کلی از آنالیز هارمونیک مجرد تا سال ۱۹۷۹ ارائه کنیم اجازه دهید از افرادی نام ببریم که نسل‌های مختلف آنالیز هارمونیک‌دان‌های ایران به حساب می‌آیند. البته باید در مورد این نسل‌بندی کمی دقیق باشیم. مسلماً افرادی را که در یک محدوده سنی هستند و به لحاظ موضوع بررسی، اوضاع و احوال یکسانی بر آن‌ها گذشته است می‌توان در یک نسل طبقه‌بندی کرد. از طرفی،

^{۲۲} John Sydney Pym (1938-) ^{۲۳} Barry Edward Johnson (1937-2002) ^{۲۴} John Hunter Williamson (1926-) ^{۲۵} William Moran (1944-)

در اینجا زمان فارغ التحصیلی دوره دکترا اهمیت زیادی دارد و با لحاظ کردن یک دوره ۴-۵ ساله برای این دوره عملاً یک نسل از نسل دیگری تمایز پیدا می‌کند. این فاصله زمانی از سال ۱۳۶۷/۱۹۸۸ با توجه به ایجاد دوره دکترا و به‌خصوص سال ۱۳۷۴/۱۹۹۵ که اولین دانشجوی دوره دکترای این رشته در داخل فارغ التحصیل می‌شود اهمیت بیشتری می‌یابد. همچنین از وارد کردن حوزه نزدیک و مرتبط با آنالیز هارمونیک مجرد، یعنی جبرهای باناخ، و دو نسل اول فارغ التحصیلان خارج از کشور این شاخه، مثل

- قدسیه وکیلی (حقانی) (۱۹۷۴)، سری‌های توانی صوری و جبرهای باناخ، جی. آر. آلن^{۲۶}، دانشگاه لیدز انگلستان
- اسدالله نیکنام (۱۹۷۶)، مشتق‌های بی‌کران روی C^* -جبرها، ای. سی. لانس^{۲۷}، دانشگاه ویکتوریای منچستر انگلستان
- طاهر قاسمی هنری (۱۹۷۶)، مباحثی در جبرهای باناخ یکنواخت و جبرهای باناخ تابعی، جیمز جی. کلونی^{۲۸}، امپریال کالج لندن

- یدالله نژاددهقان (۱۹۷۷)، اتحادهای جهتدار جبرهای موضعا محدب ضربی، جی. آر. آلن، دانشگاه لیدز انگلستان
 - سیدعلیرضا حسینیون (۱۹۷۸)، دوگان دوم جبرهای باناخ، جی. دانکن^{۲۹}، دانشگاه استرلینگ انگلستان
 - امیر خسروی (۱۹۸۱)، جبرهای باناخ جابه‌جایی، جی. آر. آلن، دانشگاه کمبریج انگلستان
 - بهمن طباطبایی شوربچه (۱۹۸۷)، C^* -جبرهای وابسته به بعضی نیم‌گروه‌ها، ای. سی. لانس، دانشگاه لیدز انگلستان
 - محمدحسن فاروقی (۱۹۸۹)، گونا و شبه‌گونا‌های جبرهای باناخ، پی. جی. دیکسین^{۳۰}، دانشگاه شفیلد انگلستان
- خودداری کرده‌ایم. در هر بررسی از این گونه باید چند واقعه فرهنگی-سیاسی-اجتماعی را در نظر گرفت: ریاست دکتر وصال (پدر آنالیز ریاضی ایران) بر بخش ریاضی دانشگاه شیراز ۱۳۴۱/۱۹۶۲، تاسیس موسسه تحقیقات ریاضی مصاحب و تقریباً هم‌زمان با آن ایجاد دوره فوق لیسانس در ایران در ۱۳۴۵/۱۹۶۶، برگزاری کنفرانس ریاضی و رفت‌وآمد ریاضی‌دانان خارجی ۱۳۴۹/۱۹۷۰، وقوع انقلاب اسلامی ۱۳۵۶/۱۹۷۸-۱۳۵۷/۱۹۷۹، تسخیر لانه جاسوسی ۱۳۵۸/۱۹۷۹-۱۳۵۹/۱۹۸۱، وقوع انقلاب فرهنگی و تعطیلی دانشگاه‌ها ۱۳۵۹/۱۹۸۰-۱۳۶۱/۱۹۸۲، تاسیس دوره دکترا در داخل کشور ۱۳۶۷/۱۹۸۸.

اکنون با این توضیحات تقسیم‌بندی زیر دست‌کم تا سال ۱۳۷۸/۲۰۰۰ معقول به نظر می‌رسد:

الف) نسل اول (۱۹۷۰-۱۹۸۰)

- هادی خرقانی (۱۹۷۴)، میانگین‌های پایا روی نیم‌گروه‌ها، جی. ونگ^{۳۱}، دانشگاه کلگری کانادا
- محمدعلی پورعبدالله‌نژاد (۱۹۷۷)، اعمال نیم‌گروهی و مفهوم توابع تقریباً دوره‌ای ضعیف، ویلیام مورن، دانشگاه لیورپول انگلستان و آدلاید استرالیا
- فریدون قهرمانی (۱۹۷۸)، هم‌ریختی‌ها و مشتق‌ها روی جبرهای پیچشی وزندار، آلن ام. سینکлер^{۳۲}، دانشگاه ادینبورگ اسکاتلند
- عبدالحمید ریاضی (۱۹۷۹)، مشخص‌سازی میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌های توپولوژیک جداگانه پیوسته، جی. ونگ و آنتونی تومینگ لائو^{۳۳}، دانشگاه کلگری کانادا

ب) نسل دوم (۱۹۸۰-۱۹۹۰)

- محمود لشکری‌زاده بمی (۱۹۸۲)، نمایش‌ها و تابع‌های معین‌مثبت روی نیم‌گروه‌های توپولوژیک، جی. دبلیو. بیکر، دانشگاه شفیلد انگلستان
- علیرضا مدقالچی (۱۹۸۲)، ابرگروه‌ها، ابرگروه‌های وزندار، و دست‌کاری به‌وسیله ضربگرها، جی. اس. پیم، دانشگاه شفیلد انگلستان
- علی رجالی (۱۹۸۸)، نظم‌پذیری آرنز جبرهای نیم‌گروهی، جی. دبلیو. بیکر، دانشگاه شفیلد انگلستان
- عبدالمحمد امین‌پور (۱۹۹۰)، نیم‌گروه‌ها و فضا‌های تابعی وابسته به اویدها، جی. اس. پیم، دانشگاه شفیلد انگلستان

^{۲۶}Graham Robert Allan (1936-2007) ^{۲۷}E. Christopher Lance (1941-) ^{۲۸}James Clunie (1926-2013) ^{۲۹}John Duncan

(1938-) ^{۳۰}Peter Grant Dixon (1945-) ^{۳۱}James Chin-Sze Wong (1943-1994?) ^{۳۲}Allan Macdonald Sinclair (1941-)

^{۳۳}Anthony To-Ming Lau (1943-)



در کنار دکتر هادی خرقانی و دکتر احمد رضا سلطانی



در حافظیه شیراز با عبدالحمید ریاضی (۱۳۵۳)

پ) نسل سوم (۱۹۹۰-۲۰۰۰)

- حمیدرضا فرهادی (۱۹۹۵)، یکرختی و برگشت‌ها روی جبرهای باناخ گروه‌های موضعا فشرده، فریدون قهرمانی، دانشگاه منیتوبای کانادا
- عبدالرسول پورعباس (۱۹۹۵)، کوهمولوژی بعضی جبرهای باناخ، مایکل وایت^{۳۴}، دانشگاه نیوکاسل انگلستان
- جواد لآلی (۱۳۷۳/۱۹۹۴)، منظم‌بودن آرنز برای جبرهای ابرگروهی و جبرهای اندازه عمومی، علیرضا مدقالچی، دانشگاه تربیت معلم
- حمیدرضا ابراهیمی ویشکی (۱۳۷۵/۱۹۹۶)، فشرده‌سازی عام نیمگروهی براساس برخی خواص جبری، محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، دانشگاه فردوسی مشهد
- رجبعلی کامیابی گل (۱۹۹۷)، مرکز توپولوژیک جبرهای دوگان باناخ وابسته به ابرگروه‌ها، آنتونی تومینگ لائو، دانشگاه آلبرتای کانادا
- خیرالله پوربررات (۱۹۹۶)، میانگین‌پذیری گروه‌ها و ابرگروه‌های وزندار، علیرضا مدقالچی، دانشگاه تربیت مدرس
- عباس سهله (۱۹۹۷)، فشرده‌سازی‌های نیمگروهی جدید از طریق نیمگروه‌های پوشاننده شارش‌های وابسته، محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، دانشگاه فردوسی مشهد
- غلامحسین اسلام‌زاده (۱۹۹۸)، ساختار جبر باناخ و میانگین‌پذیری رده‌ای از جبرهای ماتریس و کاربرد آن‌ها، آنتونی تومینگ لائو، دانشگاه آلبرتای کانادا
- مسعود امینی (۱۹۹۸)، ساختار موضعی جبرهای عملگری، ژانگ-جین روآن^{۳۵}، دانشگاه ایلینوی آمریکا
- محمدرضا میری (۱۹۹۸)، گسترش‌ها، کمینگی و خودتوانی بعضی از فشرده‌سازی‌های نیمگروهی، محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، دانشگاه فردوسی مشهد
- علی‌اکبر خادم‌معبودی (۱۹۹۸)، فشرده‌سازی و فضاها تابعی وزندار روی نیمگروه‌ها، محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، دانشگاه فردوسی مشهد
- علی جلیلیان عطار (۱۹۹۸)، فشرده‌سازی عام روی نیمگروه‌های شبه‌توپولوژیک تبدیل‌ها، محمدعلی پورعبدالله‌نژاد، دانشگاه فردوسی مشهد
- سید محمدصادق مدرس مصدق (۱۹۹۹)، مرکز توپولوژیکی و میانگین‌پذیری جبرهای ابرگروه، جبرهای اندازه و زیرجبرهای آن، علیرضا مدقالچی، دانشگاه تربیت معلم

^{۳۴}Michael Christopher White (1963-) ^{۳۵}Zhong-Jin Ruan (1955-)

- محمد موسائی (۲۰۰۰)، میانگین‌پذیری و بسیار میانگین‌پذیری نیم‌گروه‌های نیم‌توپولوژیک، عبدالحمید ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس
- رسول نصر اصفهانی (۲۰۰۰)، آنالیز روی جبرهای لائو، علی رجالی، دانشگاه اصفهان
- علی عبادیان (۲۰۰۰)، جبرهای لپشیتس حقیقی و جبرهای گروهی حقیقی، علیرضا مدقالچی، دانشگاه تربیت معلم
- عزیزاله عزیزی (۲۰۰۱)، نیم‌گروه زیرمجموعه‌های همبند یک گروه توپولوژیک و میانگین‌پذیری، عبدالحمید ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس
- هاشم پروانه‌مسیحا (۲۰۰۲)، مشخصه‌های توپولوژیک زیرمجموعه‌های (موج‌دار چپ-ضخیم چپ) از نیم‌گروه‌های موضعا فشرده و بسیار میانگین‌پذیر، عبدالحمید ریاضی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
- بهمن بهدین (۲۰۰۲)، توابع کراندار و میانگین‌پذیری، عبدالحمید ریاضی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

اولین دانشجویان دکترای آنالیز هارمونیک داخل کشور

دانشگاه	نام و سال‌های تحصیل دانشجوی	استاد راهنما
تربیت معلم	جواد لآلی (۶۷-۷۳)	علیرضا مدقالچی
تربیت مدرس	خیرالله پوربرات (۶۹-۷۵)	علیرضا مدقالچی
	محمد موسائی (۷۳-۷۹) و عزیزاله عزیزی (۷۳-۸۰)	عبدالحمید ریاضی
فردوسی مشهد	حمیدرضا ابراهیمی ویشکی (۷۵-۷۰) و عباس سهله (۷۰-۷۶)	محمدعلی پورعبدالله‌نژاد
اصفهان	حیدر قائدامینی (۷۲-؟) و رسول نصر اصفهانی (۷۳-۷۹)	علی رجالی
صنعتی امیرکبیر	هاشم پروانه‌مسیحا (۷۴-۸۱) و بهمن بهدین (۷۴-۸۱)	عبدالحمید ریاضی

اکنون به‌اختصار می‌پردازیم به ریشه‌های آنالیز هارمونیک مجرد روی گروه و نیم‌گروه‌ها و موضوعات مطرح در این حوزه تا قبل از ۱۹۷۹ که سال شروع دوره دکترای زنده‌یاد لشکری‌زاده است.

لیاپونف^{۳۶}، شاگرد چیشف^{۳۷}، در ۱۹۰۰ تبدیل فوریه را در نظریه احتمال به کار برد و ثابت کرد تبدیل فوریه پیچش دو تابع چگالی برابر حاصل‌ضرب تبدیل فوریه آن‌ها است. صد سال طول کشید تا ریاضی‌دان‌ها پی ببرند این گونه موارد خاص را می‌توان از طریق مفهوم گروه و مشخصه به یکدیگر مربوط کرد.

مفهوم گروه مجرد و البته متناهی را، که ریشه در آثار گالوا^{۳۸} داشت، کیلی^{۳۹} در ۱۸۵۴ تعریف کرد. پس از تحقیقات لی^{۴۰} توجه به مفهوم گروه‌های توپولوژیک بیشتر شد. مسئله پنجم هیلبرت به این مفهوم برجستگی خاصی داد. شرایر^{۴۱} در ۱۹۲۵ گروه‌های پیوسته مجرد را تعریف و بررسی کرد. جستجو برای نمونه توپولوژیکی قضیه‌های هم‌ریختی وان‌در‌وردن^{۴۲} باعث دقیق‌تر شدن مفهوم گروه‌های توپولوژیک شد. تعریف اندازه پایا گامی تاثیرگذار در تحول آنالیز هارمونیک بود. پوانکاره^{۴۳} و الی کارتان^{۴۴} انتگرال‌های پایا را مطالعه کرده بودند. اولین تابع جمعی پایا تحت انتقال‌ها روی گروه را هورویتس^{۴۵} در ۱۸۹۷ بررسی کرد. اما تحقیقات دیگری در زمینه گروه‌های توپولوژیکی در همین زمان در حال انجام بود. نظریه نمایش گروه‌های متناهی را برونساید^{۴۶} و فروبنیوس^{۴۷} آغاز کردند. آن‌ها می‌خواستند هم‌ریختی‌هایی را که از یک گروه به گروه تبدیلات خطی تعریف می‌شد مشخص کنند. اینها و تحقیقات کارتان درباره جبرهای نیم‌ساده لی باعث شد وایل^{۴۸} به مطالعه نمایش‌های گروه‌های لی کلی بپردازد. این مسئله برای او یک مسئله جبری بود. شور^{۴۹} و وایل اندازه‌های

^{۳۶}Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918) ^{۳۷}Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894) ^{۳۸}Évariste Galois (1811–1832) ^{۳۹}Arthur Cayley (1821–1895) ^{۴۰}Marius Sophus Lie (1842–1899) ^{۴۱}Julius Anatolyevich Schrader ^{۴۲}Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) ^{۴۳}Jules Henri Poincaré (1854–1912) ^{۴۴}Élie Joseph Cartan (1869–1951) ^{۴۵}Adolf Hurwitz (1859–1919) ^{۴۶}William Burnside (1852–1927) ^{۴۷}Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) ^{۴۸}Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955) ^{۴۹}Issai Schur (1875–1941)

پایا روی بعضی گروه‌های فشرده لی را بررسی کرده بودند و وایل و پیترو^{۵۰} در ۱۹۲۷ این کار را برای گروه‌های لی دلخواه انجام دادند. اما مهم‌تر از این‌ها، آلفرد هار^{۵۱} در ۱۹۳۳ این کار را برای هر گروه متریک‌پذیر تفکیک‌پذیر و موضعا فشرده انجام داد. سرانجام آندره وی^{۵۲} در ۱۹۴۰ این کار را برای هر گروه موضعا فشرده دلخواه به انجام رساند. با وجود اندازه پایا روی گروه موضعا فشرده، تعریف عمل پیچش ممکن می‌شود. این عمل ضرب را قبلا وایرستراس، ولتراس^{۵۳}، و کیلی در حالت‌های خاص روی خط حقیقی به کار برده بودند. پیترو و وایل با استفاده از اندازه هار این عمل را بین توابع تقریبا متناوب تعریف کرده بودند. در ۱۹۳۶ وی به تعریف کلی این عمل روی یک گروه موضعا فشرده نزدیک می‌شود. با داشتن این عمل، فضای توابع انتگرال‌پذیر روی یک گروه موضعا فشرده یک جبر گروهی تشکیل می‌دهد که آن را سیگل^{۵۴} در ۱۹۴۱ بررسی کرد.

تحقیقات وینر^{۵۵} درباره قضیه‌های کلاسیک و معروف تاویری^{۵۶} او را به مطالعه جبرهای باناخ $L^1(\mathbb{R})$ و $M(\mathbb{R})$ هدایت کرد. وی در این مطالعات بدیع، بسیاری از مفاهیم و تکنیک‌ها مانند عضویت موضعی، زیرفضاهای انتقال پایا، و برخی مفاهیم دیگر را که امروزه جز مفاهیم ضروری آنالیزدان‌ها محسوب می‌شوند معرفی کرده و به‌کار گرفته است. وی مفهوم پیچش را در سراسر کارهای خود به کار برده است؛ در واقع، قضیه تاویری او قضیه‌ای درباره پیچش است. اگرچه منشأ جبرهای باناخ در کارهای وینر درباره قضیه تاویری است، گلفاند^{۵۷}، ریاضی‌دان روسی، اولین کسی بود که ویژگی جبری مخفی در کارهای وینر را تشخیص داد. از این‌رو نظریه کلی جبرهای باناخ از ابداعات او است. او در سال ۱۹۴۱ و قبل از آن در ۱۹۳۹ جبر باناخ را تعریف و خواص پایه‌ای آن‌ها را اثبات کرد و راه برای تحقیقات بعدی را مشخص کرد. گلفاند نقش ایده‌آل‌های ماکسیمال را کشف کرد و با یک اثبات ساده برای قضیه‌ای از وینر درباره سری‌های مثلثاتی قدرت نظریه باناخ را به نمایش گذاشت. گلفاند و کراین نظریه جبرهای باناخ تعویض‌پذیر را در مورد گروه‌های فشرده به کار گرفتند و این بررسی‌ها به ساخت آنالیز هارمونیک روی این گروه‌ها منجر شد؛ به‌خصوص رایکف^{۵۸} اثبات ساده تحلیلی برای قضیه دوگانی پونتریاگین ارائه کرده است. گلفاند در ۱۹۳۹ جبرهای $L^1(-\infty, +\infty)$ و $L^1(0, T)$ را که در آن‌ها T عددی ثابت است و همین‌طور $L^1[\alpha]$ را، که در آن α تابع وزن ضربی است، بررسی و بسیاری از خواص پایه‌ای آن‌ها را اثبات کرد.

در ۱۹۳۴ پونتریاگین^{۵۹} مفهوم مشخصه را برای گروه آبدی موضعا فشرده دلخواه مطرح کرد. با داشتن این مفهوم و عنایت به آثار فیشر^{۶۰} و ریس درباره پایه متعامد یک در فضای توابع مربعی-انتگرال‌پذیر، از رساله وی معلوم شد که این گروه‌ها قلمرو طبیعی آنالیز هارمونیک‌اند، آنالیزی که حول مفهوم انتگرال‌های فوریه بنا شده است. کار اساسی درباره نظریه نمایش این گروه‌ها متعلق به گلفاند و شاگرد او رایکف به سال ۱۹۴۳ است.

خلاصه آنکه بسیاری از تحقیقات آنالیز هارمونیک در پی پیدا کردن کنترل روی گروه‌های موضعا فشرده و یا یافتن ارتباط‌های توابع و اندازه‌های روی این گروه‌ها با گروه زمینه است. در این زمینه، فقط برای نمونه می‌توان به اثری از وندل^{۶۱} در سال ۱۹۵۲ درباره هم‌ریختی‌ها و ضربگرها روی جبرهای گروهی اشاره کرد.

اجازه دهید به اختصار دو موضوع دیگر را ذکر کنیم. در سال ۱۹۷۳ دونکل^{۶۲} و در سال ۱۹۷۵ ژویت^{۶۳} (از شاگردان استرومبری در سال ۱۹۶۳) مطالعه ساختارهایی به اسم ابرگروه را آغاز کردند. ابرگروه‌ها فضاهای موضعا فشرده‌ای هستند که فضای اندازه‌های رادون کراندار روی آن‌ها مجهز به یک عمل دوتایی است که در شرایط خاصی از جمله پایداری اندازه‌های احتمال صدق می‌کنند. البته مفهوم ابرگروه از دیدگاه جبری به سال ۱۹۳۴ برمی‌گردد.

موضوع دیگر جبرهای وزندار است. اولین کسی که جبر وزن‌دار توابع را به‌کار برده است آرنه بئورلینگ است. آرنه کارل-آگوست بئورلینگ ریاضی‌دان سوئدی بود که در سال ۱۹۳۳ از دانشگاه اوپسالا زیر نظر آندرس ویمان^{۶۴} دکتر گرفت. در نظریه توابع مختلط، آنالیز هارمونیک و معادلات دیفرانسیل، سری‌های دیریکله، و نظریه پتانسیل تحقیق کرده است. او ۹ دانشجوی دکتر فارغ‌التحصیل کرد که

^{۵۰}Irving Fritz Peter (1899–1949) ^{۵۱}Alfréd Haar (1885–1933) ^{۵۲}André Weil (1906–1998) ^{۵۳}Vito Volterra (1860–1940) ^{۵۴}Israel Moiseevich Gelfand (1913–2009) ^{۵۵}Norbert Wiener (1894–1964) ^{۵۶}Alfred Tauber (1866–1942) ^{۵۷}Dmitrii A. Raikov (1905–1980) ^{۵۸}Lev Semyonovich Pontryagin (1908–1988) ^{۵۹}Ernst Sigismund Fischer (1875–1954) ^{۶۰}James G. Wendel (1922–2006) ^{۶۱}Charles F. Dunkl (1941–) ^{۶۲}Robert I. Jewett (1937–) ^{۶۳}Anders Wiman

از میان آن‌ها اینگو دومار^{۶۵} و لنارت کارلسون^{۶۶} خود ریاضی‌دانان صاحب‌نامی شدند. دومار در ۱۹۵۶ با مقاله‌ای تحت عنوان آنالیز هارمونیک روی برخی از جبرهای باناخ جابجایی، خانواده‌ای از جبرهای باناخ را که $L^1(G)$ وقتی G آبلی است حالت خاص آن است بررسی کرد و برخی نتایج بئورلینگ را برای آن‌ها اثبات کرد. در ۱۹۵۱ جان ورم^{۶۷} در رساله دکترای خود با توجه به کار بئورلینگ به معرفی دسته وسیع‌تری از جبرهای وزن‌دار روی خط حقیقی می‌پردازد. وی برخی نتایج را در ۱۹۵۴ چاپ می‌کند. در ۱۹۵۱ رالف فیلیپس^{۶۸} برای بررسی نیم‌گروه عملگرهای خطی، جبر پیچشی از اندازه را معرفی می‌کند و با استفاده از برخی روش‌های جبرهای باناخ که در کارهای گلفاند معرفی شده بود نتایج قبلی از جمله نتایج هیل را تعمیم می‌دهد. همچنین در ۱۹۷۶ گوراری^{۶۹} جبر اندازه‌های وزن‌داری را که فیلیپس معرفی کرده است روی $\mathbb{R}$ مورد مطالعه قرار می‌دهد؛ به خصوص ایده‌آل ماکسیمال و توابع تحلیلی روی آن‌ها. او طی تعدادی مقاله خواص مختلف از جمله مشخصه‌ها، طیف و ایده‌آل ماکسیمال و مسائل جانبی را برای این جبرها بررسی کرده است. از جمله تحقیقات معروف در حالت کلی گروه موضعا فشرده می‌توان به اثری از ادواردز^{۷۰} در ۱۹۵۹ درباره پایداری فضاها، لیبگ وزن‌دار روی گروه موضعا فشرده تحت اعمال انتقال و گودرای^{۷۱} در ۱۹۶۹ درباره ضربگرها روی این فضاها اشاره کرد.

اساساً آنالیز هارمونیک مجردی که وارد ایران شد حول سه موضوع گروه‌ها، نیم‌گروه‌ها، و ابرگروه‌های موضعا فشرده و جبرهای وابسته می‌چرخید. این سه موضوع همان موضوع رساله‌های دکترای نسل اول و دوم آنالیز هارمونیک‌دان‌های ایران است.

اکنون می‌رسیم به نیم‌گروه‌های توپولوژیک و آنالیز هارمونیک روی آن‌ها. منظور از یک نیم‌گروه توپولوژیک، نیم‌گروهی با یک توپولوژی هاسدورف است که عمل ضرب روی آن جداگانه پیوسته است. البته معمولاً عمل ضرب را توامان پیوسته در نظر می‌گیرند. چون در اینجا نداشت انتقال در حالت کلی باز نیست بنابراین توپولوژی روی نیم‌گروه همگن نیست و این یک تفاوت بارز نیم‌گروه با گروه توپولوژیک است.

در آنالیز هارمونیک روی نیم‌گروه‌ها چندین موضوع مطرح بود که آنچه را به بحث ما مربوط می‌شود به اختصار می‌آوریم. مشخصه‌ها روی گروه آبلی از جمله مهم‌ترین وسیله‌های آنالیز هارمونیک روی گروه توپولوژیک است و به نظر می‌رسد که این ابزار برای بررسی نیم‌گروه‌ها نیز مهم باشد. قبلاً قضیه‌هایی درباره شبه‌مشخصه‌ها و مشخصه‌ها روی گروه جمعی اعداد حقیقی و نیم‌گروه اعداد صحیح نامنفی ثابت شده بود، از جمله در آثاری از بئورلینگ در سال‌های ۱۹۴۵ و ۱۹۴۹. از جمله اولین تحقیقات مهم در این زمینه مقاله بسیار مهم هیوئیت^{۷۲} و زوکرمن^{۷۳} در سال‌های ۱۹۵۵ و ۱۹۵۶ است. در آنجا شبه‌مشخصه روی نیم‌گروه را یک هم‌ریختی از نیم‌گروه به قرص یک تعریف کرده‌اند. مشخصه نیز عبارت بود از شبه‌مشخصه‌ای که قدرمطلق آن برابر یک است. بسیاری از خواص مشخصه‌ها روی گروه‌ها برای نیم‌گروه درست نیست و از جمله مثال‌های در دسترس نیم‌گروه‌های کلا مرتب با عمل ماکسیم بود. اوستین^{۷۴} (شاگرد هیوئیت در سال ۱۹۶۲) هم نتایجی درباره نیم‌گروه اعداد حقیقی مثبت به دست آورده بود. او مشابه قضیه دوگانی پونتریاگین را برای بعضی نیم‌گروه‌ها در ۱۹۶۳ اثبات کرده بود.

نظریه توابع تقریباً متناوب نیز از گروه‌ها به راحتی به نیم‌گروه‌ها تعمیم می‌یافت. تحقیقات اولیه به بور^{۷۵} به سال ۱۹۲۶ روی توابع متناوب روی خط حقیقی می‌رسد و سپس تعمیم این مفهوم به دست بوخنر^{۷۶} در ۱۹۲۷ و فون نویمان در ۱۹۳۷ به گروه توپولوژیک دلخواه. سپس آندره وی در ۱۹۴۰ و وان کامپن^{۷۷} در ۱۹۳۶ مفهوم فشرده‌سازی را به کار بردند. دلیو^{۷۸} (شاگرد امیل آرتین در ۱۹۵۴) و گلیکسبرگ^{۷۹} (شاگرد آرنز در ۱۹۵۱) در ۱۹۶۱ نتایج کلی در این زمینه ثابت کردند و پیم در ۱۹۶۵ نتایج را به صورت حالت خاصی از قضیه‌هایی که در مورد پیچش تابع‌های خطی ثابت کرده بود به دست آورد.

همچنین بررسی توابع معین مثبت روی نیم‌گروه‌ها به سال ۱۹۵۵ به دست ناد^{۸۰} (همکار معروف ریس) می‌رسد. در ۱۹۷۱ تعمیمی از قضیه بوخنر از گروه‌های آبلی گسسته به نیم‌گروه‌های گسسته منتشر می‌شود (صورت این قضیه حتی به سال ۱۹۵۵ نیز می‌رسد).

^{۶۵}Yngve Domar (1928-) ^{۶۶}Lennart Axel Edvard Carleson (1928-) ^{۶۷}John Wermer (1927-) ^{۶۸}Ralph Saul Phillips (1913-1998) ^{۶۹}V. P. Gurarii ^{۷۰}Robert Edmund Edwards (1926-2000) ^{۷۱}Garth Ian Gaudry (1941-2012) ^{۷۲}Edwin Hewitt (1920-1999) ^{۷۳}Herbert Samuel Zuckerman (1912-1970) ^{۷۴}Charles Ward Austin ^{۷۵}Harald August Bohr (1887-1951) ^{۷۶}Salomon Bochner (1899-1982) ^{۷۷}Egbert Rudolf van Kampen (1908-1942) ^{۷۸}Karel deLeeuw (1930-1978) ^{۷۹}Irving Leonard Glicksberg (1925-) ^{۸۰}Béla Szőkefalvi-Nagy (1913-1998)

تحقیقات درباره توابع معین مثبت روی نیمگروه‌های آبلی با برگشت و یا نیمگروه‌های موضعا فشرده که در یک گروه موضعا فشرده می‌نشیند را در فاصله ۱۹۵۴-۱۹۸۲ می‌توان دید.

با توجه به اهمیت اندازه هار در نظریه گروه‌های موضعا فشرده طبیعی بود که به دنبال اندازه‌هایی مشابه برای نیمگروه‌ها بگردند. از اینجا مسئله بررسی میانگین‌های پایا روی نیمگروه‌های توپولوژیک پیدا شد. نتایج زیادی در این باره وجود داشت، ولی همگی نشان می‌داد که امیدی به یافتن نظیری برای اندازه هار روی نیمگروه‌ها نیست. وجود میانگین‌ها روی جبر $\ell^1(S)$ و ارتباط آن با ساختار نیمگروه S به‌طور وسیعی بررسی شده بود. البته موضوع میانگین‌پذیری به سوالی از لبگ در ۱۹۰۴ درباره یکتایی اندازه لبگ تحت شرط متناهی جمع‌پذیری می‌رسد. از آثار باناخ در ۱۹۲۳ و هاسدورف در ۱۹۱۴ که بگذریم به تعریف فون نویمان از گروه‌های میانگین‌پذیر گسسته می‌رسیم. دی^{۸۱} در ۱۹۵۰ اصطلاح میانگین‌پذیری را باب کرد و از آن زمان به بعد این مفهوم در جهت‌های مختلفی از نیمگروه‌های گسسته و توپولوژیک گرفته تا گروه‌های موضعا فشرده، جبرهای باناخ، جبرهای فون نویمان گسترش یافته است. اوج بررسی مفاهیم اولیه میانگین‌پذیری نیمگروه‌های توپولوژیک به‌جز دهه ۱۹۴۰ که شروع آن توسط دی بود، دهه‌های ۶۰، ۷۰ و حتی ۸۰ میلادی است. از جمله افرادی که در این زمینه تحقیقاتی دارند و در داستان ما نقشی دارند دو شاگرد ادموند گرانیئر^{۸۲} هستند: جیمز ونگ و آنتونی تومینگ لائو که هر دو در دانشگاه بریتیش کلمبیا تحت نظر او و در زمینه میانگین‌پذیری گروه‌ها و نیمگروه‌ها توپولوژیک در سال ۱۹۶۹ فارغ‌التحصیل شدند. البته موضوع رساله گرانیئر نیز همین حوزه بوده است که در سال ۱۹۶۲ تحت نظر هری کستن^{۸۳} از دانشگاه عبری اورشلیم فارغ‌التحصیل شده است (بد نیست اشاره کنیم که نسب علمی کستن از طریق مارک کتس^{۸۴} و بعد از آن اشتاینه‌اوس به هیلبرت بزرگ می‌رسد).

مفهوم میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را جانسون در ۱۹۷۲ مطرح کرد و نشان داد جبر گروهی یک گروه موضعا فشرده میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر گروه مربوط میانگین‌پذیر به مفهوم سابق باشد. تعمیم این نتیجه به حالت نیمگروهی از ۱۹۷۸ آغاز شد. موضوع میانگین‌پذیری با انتشار مقاله‌ای از قهرمانی و لوی^{۸۵} در سال ۲۰۰۴ جان تازه‌ای یافت که تا این زمان هم ادامه دارد و بخشی مهمی از آثار لشکری زاده تحت تاثیر همین مقاله قرار دارد که با همکاری سامع، دانشجوی دکترای او، به انجام رسیده است.

اما موضوع مهم دیگر، جبرهای پیچشی روی نیمگروه‌ها بود. پیش از توابع روی نیمگروه‌ها در حالت‌های خاص شناخته شده بود؛ از جمله پیش روی اعداد صحیح نامنفی که در حاصل ضرب کوشی ظاهر می‌شود. همچنین کاربرد این حاصل ضرب در نظریه اعداد به سال ۱۸۹۴ باز می‌گردد. پیش از توابع روی خط حقیقی مثبت نیز در نظریه توابع تحلیلی و نیمگروه‌های عملگری شناخته شده بود. اما تحقیقات مهم در این زمینه به سال‌های پایانی ۱۹۵۰ باز می‌گردد. در ۱۹۵۱ نیز آرنز پیش بین تابع‌های خطی به‌غیر از اندازه‌ها را تعریف کرده بود که امروزه به ضرب‌های آرنز معروف‌اند. هیوئیت و زوکرمن در چند مقاله مهم در سال‌های ۱۹۵۲-۱۹۵۷ جبرهای پیچشی روی نیمگروه‌ها متناهی، گسسته، و کلا مرتب را تعریف و برخی خواص مشخصه‌ها و ساختار جبری آن‌ها را بررسی کرده بودند. در سال ۱۹۶۴ تعریف مشابهی را پیم ارائه کرد. وی پیوستگی راست این عمل را نیز بررسی کرد. پیم اشاره می‌کند که این تعریف را وستون در سال ۱۹۵۳ بسط داده ولی منتشر نکرده است. تعریف‌های اندکی متفاوت‌تر را باک^{۸۶} در ۱۹۵۰ آورده است. گلیکسبرگ در ۱۹۵۹ پیش بین اندازه‌های منظم و کراندار روی نیمگروه موضعا فشرده و جداگانه پیوسته S را که با $M(S)$ نشان داده می‌شود، بررسی کرد و نشان داد که تشکیل جبر باناخ می‌دهد. ونگ در ۱۹۷۸ و استرومبری^{۸۷} (شاگرد هیوئیت در ۱۹۵۸) در سال ۱۹۵۹ همین کار را برای وقتی ضرب توامان پیوسته است انجام دادند. این دو مقاله سنگ بنای بررسی جبر پیچشی اندازه‌ها روی نیمگروه‌های توپولوژیک‌اند.

جبر $M(S)$ فاقد خواص جالب مشابه حالت گروه‌های موضعا فشرده است. به‌ویژه، زیرجبر شاخصی مثل $L^1(G)$ ندارد، جبری که مهم‌ترین شی مورد بررسی در آنالیز هارمونیک روی گروه‌ها است. تلاش برای یافتن نظیری برای آن منجر به بررسی اندازه‌های پایا شد. ولی این نیز چاره کار نبود، زیرا روی بعضی از نیمگروه‌ها چنین اندازه‌ای بی‌مایه از کار در می‌آید. راه دیگر شاید در نظر گرفتن اندازه زیرپایا و تشکیل فضای اندازه‌های مطلقا پیوسته نسبت به آن باشد. در ۱۹۶۷ راتمن^{۸۸} این کار را کرد، ولی این اندازه هم در برخی نیمگروه‌ها

^{۸۱}Mahlon Marsh Day (1913-1992) ^{۸۲}Edmond Ernest Granirer (1935-2020) ^{۸۳}Harry Kesten (1931-2019) ^{۸۴}Mark Kac (1914-1984) ^{۸۵}Richard James Loy (1943-) ^{۸۶}Robert Creighton Buck (1920-1998) ^{۸۷}Karl R. Stromberg (1931-1994)

^{۸۸}Neal Jules Rothman

بی‌مایه از آب در آمد. متاثر از مقاله هیوئیت و زوکرمن، در سال ۱۹۶۶ لاردی^{۸۹} فضای توابع مطلقا پیوسته نسبت به اندازه لبگ روی بازه کراندار با عمل ماکسیم را در نظر گرفت و جبر $L^1(a, b)$ را بررسی کرد. دیگران از جمله برگمن و راتمن در ۱۹۶۹ و جانسون در ۱۹۸۱ و بیکر، واسادو، و پیم هم فضای $L^p(a, b)$ روی نیمگروه‌های کلا مرتب را بررسی کردند. راه دیگر، که موفق‌تر از کار درآمد، استفاده از ویژگی‌های مشخص‌کننده اندازه هار بود. این ویژگی‌ها در کتاب معروف هیوئیت به سال ۱۹۶۳ نیز آمده است و بررسی اندازه‌های پیوسته مطلق (مفهومی که به لبگ به سال ۱۹۰۴ برمی‌گردد) نسبت به اندازه هار و بررسی زیرجبر بسته $M_a(G)$ از $M(G)$ قبلا (۱۹۵۸) انجام گرفته بود. در طی چهار مقاله در فاصله ۱۹۶۹-۱۹۷۲، جان بیکر و همسرش پس از بررسی تعریف‌های مختلف به این تعریف رسیدند: فرض کنید S نیمگروه موضعا فشرده، هاسدورف و با عمل ضرب تواما پیوسته باشد و تعریف کنید

$$\tilde{L}(S) = \{\mu \in M(S) \mid x \mapsto \bar{x} * |\mu| \text{ و } x \mapsto |\mu| * \bar{x} \text{ ضعیف پیوسته باشند}\}.$$

در اینجا $\bar{x}$ اندازه دیراک در نقطه x است. این مجموعه با مجموعه $M_a(S)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود برابر است: تعریف کنید

$$M_a^l(S) = \{\mu \in M(S) \mid x \mapsto |\mu|(x^{-1}K) \text{ تابع } K \text{ فشرده}\}.$$

و به‌طریق مشابه، $M_a^r(S)$ را نیز تعریف کنید و بنویسید

$$M_a(S) = M_a^l(S) \cap M_a^r(S).$$

توجه کنید که $x^{-1}K = \{s \in S \mid xs \in K\}$.

مشابه این تعریف از اندازه‌های مطلقا پیوسته برای بعضی نیمگروه‌ها در رساله هارت^{۹۰} در سال ۱۹۷۰ در دانشگاه دولتی کانزاس آمریکا با عنوان اندازه‌های مطلقا پیوسته روی نیمگروه‌ها تحت راهنمایی استرومیری نیز آمده است (جیمز ونگ از هر دوی این تعریف‌ها آگاهی داشته است و به آن در مقاله‌ای در همین زمینه به سال ۱۹۷۳ اشاره کرده است). این جبر بسیار شبیه به $L^1(G)$ رفتار می‌کند. بیکرها پایه S را برابر اجتماع محمل اندازه‌های عضو $\tilde{L}(S)$ تعریف می‌کنند و نیمگروه S را پایه می‌نامند اگر نیمگروه با پایه خودش برابر باشد. این جبر خاص از اوایل دهه ۱۹۷۰ مورد توجه قرار گرفت و یکی از حوزه‌های پژوهشی حلقه بیکرها (در دانشگاه شفیلد) و در معدودی جاها دیگر بود. از پیشگامان این حوزه در فاصله ۱۹۷۸-۱۹۸۴ که اوج شکوفایی آن نیز محسوب می‌شود باید از دزینشیوی^{۹۱}، ریاضی‌دان و اهل سیاست زیمبابوه‌ای و از شاگردان آلن تی. پترسن^{۹۲} در دانشگاه ابردین در ۱۹۷۸، و اشلاپین^{۹۳}، ریاضی‌دان هلندی و از شاگردان وان روی^{۹۴} در دانشگاه نایمخن در ۱۹۷۶، نام برد. این دو نفر تعریف‌های مختلفی از این نوع (از جمله پیوستگی نرم به جای دیگر پیوستگی‌ها و خود اندازه به جای تغییر کل آن) را بررسی کرده‌اند و شرط موضعا فشرده‌گی را نیز گسترش داده‌اند (به‌ویژه، اشلاپین مفهوم بسیار کلی‌تر از نیمگروه پایه به نام استیپ^{۹۵} را تعریف و مطالعه کرده است). نمادهای $M_a(S)$ ، $M_a^r(S)$ ، $M_a^l(S)$ را هارت و همچنین ونگ به کار برده‌اند و ظاهرا دزینشیوی آن‌ها را رایج کرده است.

بله این همان شیء محبوب رساله دکترای و بعدا، سراسر عمر حرفه‌ای زنده‌یاد لشکری‌زاده بود. رساله دکترای او پنج فصل دارد: فصل اول: مقدمات؛ فصل دوم: نمایش‌ها روی نیمگروه‌های توپولوژیک؛ فصل سوم: قضیه بوخنر و قضیه گشتاور هاسدورف روی نیمگروه‌های توپولوژیک پایه؛ فصل چهارم: دستور لوی-خینچین برای نیمگروه‌های توپولوژیک پایه دارای برگشت، و فصل پنجم: برخی نتایج برای نیمگروه‌های توپولوژیک وزندار. در دو مقاله [۱، ۲] که مستخرج از رساله دکترای او و در اصل مهم‌ترین اثر او نیز است به گسترش نظریه نمایش گروه‌های توپولوژیک به رده بسیار وسیع نیمگروه‌های توپولوژیک پایه می‌پردازد. این دو مقاله به گفته بیکر تنها اثر مهم در فاصله ۱۹۸۴-۱۹۹۰ در حوزه نیمگروه‌های پایه‌اند. لشکری‌زاده در آنجا نشان می‌دهد که نمایش روی جبر نیمگروهی $\tilde{L}(S)$ روی یک فضای باناخ بازتابی را می‌توان با انتگرالی که نمایش مناسبی از آن نیمگروه روی همان فضای باناخ را دارد نمایش داد. سپس این نتایج را به

^{۸۹}L. J. Lardy ^{۹۰}Garry Hart ^{۹۱}Heneri Amos Murima Dzinotyiwewi (1951-) ^{۹۲}Alan L. T. Paterson (1944-) ^{۹۳}Gerardus L. G. Sleijpen (1950-) ^{۹۴}Arnoud van Rooij (1936-) ^{۹۵}stip

جبر وزندار اندازه‌های همین دسته نیمگروه‌ها تعمیم می‌دهد. در دومین مقاله موفق به اثبات قضیه معروف بوخنر به نیمگروه‌های محبوبش می‌شود. کریستنسن^{۹۶} در این باره می‌نویسد: «این اولین و تنها تعمیم موفق قضیه به نیمگروه‌ها است که برخلاف آثار قبلی درباره پیوستگی مشخصه‌ها اطلاعاتی نیز به دست می‌دهد.» همچنین در [۲۲] تعمیمی از قضیه بوخنر-وی مبنی بر اینکه هر تابع معین مثبت تبدیل یک اندازه نامنفی است برای *-نیمگروه‌های پایه به دست می‌دهد. نظریه نمایش و توابع معین مثبت از دل‌بستگی‌های همیشگی او بود؛ مقالات [۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۲] کم‌وبیش حول همین موضوع‌اند.

به‌طور کلی، موضوع تحقیقات نسل اول پرورش‌یافتگان دکترای داخل، تحت تاثیر علایق استادان راهنمایشان آنالیز روی همین نیمگروه‌های توپولوژیک بود. ولی به‌دلایلی ازجمله افزایش تعداد دانشجویان، تغییر ذائقه داوران مجلات بین‌المللی، پیدایش موضوعات جدید و جذاب‌تر روی گروه‌های توپولوژیک و جبرهای باناخ در دنیا، و گسترش ارتباطات بین‌المللی به‌واسطه برگزاری سمینارهای بین‌المللی و رفت‌وآمد ریاضی‌دانان خارجی به کشور و تحصیل دانشجویان نزد آنالیزهارمونیک‌دان‌های برجسته دنیا، آرام‌آرام باعث از رونق افتادن این موضوع محبوب او و هم‌دوره‌ای‌هایشان شده است. البته که گزیری از این امر نیست و مطمئناً برکاتی نیز به دنبال داشته است؛ نمونه آن مقاله [۵۵] است. این مقاله ترکیب نیکویی از حوزه محبوب و سنتی دکتر لشکری‌زاده با موضوعات جدید و نمونه‌ای از زایش طبیعی یک تحقیق اصیل ریاضی است. قضیه بوخنر-شوئنبرگ-ابرلاین^{۹۷}، آن دسته از توابع پیوسته روی گروه دوگان یک گروه آبدی موضعا فشرده را که تبدیل فوریه-اشتیلتیس یک عضو از جبر اندازه‌ها روی آن گروه است معین می‌کند. بررسی این توابع در سال ۱۹۹۰ به مفهوم جبرهای بوخنر-شوئنبرگ-ابرلاین یا به‌اختصار BSE توسط تاکاهاسی^{۹۸} و هاتوری^{۹۹} و در ۲۰۱۰ توسط اولگر^{۱۰۰} و کانی‌اوت^{۱۰۱} انجامید. ابرلاین ثابت کرده بود که جبر گروهی هر گروه موضعا فشرده آبدی جبر BSE است. در مقاله مذکور ثابت می‌کنند که جبر $L^p(S, \mu)$ روی نیمگروه کلا مرتب و فشرده S با عمل ماکسیم این خاصیت را ندارد.

موضوع دیگر آثار او عبارت‌اند از جبرهای لائو، مرکز توپولوژیک جبرهای نیمگروهی، ضربگرها و هم‌ریختی‌ها، میانگین‌پذیری جبرهای نیمگروهی، مفاهیم مختلف میانگین‌پذیری روی جبرهای باناخ مورد توجه در آنالیز هارمونیک، جبر فوریه-اشتیلتیس روی ابرگروه‌ها، جبرهای گروپویدی، و جبرها با خاصیت بوخنر-شوئنبرگ-ابرلاین. اگر سه معیار اصالت، نوآوری در مفاهیم و اثبات‌ها، و اهمیت اثر را مد نظر قرار دهیم مقالات مستقل او از جمله [۱، ۲، ۵، ۹، ۲۰، ۲۲، ۲۳] و مقالات مشترک با امیری در زمینه نظریه نمایش گروپویدیها [۲۹] و مشترک با سامع در زمینه مفاهیم مختلف میانگین‌پذیری مانند میانگین‌پذیری تقریبی و همچنین جبرهای فوریه-اشتیلتیس روی ابرگروه‌ها [۲۶، ۳۸] و مشترک با کمالی در زمینه جبرها با خاصیت بوخنر-شوئنبرگ-ابرلاین [۴۵، ۵۵] برجسته‌ترین و مهم‌ترین تحقیقات او است. از خوش‌اقبالی‌های هر استادی داشتن دانشجویان با استعداد و خوب‌پرورش‌یافته است و او بسیار بختیار بود که از این نعمت هم بی‌بهره نبود.

۶. دانشجویان دکترای

دوره دکترای ریاضی در دانشگاه اصفهان در سال ۱۳۷۲ ایجاد شد و اولین دانشجوی این دوره در شاخه آنالیز تابعی، داود علیمحمدی تحت راهنمایی دکتر زعفرانی در سال ۱۳۷۲ و اولین دانشجوی دوره دکترای آنالیز هارمونیک نیز حیدر قائدامینی در همان سال تحت راهنمایی دکتر علی رجالی بود. بنابراین از طول عمر این دوره در دانشگاه اصفهان نزدیک به ۲۸ سال می‌گذرد.

اولین دانشجوی دوره دکترای تحت راهنمایی دکتر لشکری‌زاده، بهرام محمدزاده (ورودی ۱۳۷۹) است. عنوان رساله او میانگین‌پذیری جبرهای نیمگروه‌های پایه است و در سال ۱۳۸۴ فارغ‌التحصیل شده است. زنده‌یاد دکتر لشکری‌زاده در طول ۱۸ سال تا زمان بازنشستگی، راهنمایی تعداد ۱۲ رساله دکترای را در دانشگاه اصفهان برعهده داشته است. در جدول زیر، مشخصات رساله‌هایی را که در آن استاد راهنما بوده است به‌همراه بازه زمانی مربوط آورده‌ایم. در ۶ رساله دکترای نیز استاد مشاوره بوده است: محمد ابوالقاسمی (۸۱-۸۶)، فریدون حبیبیان (۸۱-۸۸)، اکرم یوسف‌زاده (۸۱-۸۷)، فاطمه ابطیعی (۸۲-۸۸)، حسنعلی لطفی فروشانی (۸۷-۹۳)، بهرام خودسیانی (۸۷-۹۳).

^{۹۶}Jens Peter Reus Christensen (1944-) ^{۹۷}Bochner-Schoenberg-Eberlein ^{۹۸}K. Tanahashi ^{۹۹}O. Hatori ^{۱۰۰}Ali Ülger
(1950-) ^{۱۰۱}Eberhard Kaniuth (1937-2017)



در کلاس درس (دانشگاه اصفهان، ۱۳۷۲)

نام دانشجو	عنوان رساله
بهرام محمدزاده (۷۹-۸۴)	میانگین پذیری داخلی نیمگروه های موضعاً فشرده و جبرهای آن ها
حبیب امیری (۸۰-۸۶)	آنالیز هارمونیک روی گروپوئیدها
محبوبه رضایی (۸۰-۸۷)	یکنوایی و تحدب تقریبی
صابر ناصری (۸۱-۸۸)	میانگین پذیری تقریبی جبرهای گروهی وزن دار و دوگان دوم آن ها
محمود پورغلامحسین (۸۱-۸۸)	جبرهای فوریه و فوریه استیلجس روی ابرگروه ها
حجت الله سامع (۸۱-۸۵)	میانگین پذیری و میانگین پذیری تقریبی برخی جبرهای باناخ
زهرا قربانی (۸۶-۹۱)	جبرهای باناخ φ -دوطرفه تخت
محمد والایی انور (۸۷-۹۲)	ساختار جبرهای باناخ میانگین پذیر مدولی و سوپر میانگین پذیر مدولی
زینب کمالی (۸۷-۹۲)	جبرهای BSE
ابراهیم سوری (۸۸-۹۳)	جواب های مشترک مسئله نقطه ثابت، مسئله تعادل و نابرابری تغییراتی
حمزه ابراهیمی (۸۹-۹۵)	میانگین پذیری مدولی و نقطه ای جبرهای باناخ
حمید صادقی نهرخلجی (۸۹-۹۵)	میانگین پذیری (ضعیف) مدولی جمع مستقیم جبرهای باناخ و ایده آل ها

۷. فهرست مقاله های منتشر شده در مجله های علمی

- [1] M. Lashkarizadeh Bami. Bochner's theorem and the Hausdorff moment theorem on foundation topological semi-groups. *Canad. J. Math.*, 37(5):785-809, 1985.
- [2] M. Lashkarizadeh Bami. Representations of foundation semigroups and their algebras. *Canad. J. Math.*, 37(1):29-47, 1985.
- [3] J. W. Baker and M. Lashkarizadeh-Bami. On the representations of certain idempotent topological semigroups. *Semigroup Forum*, 44(2):245-254, 1992.
- [4] M. Lashkarizadeh-Bami. The L^∞ -representation algebra of a foundation topological semigroup. *Manuscripta Math.*, 77(2-3):161-167, 1992.

- [5] M. Lashkarizadeh-Bami. On various types of convergence of positive definite functions on foundation semigroups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 111(2):325–330, 1992.
- [6] J. W. Baker and M. Lashkarizadeh-Bami. The L^∞ -representation algebra of an idempotent topological semigroup. *Semigroup Forum*, 46(1):32–36, 1993.
- [7] M. Lashkarizadeh-Bami. Functional equations and $*$ -representations on topological semigroups. *Manuscripta Math.*, 82(3-4):261–276, 1994.
- [8] J. W. Baker and M. Lashkarizadeh-Bami. Representations and positive definite functions on topological semigroups. *Glasgow Math. J.*, 38(1):99–111, 1996.
- [9] M. Lashkarizadeh Bami. On the multipliers of the pair $(M_a(S), L^\infty(S; M_a(S)))$ of a foundation semigroup S . *Math. Nachr.*, 181:73–80, 1996.
- [10] M. Lashkarizadeh Bami. On the sup-norm closure of the L^∞ -representation algebra $\mathcal{R}(S)$ of a foundation semigroup S . *Semigroup Forum*, 52(3):389–392, 1996.
- [11] M. Lashkarizadeh Bami. Positive functionals on Lau Banach $*$ -algebras with application to negative-definite functions on foundation semigroups. *Semigroup Forum*, 55(2):177–184, 1997.
- [12] Mahmood Lashkarizadeh Bami. The existence of faithful continuous representations on certain topological semigroups. *J. Sci. Univ. Tehran Int. Ed.*, 2(1):23–28, 1997.
- [13] Mahmood Lashkarizadeh Bami. On some topologies which coincide on $\mathcal{R}_+(S)$ for a foundation topological semigroup S . *J. Sci. Univ. Tehran Int. Ed.*, 2(1):13–21, 1997.
- [14] M. Lashkarizadeh Bami. Function algebras on weighted topological semigroups. *Math. Japon.*, 47(2):217–227, 1998.
- [15] M. Lashkarizadeh Bami. Ideals of $M(S)$ as ideals of $LUC(S)^*$ of a compactly cancellative topological semigroup S . *Math. Japon.*, 48(3):363–366, 1998.
- [16] M. Lashkarizadeh-Bami. On a conjecture on the uniform convergence of a sequence of weighted bounded positive definite functions on foundation semigroups. *Taiwanese J. Math.*, 2(1):87–95, 1998.
- [17] M. Lashkarizadeh Bami. A proof of Bochner-Weil's theorem from its discrete form on weighted foundation semigroups. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 25(2):49–58, 1999.
- [18] M. Lashkarizadeh Bami. The duality of the L^∞ -representation algebra $R(S)$ of a foundation semigroup S and function algebras. *J. Sci. Islam. Repub. Iran*, 11(2):127–129, 2000.
- [19] M. Lashkarizadeh Bami. Generalized positive definite functions and completely monotone functions on foundation semigroups. *J. Sci. Islam. Repub. Iran*, 11(3):245–252, 2000.
- [20] M. Lashkarizadeh Bami. The topological centers of $LUC(S)^*$ and $M_a(S)^{**}$ of certain foundation semigroups. *Glasg. Math. J.*, 42(3):335–343, 2000.
- [21] M. Lashkarizadeh Bami. Amenability of certain Banach algebras with application to measure algebras on foundation semigroups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 9(3):399–404, 2002.
- [22] M. Lashkarizadeh Bami. A generalization of Bochner-Weil's theorem and Stone's theorem on foundation semigroups. *Arch. Math. (Basel)*, 83(2):146–153, 2004.
- [23] M. Lashkarizadeh Bami. Isometric isomorphisms between Banach algebras related to a certain class of Clifford topological semigroups. *Semigroup Forum*, 69(2):219–229, 2004.
- [24] M. Lashkarizadeh Bami. The coincidence of some topologies on the unit ball of the Fourier-Stieltjes algebra of weighted foundation semigroups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 12(4):535–542, 2005.
- [25] M. Lashkarizadeh Bami. Isometric isomorphisms between locally compact hypergroups and their related algebras. *Sci. Math. Jpn.*, 61(1):75–81, 2005.
- [26] M. Lashkarizadeh Bami and H. Samea. Approximate amenability of certain semigroup algebras. *Semigroup Forum*, 71(2):312–322, 2005.

- [27] H. Amiri and M. Lashkarizadeh Bami. Principal groupoids with continuous weak multiplication. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 74(1):15–28, 2006.
- [28] M. Lashkarizadeh Bami. Decomposition of H^* -algebra valued negative definite functions on topological $*$ -semigroups. *J. Sci. Islam. Repub. Iran*, 17(2):165–173, 2006.
- [29] H. Amiri and M. Lashkarizadeh Bami. Square integrable representation of groupoids. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 23(2):327–340, 2007.
- [30] M. Lashkarizadeh Bami, B. Mohammadzadeh, and R. Nasr-Isfahani. Inner invariant extensions of Dirac measures on compactly cancellative topological semigroups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 14(4):699–708, 2007.
- [31] M. Lashkarizadeh Bami, B. Mohammadzadeh, and H. Samea. Derivations on certain semigroup algebras. *J. Sci. Islam. Repub. Iran*, 18(4):339–345, 2007.
- [32] Mahmoud Lashkarizadeh Bami and Hojatollah Samea. Amenability and essential amenability of certain Banach algebras. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 44(3):377–390, 2007.
- [33] M. Lashkarizadeh Bami and B. Mohammadzadeh. Inner amenability of locally compact groups and their algebras. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 44(2):265–274, 2007.
- [34] M. Lashkarizadeh Bami and S. Naseri. The structure, approximate identities, and duals of l^p -Munn algebras. *Sci. Math. Jpn.*, 68(1):55–61, 2008.
- [35] M. Lashkarizadeh Bami. Fourier transforms of bounded bilinear forms on $C^*(S_1) \times C^*(S_2)$ of foundation $*$ -semigroups S_1 and S_2 . *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 24(3):439–454, 2008.
- [36] M. Lashkarizadeh Bami. The semisimplicity of $L^1(K, w)$ of a weighted commutative hypergroup K . *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 24(4):607–610, 2008.
- [37] M. Lashkarizadeh Bami, M. Pourgholamhossein, and H. Samea. Left cancellative and left shiftable hypergroups. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 39(1):87–97, 2008.
- [38] M. Lashkarizadeh Bami, M. Pourgholamhossein, and H. Samea. Fourier algebras on locally compact hypergroups. *Math. Nachr.*, 282(1):16–25, 2009.
- [39] M. Lashkarizadeh Bami and H. Samea. Amenability and essential amenability of certain convolution Banach algebras on compact hypergroups. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 16(1):145–152, 2009.
- [40] Mahmoud Lashkarizadeh Bami and Hojatollah Samea. Approximate and essential left amenability of Lau algebras with application to semigroup algebras. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 46(1):1–24, 2009.
- [41] Zahra Ghorbani and Mahmood Lashkarizadeh Bami. ϕ -approximate biflat and ϕ -amenable Banach algebras. *Proc. Rom. Acad. Ser. A Math. Phys. Tech. Sci. Inf. Sci.*, 13(1):3–10, 2012.
- [42] Zahra Ghorbani and Mahmood Lashkarizadeh Bami. ϕ - n -approximate weak amenability of abstract Segal algebras. *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 74(4):59–68, 2012.
- [43] M. Lashkarizadeh Bami. The Banach algebra $\mathcal{F}(S, T)$ and its amenability of commutative foundation $*$ -semigroups S and T . *Taiwanese J. Math.*, 16(2):787–802, 2012.
- [44] Z. Ghorbani and M. Lashkarizadeh Bami. ϕ -amenable and ϕ -biflat Banach algebras. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 39(3):507–515, 2013.
- [45] Zeinab Kamali and Mahmood Lashkarizadeh Bami. Bochner-Schoenberg-Eberlein property for abstract Segal algebras. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 89(9):107–110, 2013.
- [46] Zeinab Kamali and Mahmood Lashkarizadeh Bami. The multiplier algebra and BSE property of the direct sum of Banach algebras. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 88(2):250–258, 2013.
- [47] M. Lashkarizadeh Bami, M. Valaei, and M. Amini. Super module amenability of inverse semigroup algebras. *Semigroup Forum*, 86(2):279–288, 2013.

- [48] M. L. Bami, M. Valaei, and M. Amini. Module amenability and weak module amenability of Banach algebras. *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 76(4):35–44, 2014.
- [49] Mahmood Lashkarizadeh Bami, Mohammad Valaei, and Massoud Amini. The structure of ϕ -module amenable Banach algebras. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 176736, 7, 2014.
- [50] Nawab Hussain, Mahmood Lashkarizadeh Bami, and Ebrahim Soori. An implicit method for finding a common fixed point of a representation of nonexpansive mappings in Banach spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, pages 2014:238, 7, 2014.
- [51] Zeinab Kamali and Mahmood Lashkarizadeh Bami. The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for $L^1(\mathbb{R}^+)$. *J. Fourier Anal. Appl.*, 20(2):225–233, 2014.
- [52] M. Lashkarizadeh Bami and E. Soori. Strong convergence of a general implicit algorithm for variational inequality problems and equilibrium problems and a continuous representation of nonexpansive mappings. *Bull. Iranian Math. Soc.*, 40(4):977–1001, 2014.
- [53] Nawab Hussain, Mahmood Lashkarizadeh Bami, and Ebrahim Soori. Erratum to: An implicit method for finding a common fixed point of a representation of nonexpansive mappings in Banach spaces [MR3360584]. *Fixed Point Theory Appl.*, pages 2015:203, 1, 2015.
- [54] A. Bodaghi, H. Ebrahimi, M. Lashkarizadeh Bami, and M. Nemati. Module mean for Banach algebras. *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 78(2):21–30, 2016.
- [55] Zeinab Kamali and Mahmood Lashkarizadeh Bami. The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for totally ordered semigroup algebras. *J. Fourier Anal. Appl.*, 22(6):1225–1234, 2016.
- [56] Abasalt Bodaghi, Hamzeh Ebrahimi, and Mahmood Lashkarizadeh Bami. Generalized notions of module character amenability. *Filomat*, 31(6):1639–1654, 2017.
- [57] M. Lashkarizadeh Bami and H. Sadeghi. A generalization of amenability for topological semigroups and semigroup algebras. *Hacet. J. Math. Stat.*, 46(4):567–577, 2017.
- [58] H. Sadeghi and M. Lashkarizadeh Bami. Module character inner amenability of Banach algebras. *Math. Sci. (Springer)*, 11(3):173–179, 2017.
- [59] Mahmood Lashkarizadeh Bami and Hamid Sadeghi. Module (ϕ, φ) -biprojectivity and module (ϕ, φ) -biflatness of Banach algebras. *Proc. Rom. Acad. Ser. A Math. Phys. Tech. Sci. Inf. Sci.*, 19(4):521–528, 2018.
- [60] H. Sadeghi and M. Lashkarizadeh Bami. Module amenability, module character biprojectivity and module character biflatness of Lau product of two Banach algebras. *Filomat*, 32(19):6627–6641, 2018.

سعید مقصودی

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.

v_soltani@pnu.ac.ir

