

پیچش تابع‌ها و فضاهای اورلیچ

ابراهیم اکبرگللو

چکیده. در این مقاله ابتدا مقدماتی از فضاهای اورلیچ را بیان می‌کنیم. سپس با استفاده از یک معیار توپولوژیک، بزرگی زیرمجموعه‌هایی بین فضاهای اورلیچ روی یک گروه موضعا فشرده را که عمل پیچش برای آن‌ها تعریف‌شدنی است یا در مجموعه‌ای خاص قرار می‌گیرد تعیین می‌کنیم.

۱. مقدمه

مسئله بسته بودن فضاهای تابعی نسبت به عمل‌های طبیعی جمع و ضرب، یکی از مسئله‌های مهم و مورد بحث در آنالیز ریاضی است. طی سه دهه اخیر بررسی این موضوع برای فضاهای لبگ و اورلیچ مجهز به ضرب نقطه‌ای و پیچش، منجر به تحقیقات وسیع و برجسته شده است. نتیجه‌های حاصل به طور عمده شرایطی را به دست می‌دهند که بدانیم تحت آن‌ها چه زمانی این فضاها نسبت به عمل‌های ذکر شده بسته‌اند. در سال ۲۰۱۰ موضوع تعیین اندازه توپولوژیکی مجموعه زوج مرتب‌هایی که حاصل ضرب آن‌ها در فضای مورد بررسی قرار می‌گیرد، مطرح شد. این نوع نگرش، فهم و تصور هندسی از ساختار و پیچیدگی عمل‌های ضرب را به طور قابل ملاحظه‌ای گسترش دادند. از این رو در این مقاله، به دنبال تعیین اندازه توپولوژیکی مجموعه‌هایی هستیم که با عمل ضرب پیچش بین فضاهای اورلیچ مطرح می‌شوند. نتیجه‌های به دست آمده در حالت کلی نتیجه‌های قبلی را به صورت حالت‌هایی خاص در بر می‌گیرد. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک از تابع‌های حقیقی یا مختلط مقدار باشد که در آن عمل ضرب «۰» روی فضای دکارتی $X \times X$ تعریف می‌شود. حال سوالی که به طور طبیعی در ذهن ایجاد می‌شود این است که

آیا برای تمام زوج مرتب‌های (f, g) در $X \times X$ ، تابع $f \cdot g$ متعلق به X است؟

در حالت‌های خاص، پاسخ‌های مشخصی به این نوع سوال‌ها داده شده است. مثلاً برای فضاهای لبگ $L^p(X, \mu)$ در سال ۱۹۷۸ ساب‌رامانیان^۱ در [۲۲] و برای فضاهای اورلیچ $L^\Phi(X, \mu)$ در سال ۱۹۸۵ هودزیک^۲ در [۹] و در سال ۱۹۹۳ آرنز^۳، گلدبرگ^۴ و لوکسمبورگ^۵ در [۵] شرط‌های لازم و کافی برای اینکه این فضاها با ضرب نقطه‌ای تشکیل جبر باناخ بدهند ارائه کرده‌اند.

عبارات و کلمات کلیدی: تابع یانگ، فضای اورلیچ، گروه موضعا فشرده، پیچش، تخلخل
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریایی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۹/۱۴

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130896.1474>

¹B. Subramanian ²H. Hudzik ³R. Arens ⁴Moshe Goldberg ⁵Wilhelmus Anthonius Josephus Luxemburg (1929 – 2018)

با این حال در مورد همین فضاها و با عمل پیچش روی گروه توپولوژیک موضعا فشرده G مجهز به اندازه هار چپ λ ، نتیجه‌ها بسیار پیچیده و تا حدی شگفت‌انگیزند؛ تا جایی که اثبات بسته‌بودن فضاهای $L^p(G, \lambda)$ برای $p \in (1, \infty)$ با ضرب پیچش با فشردگی گروه G معادل می‌شود. این نتیجه حدوداً ۳۰ سال مسئله‌ای حل‌نشده در آنالیز هارمونیک با عنوان «حدس L^p » بود که اولین بار ژلازکو^۶ در [۲۶] و مستقل از او راجاگوپالان^۷ در [۱۸] مطرح کرده بودند و بالاخره در سال ۱۹۹۰ ساکی^۸ در [۲۱] آن را حل کرد. برای اطلاعات بیشتر درباره این حدس [۲۷] را مطالعه کنید.

ذکر این نکته لازم است که این مسئله را اونیل^۹ در [۱۴] برای فضاهای اورلیچ در سال ۱۹۶۵ بررسی کرده است. به بیان دقیق‌تر، وی نشان داد که اگر Φ_i برای $i = 1, 2, 3$ ، تابع‌های یانگ باشد به طوری که $\Phi_i^{-1}(x)\Phi_j^{-1}(x) \leq \Phi_k^{-1}(x)$ برای $x \geq 0$ ، آنگاه برای هر $f_i \in L^{\Phi_i}(X)$ ، $i = 1, 2$ و $f_1 \cdot f_2 \in L^{\Phi_3}(X)$ و $N_{\Phi_3}(f_1 \cdot f_2) \leq 2N_{\Phi_1}(f_1)N_{\Phi_2}(f_2)$. به علاوه، اگر G یک گروه تک‌پیمانه‌ای و Φ_i برای $i = 1, 2, 3$ ، تابع‌های یانگ باشند به طوری که $\Phi_i^{-1}(x)\Phi_j^{-1}(x) \leq x\Phi_k^{-1}(x)$ برای هر $x \geq 0$ ، آنگاه برای هر $f_i \in L^{\Phi_i}(X)$ ، $i = 1, 2$ و $f_1 * f_2 \in L^{\Phi_3}(X)$ و $N_{\Phi_3}(f_1 * f_2) \leq 2N_{\Phi_1}(f_1)N_{\Phi_2}(f_2)$.

همچنین در سال ۱۹۸۵ هودزیک، کامینی‌سکا^{۱۰} و موشیلاک در [۱۰] حدس L^p را برای فضاهای اورلیچ مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که برای گروه آبدی G و تابع یانگ Φ ، فضای $L^\Phi(G)$ یک جبر باناخ-اورلیچ^{۱۱} است اگر و تنها اگر G فشرده باشد و یا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} > 0$. این نتیجه در سال ۱۹۸۹ در [۱۲] تعمیم داده شده است. در واقع در آنجا شرط‌های لازم و کافی برای اینکه $L^{\Phi_1}(G) * L^{\Phi_2}(G) \subseteq L^{\Phi_3}(G)$ در حالی که G یک گروه آبدی است ارائه شده است. حدود دو دهه بعد و در سال ۲۰۱۳ در [۴] نشان داده شده است که هرگاه G یک گروه میانگین‌پذیر و Φ یک تابع یانگ Δ_2 -منظم باشند، آنگاه فشردگی G یک شرط لازم برای تبدیل $L^\Phi(G)$ به یک جبر باناخ-اورلیچ است. اخیراً برخی از این نتیجه‌ها در [۲۴، ۱۵، ۲۳] به ابرگروه‌ها تعمیم داده شده و بعضی یافته‌ها در حالت گروهی در مرجع‌های ذکرشده در بالا دوباره اثبات شده‌اند.

همچنین با یک نگاه کمی می‌توان اندازه توپولوژیکی مجموعه زوج‌های مرتبی همچون (f, g) را که $f \cdot g \in X$ در مفهوم رسته‌ای «بر»^{۱۲} و یا تخلخل مورد بررسی قرار داد. اولین نتیجه از این نوع نگرش توپولوژیکی در سال ۲۰۰۰ توسط بالتسزاک^{۱۳} و واخوویچ^{۱۴} در [۶] ظاهر شد. آن‌ها نشان دادند که $\{(f, g) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] : f \cdot g \in L^1[0, 1]\}$ از رسته اول در $L^1[0, 1] \times L^1[0, 1]$ است. این نتیجه را در سال ۲۰۰۵ یاخیمسکی^{۱۵} در [۱۱] با اثبات این که برای $p \geq 1$ ، مجموعه زوج‌های مرتبی همچون (f, g) که $f \cdot g \in X$ ، یا با $L^p(X, \mu) \times L^p(X, \mu)$ یکی است یا یک زیرمجموعه از رسته اول در $L^p(X, \mu) \times L^p(X, \mu)$ است، گسترش داد.

در سال ۲۰۱۰ ونپ^{۱۶} و استروبین^{۱۷} در [۷] صورت قوی‌تر نتیجه‌های قبلی را به این صورت بیان کردند که برای $p, q, r > 0$ ، مجموعه آن دسته از زوج‌های مرتبی همچون $(f, g) \in L^p(X, \mu) \times L^q(X, \mu)$ که $f \cdot g \in L^r(X, \mu)$ ، یا با $L^p(X, \mu) \times L^q(X, \mu)$ یکی است یا یک زیرمجموعه c - σ -متخلخل پایینی برای یک $c > 0$ در $L^p(X, \mu) \times L^q(X, \mu)$ است. همچنین آن‌ها در همان سال در [۸] ثابت کردند که اگر G یک گروه موضعا فشرده غیرفشرده با اندازه هار λ باشد و $p, q \in (1, \infty)$ با شرط $1/p + 1/q < 1$ ، آنگاه برای هر مجموعه متقارن و فشرده V ، در مکمل یک مجموعه σ -متخلخل، عضو $(f, g) \in L^p(G) \times L^q(G)$ موجود است به طوری که $\|f * g(x)\| = \infty$ برای هر $x \in V$. همچنین در سال‌های ۲۰۱۲ و ۲۰۱۳ اکبریگلو و مقصودی در [۳، ۲، ۱] علاوه بر نتیجه‌های جدید، یافته‌های قبلی را به فضاهای اورلیچ گسترش دادند.

در این مقاله پرسش بالا را برای فضاهای اورلیچ روی دسته خاصی از گروه‌های موضعا فشرده که دارای رشد چندجمله‌ای باشند بررسی می‌کنیم.

^۶W. Żelazko ^۷M. Rajagopalan ^۸S. Sacki ^۹R. O’Neil ^{۱۰}A. Kamińska ^{۱۱}Banach-Orlicz algebra ^{۱۲}Baire ^{۱۳}M. Balcerzak ^{۱۴}A. Wachowicz ^{۱۵}J. Jachymski ^{۱۶}S. Głąb ^{۱۷}F. Strobil



(ب) بیرنباوم



(آ) اورلیچ

شکل ۱

۲. فضاها، اورلیچ

شروع نظریه اندازه لبگ و فضاها لبگ به سال ۱۹۰۰ برمی‌گردد. این نظریه در واقع همان نظریه فضای تابع‌های جمع‌پذیر یا L^1 است. در سال ۱۹۰۷ چندین نتیجه درباره فضای تابع‌های مربعی-انتگرال‌پذیر به دست آمد. در سال ۱۹۱۰، اف. ریس^{۱۸} مقاله بنیادی‌اش درباره فضاها L^p را منتشر کرد. وی ثابت کرد دوگان L^p برابر $L^{p'}$ است که در آن $1/p + 1/p' = 1$. وی در اثبات این قضیه از نابرابری $uv \leq u^p/p + v^{p'}/p'$ به ازای $u, v \geq 0$ استفاده کرد. دبلیو. اچ. یانگ^{۱۹} این نابرابری را برای برخی از تابع‌های محدب در سال ۱۹۱۲ به صورت $uv \leq \Phi(u) + \Phi^*(v)$ تعمیم داد. در سال ۱۹۳۱ بیرنباوم^{۲۰} و اورلیچ^{۲۱}، نظریه کلی تابع مزدوج (متمم) Φ^* را برای تابع Φ (که لزوماً محدب نیست) منتشر کردند. این مقاله نقطه اصلی آغاز فضاها L^Φ است. اورلیچ در سال ۱۹۳۲ و ۱۹۳۶ تعریف فضای L^Φ و نرم

$$\|f\|_\Phi = \sup \left\{ \int |f(x)g(y)|dx : \int \Phi^*(|g(x)|)dx \leq 1 \right\}$$

را به دست داد. اورلیچ در اولین مقاله به سال ۱۹۳۲ خود را محدود به تابع Φ با شرط Δ_2 کرد. زاین^{۲۲} در ۱۹۴۹ فضای L^Φ را فضای اورلیچ نامید. باعث تعجب است که تا حدود ۱۹۵۰ متوجه نشدند که روش آسان دیگری برای نرم‌دار کردن فضای L^Φ وجود دارد. این

¹⁸F. Riesz ¹⁹William Henry Young (1863 – 1942) ²⁰Zygmunt Wilhelm Birnbaum (1903 – 2000) ²¹Władysław Roman Orlicz (1903–1990) ²²Adriaan Cornelis Zaanan (1913–2003)

نرم دوم همان تابع مینکوفسکی^{۲۳} یعنی

$$\|f\|_{\Phi} = \inf \{ \lambda > 0 : f/\lambda \in A \}$$

مربوط به مجموعه محدب $A = \{ f : \int \Phi(|f(x)|) dx \leq 1 \}$ است. نرم $\|f\|_{\Phi}$ را ناکانو^{۲۴} در سال ۱۹۵۰ و لوکسمبورگ در سال ۱۹۵۵ معرفی کردند. اما عجیب است که همه آنرا نرم لوکسمبورگ می‌نامند!

نظریه فضاهای اورلیچ را در حالتی که Φ لزوماً محدب نیست، مازور^{۲۵} و اورلیچ در سال ۱۹۵۸ و موشیلاک^{۲۶} و اورلیچ در سال ۱۹۵۹ به پیش بردند. پیش از آن ریاضی‌دانان زیادی از ملیت‌های مختلف درباره‌ی این فضاها تحقیق کردند به‌طوری‌که به شش مکتب مختلف در این‌باره می‌توان اشاره کرد: ژاپن، روسیه، هلند، لهستان، اسرائیل و چین. هر یک از ریاضی‌دانان این حوزه‌ها بر قسمت‌های مختلف این فضا متمرکز شده‌اند.

تعریفی که اورلیچ برای فضای L^{Φ} در سال ۱۹۳۲ عرضه کرد، فضاهای L^1 و L^{∞} را دربر نمی‌گرفت. زاین در سال ۱۹۴۹ این نقیصه را با در نظر گرفتن تابع‌هایی که امکان جهش به ∞ دارند برطرف کرد. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۱۳]، [۱۹] و [۲۰] اشاره کرد.

برای آشنایی مختصر با فضاهای اورلیچ، نمادها و تعریف‌های زیر را از [۱۹] می‌آوریم. فرض کنید (X, Σ, μ) یک فضای اندازه و $L^{\circ}(X)$ مجموعه تمام کلاس‌های هم‌ارزی تابع‌های اندازه‌پذیر روی X باشند. تابع $\Phi : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty]$ را یک تابع یانگ گویم هرگاه

(۱) تابع Φ محدب و از سمت چپ پیوسته باشد؛

(۲) تابع Φ زوج و $\Phi(0) = 0$ ؛

(۳) تابع Φ همه جا صفر یا بی‌نهایت نباشد.

لازم است توجه کنیم که تابع یانگ Φ در بازه $[0, \infty)$ یکنواخت صعودی است. زیرا اگر $0 < x < y$ ، آنگاه داریم:

$$\Phi(x) = \Phi\left(\left(\frac{x}{y}\right)y + \left(1 - \frac{x}{y}\right)0\right) \leq \frac{x}{y}\Phi(y) + \left(1 - \frac{x}{y}\right)\Phi(0) \leq \Phi(y).$$

در صورت حذف شرط $\Phi(0) = 0$ ، ممکن است رفتار تابع یانگ تغییر پیدا کند. به عنوان مثال، تابع محدب زیر در بازه $[0, \infty)$ نزولی اکید است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \ln(1 + |x|) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

وارون تابع یانگ Φ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi^{-1}(s) = \sup\{t \geq 0 : \Phi(t) \leq s\}, \quad s \in [0, \infty).$$

برای هر $s \geq 0$ ، $\Phi(\Phi^{-1}(s)) \leq s$ و اگر $\Phi(s) < \infty$ آنگاه $s \leq \Phi^{-1}(\Phi(s))$. به علاوه اگر تعریف کنیم

$$a_{\Phi} = \sup\{s \in \mathbb{R} : \Phi(s) = 0\}, \quad b_{\Phi} = \sup\{s \in \mathbb{R} : \Phi(s) < \infty\}$$

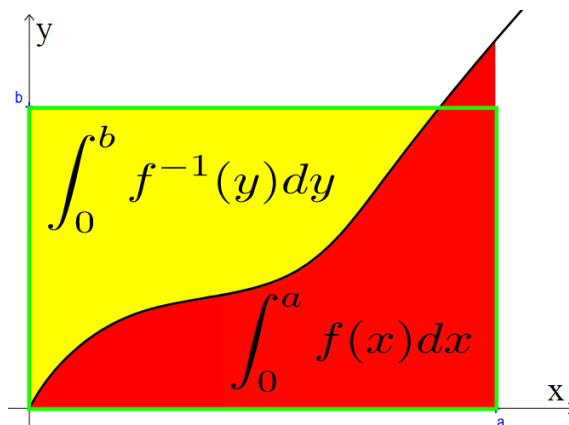
آنگاه $s = \Phi(\Phi^{-1}(s))$ برای هر $s \in [0, \Phi(b_{\Phi})]$ و $s = \Phi^{-1}(\Phi(s))$ برای هر $s \in [a_{\Phi}, b_{\Phi}]$. تابع یانگ Φ در شرط Δ_2 -منظم صدق می‌کند هرگاه عدد حقیقی مثبت η موجود باشد به طوری که $\Phi(\eta s) \leq \eta \Phi(s)$ برای هر $s \in \mathbb{R}$.

²³H. Minkowski ²⁴H. Nakano ²⁵Stanisław Mieczysław Mazur (1905 – 1981) ²⁶J. Musielak

برای هر تابع یانگ Φ و $s \in \mathbb{R}$ قرار دهید

$$(۱.۲) \quad \Psi(s) = \sup\{t|s| - \Phi(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

تابع یکتای Ψ یک تابع یانگ است که مکمل^{۲۷} تابع یانگ Φ نامیده می‌شود. از این رو زوج (Φ, Ψ) را یک زوج مکمل از تابع‌های یانگ گوئیم که در نامساوی $xy \leq \Phi(x) + \Psi(y)$ برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ ، مشهور به «نامساوی یانگ» صدق می‌کنند. در شکل زیر نامساوی یانگ به صورت هندسی به تصویر کشیده شده است. اگر $\Phi' = f$ و $\Psi' = f^{-1}$ ، مجموع مساحت ناحیه پایینی در بازه $[0, a]$ و بالایی در بازه $[0, b]$ ، از مساحت مستطیل به طول a و عرض b بیشتر است.



شکل ۲. نامساوی یانگ

در زیر برای حالت‌هایی برخی از زوج مکمل‌ها ارائه شده است.

(۱) برای هر $1 < p < \infty$ ، تابع $\Phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ یک تابع یانگ Δ_2 -منظم با مکمل $\Psi(x) = \frac{|x|^q}{q}$ است که در آن $1/p + 1/q = 1$.

(۲) هرگاه $\Phi(x) = \tan|x|$ برای $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ و $\Phi(x) = +\infty$ برای $x \in \mathbb{R} \setminus (-\pi/2, \pi/2)$ ، آنگاه

$$\Psi(x) = \begin{cases} (|x| - 1) \arctan \sqrt{|x| - 1} + \arctan \sqrt{|x| - 1} - \sqrt{|x| - 1} & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \\ 0 & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

(۳) هرگاه $\Phi(x) = \sinh|x|$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، آنگاه

$$\Psi(x) = \begin{cases} |x| \ln(|x| + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \\ 0 & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

حال فرض کنید Φ یک تابع یانگ باشد. برای هر $f \in L^\circ(X)$ تعریف می‌کنیم

$$\rho_\Phi(f) = \int_X \Phi(|f(t)|) d\mu(t).$$

فضای اورلیچ $L^\Phi(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(۲.۲) \quad L^\Phi(X) = \{f \in L^\circ(X) : \rho_\Phi(af) < \infty, \quad a > 0\}.$$

²⁷complementary

فضای اورلیچ $L^\Phi(X)$ یک فضای باناخ تحت نرم $N_\Phi(\cdot)$ معروف به نرم «لوکسمبورگ-ناکانو» و اگر $\Phi(t) = 0$ تنها اگر $t = 0$ ، با نرم $\|\cdot\|_\Phi$ معروف به نرم اورلیچ است که به صورت زیر برای هر $f \in L^\Phi(X)$ تعریف می‌شوند

$$N_\Phi(f) = \{k > 0 : \rho_\Phi(f/k) \leq 1\};$$

$$\|f\|_\Phi = \sup \left\{ \int_X |f(t)g(t)|d\mu(t) : g \in L^\Psi(X), \rho_\Psi(g) \leq 1 \right\}.$$

این نرم‌ها با هم معادل‌اند؛ یعنی برای هر $f \in L^\Phi(X)$ داریم

$$(3.2) \quad N_\Phi(f) \leq \|f\|_\Phi \leq 2N_\Phi(f).$$

به علاوه اگر $A \subseteq X$ با $0 < \mu(A) < \infty$ آنگاه

$$(4.2) \quad N_\Phi(\chi_A) = \left[\Phi^{-1} \left(\frac{1}{\mu(A)} \right) \right]^{-1}.$$

فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده و λ اندازه هار چپ^{۲۸} روی G باشد. برای هر $x \in G$ تابع $\lambda_x(A) = \lambda(Ax)$ یک اندازه بُرل منظم پایا روی G تعریف می‌کند. حال منحصربفردی اندازه هار چپ، برای هر $x \in G$ ، وجود عدد مثبتی مثل $\Delta(x)$ را ایجاب می‌کند به طوری که $\lambda_x = \Delta(x)\lambda$. تابع $(0, \infty) \ni \Delta : G \rightarrow \Delta$ را تابع پیمانه‌ای^{۲۹} گروه موضعا فشرده G می‌نامیم. تابع Δ یک همربختی گروهی پیوسته از G به گروه حاصل ضربی $(0, \infty)$ است. هرگاه $\Delta \equiv 1$ ، آنگاه گروه G را تک‌پیمانه‌ای^{۳۰} گوئیم. همچنین برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $K \subseteq G$

$$(5.2) \quad \lambda(K^{-1}) = \int_K \Delta(x^{-1})d\lambda(x).$$

فضای $L^\Phi(G)$ را در نظر می‌گیریم. اگر f و g دو تابع هار اندازه‌پذیر روی G باشند، آنگاه پیچش^{۳۱} این دو تابع در هر نقطه $x \in G$ به صورت زیر

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\lambda(y),$$

تعریف می‌شود به شرطی که انتگرال متناهی باشد. اگر برای λ -تقریباً تمام $x \in G$ انتگرال متناهی باشد، آنگاه پیچش $f * g$ موجود است.

پیچش کاربردهای وسیعی در زمینه‌های آمار و احتمال‌ها، علوم کامپیوتر، آنالیز عددی، پردازش تصویر، الکترونیک و معادله‌های دیفرانسیل دارد؛ برای تاریخچه‌ای از عمل پیچش به [۳۰] مراجعه کنید.

۳. تخلخل: سنجش توپولوژیکِ بزرگی مجموعه‌ها

برای سنجش کوچکی و بزرگی مجموعه‌ها راه‌های زیادی وجود دارد؛ برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به [۲۵، ۲۹، ۲۸] مراجعه کنید. در این مقاله از مفهوم هندسی تخلخل برای سنجش کوچکی مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم که اکنون تعریف آن را می‌آوریم. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. گوی باز به مرکز $x \in X$ و به شعاع $\epsilon > 0$ را با $B(x, \epsilon)$ نشان می‌دهیم. برای عدد حقیقی $0 < c \leq 1$ ، زیرمجموعه M از فضای متریک X ، یک زیرمجموعه c -تخلخل پایینی^{۳۲} نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall x \in M, \liminf_{R \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(x, M, R)}{R} \geq \frac{c}{4},$$

²⁸Haar measure ²⁹modular function ³⁰unimodular ³¹convolution ³²c-lower porous

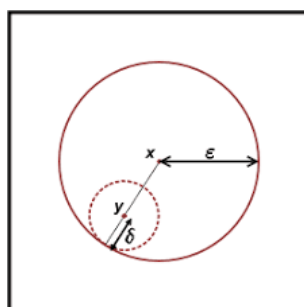
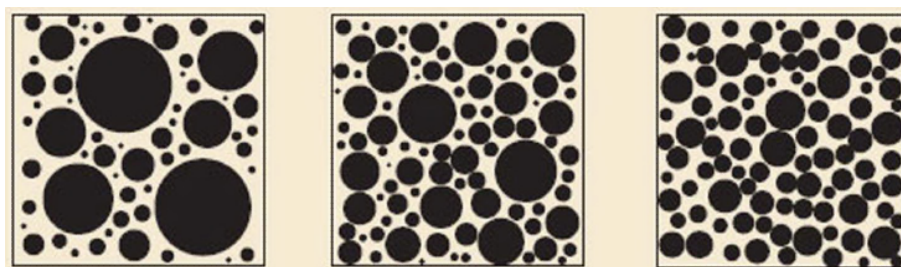
که در آن

$$\gamma(x, M, R) = \sup \{ \delta \geq 0 : \exists y \in X, B(y, \delta) \subset B(x, R) \setminus M \}.$$

روشن است که M یک زیرمجموعه c -متخلخل پایینی است اگر و تنها اگر

$$\forall x \in M, \forall \beta \in (0, c/2), \exists \eta > 0, \forall R \in (0, \eta), \exists y \in X, B(y, \beta R) \subset B(x, R) \setminus M.$$

اجتماع شمارای زیرمجموعه‌های c -متخلخل پایینی با $c > 0$ های متفاوت را یک زیرمجموعه σ -متخلخل پایینی و برای $c > 0$ های یکسان یک زیرمجموعه c - σ -متخلخل پایینی گوئیم. ذکر این نکته ضروری است که هر مجموعه σ -متخلخل پایینی از رسته اول^{۳۳} است؛ [۲۹، ۲۵]. در شکل‌های زیر مفهوم تخلخل از دیدگاه هندسی به تصویر کشیده شده است.



شکل ۳. تجسم هندسی تخلخل

۴. نتایج اصلی

در این بخش نتیجه اساسی این مقاله را که در [۱۲، تعمیم قضیه ۱۱] از گروه‌های موضعا فشرده آبلی به طیف وسیعی از گروه‌های موضعا فشرده است اثبات خواهیم کرد. برای این کار لازم است دسته خاصی از گروه‌های موضعا فشرده را متمایز کنیم. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده با اندازه هار چپ λ باشد. گوئیم G دارای رشد چندجمله‌ای^{۳۴} است هرگاه برای هر همسایگی فشرده V حول عضو همانی، عدد طبیعی d موجود باشد به طوری که

$$(۱.۴) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(V^n)}{n^d} < \infty.$$

گروه‌های موضعا فشرده آبلی و یا پوچ‌توان بنابر [۱۶، ۱۸.۶] دارای رشد چندجمله‌ای‌اند. همچنین هر گروه موضعا فشرده که دارای رشد چندجمله‌ای باشد، بر طبق [۱۶، گزاره‌های ۶.۶ و ۹.۶] تک‌پیمانه‌ای است. به علاوه، در [۱۷، گزاره ۲۸.۱۶] برای گروه‌های موضعا

^{۳۳}first category ^{۳۴}polynomial growth

فشرده که دارای رشد چندجمله‌ای باشند، سبب می‌شود که برای هر همسایگی فشرده G حول عضو همانی، عدد حقیقی $\alpha > 1$ وابسته به V و دنباله اکیدا صعودی و بی کران $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ از عددهای طبیعی موجود باشند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\lambda(V^{p_n}) \leq \alpha \lambda(V^{p_{n-1}})$.

قضیه ۱.۴. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده با اندازه هار چپ λ دارای رشد چندجمله‌ای باشد. گیرید Φ_i برای $i = 1, 2, 3$ ، تابع‌های یانگ باشند به طوری که $\Phi_3(b_{\Phi_3}) > 0$ و

$$(2.4) \quad \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi_1^{-1}(x) \Phi_3^{-1}(x)}{x \Phi_3^{-1}(x)} = \infty.$$

اگر G فشرده نباشد، آنگاه مجموعه

$$E = \{(f, g) \in L^{\Phi_1}(G) \times L^{\Phi_3}(G) : |f| * |g| \in L^{\Phi_3}(G)\}$$

یک مجموعه σ -متخلخل پایینی (به‌ویژه از رسته اول) در $L^{\Phi_1}(G) \times L^{\Phi_3}(G)$ با نرم زیر است

$$\|(f, g)\| = \max\{N_{\Phi_1}(f), N_{\Phi_3}(g)\} \quad (f \in L^{\Phi_1}(G), g \in L^{\Phi_3}(G)).$$

اثبات. برای رسیدن به نتیجه از دو گام زیر بهره می‌گیریم:

گام اول: فرض کنید همسایگی متقارن فشرده U حول عضو همانی موجود باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(U^n) = \infty$. برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ ، تعریف می‌کنیم

$$E_n = \{(f, g) \in L^{\Phi_1}(G) \times L^{\Phi_3}(G) : N_{\Phi_3}(|f| * |g|) \leq n\}.$$

از این‌رو $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. حال کافی است نشان دهیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، مجموعه E_n به ازای $\delta > 0$ مناسب یک مجموعه δ -متخلخل پایینی است.

قرار دهید $c = 1/5$ ؛ بنابراین $c = 1 - c$. پس برای هر $0 < \alpha < c$ ، $0 < 1 - \alpha < c$. با استفاده از پیوستگی نگاشت $x \mapsto (4\alpha/x)$ روی بازه $(0, 1)$ ، عددهای $0 < \beta < 1 - \alpha$ و $0 < d < 1$ وجود دارند به طوری که $4\alpha < \beta(1 - d)$. در ادامه عدد طبیعی n را ثابت نگه داشته و عدد حقیقی مثبت و دلخواه R را انتخاب می‌کنیم. عضو $(f, g) \in E_n$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که G دارای رشد چندجمله‌ای است، پس برای همسایگی فشرده U^n حول عضو همانی، عدد حقیقی $\alpha_n > 1$ و دنباله اکیدا صعودی و بی کران $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ از عددهای طبیعی وجود دارند به طوری که برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $\lambda(U^{p_i}) \leq \alpha_n \lambda(U^{p_{i-1}})$. حال طبق فرض (۲.۴) و اینکه $\lambda(U^{p_i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$ ، عدد طبیعی j به اندازه کافی بزرگ، وجود دارد به طوری که $\lambda(U^{np_j}) \Phi_3(b_{\Phi_3}) \geq 1$ و

$$(3.4) \quad (\beta R d)^{\gamma} \alpha_n \lambda(U^{np_j}) \Phi_1^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_n \lambda(U^{np_j})} \right) \Phi_3^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_n \lambda(U^{np_j})} \right) > \gamma n \alpha_n^{\gamma} \Phi_3^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_n \lambda(U^{np_j})} \right).$$

تابع‌های $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{f}(y) := \begin{cases} f(y) & y \notin U^{np_j} \\ f(y) + \beta R \Phi_{\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{np_j})} \right) & \operatorname{Re}(f(x)) \geq 0, y \in U^{np_j} \\ f(y) - \beta R \Phi_{\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{np_j})} \right) & \operatorname{Re}(f(x)) < 0, y \in U^{np_j}, \end{cases}$$

$$\tilde{g}(y) := \begin{cases} g(y) & y \notin U^{\vee np_j} \\ g(y) + \beta R \Phi_{\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{\vee np_j})} \right) & \operatorname{Re}(g(x)) \geq 0, y \in U^{\vee np_j} \\ g(y) - \beta R \Phi_{\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{\vee np_j})} \right) & \operatorname{Re}(g(x)) < 0, y \in U^{\vee np_j}. \end{cases}$$

از این‌رو

$$N_{\Phi_{\lambda}}(\tilde{f} - f) = N_{\Phi_{\lambda}}(\tilde{g} - g) = \beta R < R - \alpha R.$$

حال کافی است نشان دهیم برای هر $0 < \delta \leq \frac{\alpha}{\alpha_n}$ داریم $B((\tilde{f}, \tilde{g}), \delta R) \subseteq B((f, g), \alpha R) \setminus E_n$. بدین منظور، بگیریید $(h, k) \in B((\tilde{f}, \tilde{g}), \delta R)$. تعریف می‌کنیم

$$\mathfrak{A}_{\lambda} := \left\{ x \in U^{np_j} : |h(x)| < \beta R d \Phi_{\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{np_j})} \right) \right\},$$

$$\mathfrak{F}_{\lambda} := \left\{ x \in U^{\vee np_j} : |k(x)| < \beta R d \Phi_{\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{\vee np_j})} \right) \right\}.$$

از آنجایی که برای هر $y \in U^{np_j}$ $|\tilde{f}(y)| \geq \beta R \Phi_{\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{np_j})} \right)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta R > N_{\Phi_{\lambda}}(h - \tilde{f}) &\geq N_{\Phi_{\lambda}}((h - \tilde{f})\chi_{\mathfrak{A}_{\lambda}}) \\ &\geq \beta R(1 - d)N_{\Phi_{\lambda}}\left(\Phi_{\lambda}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda(U^{np_j})}\right)\chi_{\mathfrak{A}_{\lambda}}\right) \\ &= \frac{\beta R(1 - d)}{\Phi_{\lambda}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda(\mathfrak{A}_{\lambda})}\right)}\Phi_{\lambda}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda(U^{np_j})}\right) \\ &\geq \beta R(1 - d)\frac{\lambda(\mathfrak{A}_{\lambda})}{\lambda(U^{np_j})} \end{aligned}$$

بنابراین $\lambda(\mathfrak{A}_{\lambda}) \leq \frac{\lambda(U^{np_j})}{4}$. توجه داشته باشید که از صعودی بودن تابع $x \mapsto \frac{x}{\Phi_{\lambda}^{-1}(x)}$ برای هر $x \in G$ ، در خط پایانی نامساوی بالا استفاده شده است. به همین ترتیب

$$\delta R > N_{\Phi_{\lambda}}(k - \tilde{g}) \geq N_{\Phi_{\lambda}}((k - \tilde{g})\chi_{\mathfrak{F}_{\lambda}}) = \beta R(1 - d)\frac{\lambda(\mathfrak{F}_{\lambda})}{\lambda(U^{\vee np_j})}.$$

از این‌رو داریم

$$\lambda(\mathfrak{F}_1) \leq \frac{\delta \lambda(U^{\mathfrak{F}_{np_j}})}{\mathfrak{F}_\alpha} \leq \frac{\delta \alpha_n \lambda(U^{np_j})}{\mathfrak{F}_\alpha} \leq \frac{\lambda(U^{np_j})}{\mathfrak{F}}.$$

نامساوی های بالا نشان می دهند که مجموعه های $\mathfrak{A}_2 = U^{np_j} \setminus \mathfrak{A}_1$ و $\mathfrak{F}_2 = U^{\mathfrak{F}_{np_j}} \setminus \mathfrak{F}_1$ از اندازه مثبت و در نتیجه ناتهی اند. حال عضو دلخواه $z \in U^{np_j}$ را انتخاب می کنیم. مجموعه های $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_2^{-1} z) \cap \mathfrak{F}_2$ و $\mathcal{C} = z\mathcal{A}^{-1}$ را در نظر می گیریم. بنابراین $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{A}_2$ و $\mathcal{C}^{-1} z \subseteq \mathfrak{F}_2$ به علاوه، با توجه به اینکه G یک گروه تک پیمانه ای است، داریم

$$\begin{aligned} \lambda(\mathcal{C}) &= \lambda(z\mathcal{A}^{-1}) = \lambda(\mathfrak{A}_2) - \lambda(\mathfrak{A}_2 \setminus (z\mathfrak{F}_2^{-1})) = \lambda(\mathfrak{A}_2) - \lambda(z\mathfrak{A}_2 \setminus \mathfrak{F}_2^{-1}) \\ &\geq \lambda(\mathfrak{A}_2) - \lambda(\mathfrak{F}_1) = \lambda(U^{np_j}) - \lambda(\mathfrak{A}_1) - \lambda(\mathfrak{F}_1) \geq \frac{\lambda(U^{np_j})}{\mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

با جمع بندی رابطه های بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} |h(y)| |k(y^{-1}z)| d\lambda(y) &\geq (\beta R d)^{\mathfrak{F}} \int_{\mathcal{C}} \Phi_1^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{np_j})} \right) \Phi_2^{-1} \left(\frac{1}{\lambda(U^{\mathfrak{F}_{np_j}})} \right) d\lambda(y) \\ &\geq (\beta R d)^{\mathfrak{F}} \frac{\lambda(U^{np_j})}{\mathfrak{F}} \Phi_1^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_n \lambda(U^{np_j})} \right) \Phi_2^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_n \lambda(U^{np_j})} \right) \\ &> n \alpha_n \Phi_2^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_n \lambda(U^{np_j})} \right), \end{aligned}$$

که از آنجا به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int_G \Phi_2 \left(\frac{|h| * |k|(z)}{n} \right) d\lambda(z) &\geq \int_{U^{np_j}} \Phi_2 \left(\int_{\mathcal{C}} \frac{|h(y)| |k(y^{-1}z)|}{n} d\lambda(y) \right) d\lambda(z) \\ &\geq \alpha_n \int_{U^{np_j}} \Phi_2 \left(\int_{\mathcal{C}} \frac{|h(y)| |k(y^{-1}z)|}{n \alpha_n} d\lambda(y) \right) d\lambda(z) \\ &> \alpha_n \int_{U^{np_j}} \Phi_2 \left(\Phi_2^{-1} \left(\frac{1}{\alpha_n \lambda(U^{np_j})} \right) \right) d\lambda(z) \\ &= 1. \end{aligned}$$

این بدین معنی است که $(h, k) \notin E_n$ و $N_{\Phi_2}(|h| * |k|) > n$.

گام دوم: هرگاه برای هر همسایگی فشرده U حول عضو همانی، $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(U^n) < \infty$ ، آنگاه دنباله صعودی $\{\lambda(U^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ از بالا کراندار و از این رو برای n های طبیعی به حد کافی بزرگ $\lambda(U^{\mathfrak{F}_2}) < \mathfrak{F} \lambda(U^n)$ از آنجایی که G دارای رشد چند جمله ای است، پس عدد $\alpha > 1$ متناظر با هر همسایگی فشرده U حول عضو همانی، می تواند یکسان انتخاب گردد. بنابراین یک همسایگی فشرده U به اندازه کافی بزرگ انتخاب می کنیم به طوری که

$$(4.4) \quad (\beta R d)^{\mathfrak{F}} \lambda(U) \Phi_1^{-1} \left(\frac{1}{\mathfrak{F} \lambda(U)} \right) \Phi_2^{-1} \left(\frac{1}{\mathfrak{F} \lambda(U)} \right) > \mathfrak{F} n \Phi_2^{-1} \left(\frac{1}{\mathfrak{F} \lambda(U)} \right).$$

حال اگر همانند گام اول پیش رویم مجموعه E یک مجموعه σ - $\frac{1}{\delta}$ -متخلخل پایینی خواهد شد. و این اثبات را به انجام می رساند. $\square$

تبصره ۲.۴. بر اساس در [۲، قضیه ۴.۲]، قضیه ۱.۴ با شرط $\Phi_2(b_{\Phi_2}) = 0$ برای تمام گروه های غیر فشرده برقرار است.

نتیجه زیر از قضیه بالا حاصل می شود.

نتیجه ۳.۴. گیرید G یک گروه موضعا فشرده با اندازه هار چپ λ و دارای رشد چندجمله‌ای باشد. همچنین فرض کنید Φ_i برای $i = 1, 2$ ، تابع‌های یانگ باشند. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi_1(x)}{x} = 0$ آنگاه $L^{\Phi_1}(G) * L^{\Phi_2}(G) \subseteq L^{\Phi_2}(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد. به ویژه، اگر $\Phi_1 = \Phi_2$ آنگاه $L^{\Phi_1}(G)$ یک جبر باناخ است اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

اثبات. اگر G فشرده باشد، آنگاه برای هر تابع یانگ دلخواه Φ ، نگاشت همانی $L^\Phi(G) \mapsto L^1(G)$ پیوسته است. برای این منظور بر اساس نامساوی یانگ با زوج مکمل (Φ, Ψ) ، برای هر $f \in L^\Phi(G)$ داریم

$$(5.4) \quad \int_G |f(x)| d\lambda(x) \leq \int_G \Phi(|f(x)|) d\lambda(x) + \int_G \Psi(1) d\lambda(x) < \infty.$$

بنابراین $f \in L^1(G)$ حال طبق نامساوی (۵.۴)، برای هر $k > 0$ با $\frac{1}{k} - \Psi(1/k)\lambda(G) > 0$ داریم

$$\int_G \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k\|f\|_1}\right) d\lambda(x) \geq \int_G \frac{|f(x)|}{k\|f\|_1} d\lambda(x) - \int_G \Psi(1/k) d\lambda(x) = \frac{1}{k} - \Psi(1/k)\lambda(G) > 0,$$

و این یعنی $N_\Phi(f) < k\|f\|_1$. پس نگاشت I_Φ پیوسته است. حال برای هر $f \in L^{\Phi_1}(G)$ و $g \in L^{\Phi_2}(G)$ ، طبق نامساوی یسنس^{۳۵}، گزاره ۵.۳.۳ در [۱۹] داریم

$$\int_G \Phi_2\left(\frac{|f * g|(x)}{\|f\|_1 N_{\Phi_2}(g)}\right) d\lambda(x) \leq \int_G \frac{|f(y)|}{\|f\|_1} d\lambda(y) \int_G \Phi_2\left(\frac{|g(y^{-1}x)|}{N_{\Phi_2}(g)}\right) d\lambda(x) \leq 1.$$

□

از این رو $N_{\Phi_2}(f * g) \leq \|I\|_{\Phi_1} N_{\Phi_1}(f) N_{\Phi_2}(g)$

نتیجه پایانی زیر به سوال مطرح شده در [۲۱] برای گروه‌های موضعا فشرده‌ای که دارای رشد چندجمله‌ای اند پاسخ مثبت می‌دهد.

نتیجه ۴.۴. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده با اندازه هار چپ λ دارای رشد چندجمله‌ای باشد. همچنین گیرید $p, q, r \in [1, \infty]$ ، با شرط $1 < 1/p + 1/q < 1 + 1/r$ آنگاه $L^p(G) * L^q(G) \subseteq L^r(G)$ اگر و تنها اگر G فشرده باشد.

اثبات. بر طبق قضیه ۱.۴، فشرده‌گی G به دست می‌آید.

□

برعکس، اگر G فشرده باشد، آنگاه $L^s(G) \subset L^r(G)$ که در آن $1/p + 1/q = 1 + 1/s$.

مراجع

- [1] I. Akbarbaglu and S. Maghsoudi, An answer to a question on the convolution of functions, *Arch. Math. (Basel)*, **98** (6) (2012) 545–553.
- [2] I. Akbarbaglu and S. Maghsoudi, On certain porous sets in the Orlicz space of a locally compact group, *Colloq. Math.*, **129** (1) (2012) 99–111.
- [3] I. Akbarbaglu and S. Maghsoudi, Porosity and products of Orlicz spaces, *Positivity*, **17**(4) (2013) 1009–1020.
- [4] I. Akbarbaglu and S. Maghsoudi, Banach–Orlicz algebras on a locally compact group, *Mediterr. J. Math.*, **10**(4) (2013) 1937–1947.
- [5] R. Arens, M. Goldberg and W. A. J. Luxemburg, Multiplicativity factors for Orlicz space function norms, *J. Math. Anal. Appl.*, **177** (2) (1993) 386–411.
- [6] M. Balcerzak and A. Wachowicz, Some examples of meager sets in Banach spaces, *Real Anal. Exchange*, **26**(2) (2000/01) 877–884.
- [7] S. Głab and F. Strobil, Dichotomies for L^p spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **368** (1) (2010) 382–390.
- [8] S. Głab and F. Strobil, Porosity and the L^p -conjecture, *Arch. Math. (Basel)*, **95** (6) (2010) 583–592.

³⁵Jensen's inequality

- [9] H. Hudzik, Orlicz spaces of essentially bounded functions and Banach–Orlicz algebras, *Arch. Math. (Basel)*, **44** (6) (1985) 535–538.
- [10] H. Hudzik, A. Kamińska and J. Musielak, On some Banach algebras given by a modular, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, Alfred Haar Memorial Conference, Budapest, **49** (1985) 445–463.
- [11] J. Jachymski, A nonlinear Banach–Steinhaus theorem and some meager sets in Banach spaces, *Studia Math.*, **170** (3) (2005) 303–320.
- [12] A. Kamińska and J. Musielak, On convolution operator in Orlicz spaces, *Rev. Mat. Complut.*, **2** (1989) 157–178.
- [13] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Netherlands, 1961.
- [14] R. O'Neil, Fractional integration in Orlicz spaces, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965) 300–328.
- [15] S. Öztö and S. M. Tabatabaie, Weighted Orlicz algebras on hypergroups, *Filomat*, **34** (2020) 2991–3002.
- [16] A. L. T. Paterson, *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs, **29**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [17] J. P. Pier, *Amenable Locally Compact Group*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
- [18] M. Rajagopalan, L_p -conjecture for locally compact groups, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **125** (1966) 216–222.
- [19] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1991.
- [20] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Applications of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 2002.
- [21] S. Saeki, The L^p -conjecture and Young's inequality, *Illinois J. Math.*, **34** (1990) 614–627.
- [22] B. Subramanian, On the inclusion $L_p(\mu) \subseteq L_q(\mu)$, *Amer. Math. Monthly*, **85** (6) (1978) 479–481.
- [23] S. M. Tabatabaie and A. Bagheri Salec, Convolution of two weighted Orlicz spaces on hypergroups, *Rev. Colombiana Mat.*, **54** (2020) 117–128.
- [24] S. M. Tabatabaie, A. Bagheri Salec and M. Zare Sanjari, A note on Orlicz algebras, *Oper. Matrices*, **14** (2020) 139–144.
- [25] L. Zajíček, On σ -porous sets in abstract spaces, *Abstr. Appl. Anal.*, **5** (2005) 509–534.
- [26] W. Żelazko, On the algebras L_p of locally compact groups, *Colloq. Math.*, **8** (1961) 115–120.

[۲۷] س. مقصودی، سی سال حدس L^p و مسائل وابسته به آن، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۵۴** (۱۳۹۳) ۳۱–۶۰.

[۲۸] س. مقصودی، پدیده‌های حیرت‌آور در آنالیز ریاضی و سنجش بزرگی مجموعه‌ها، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۶۰** (۱۳۹۶) ۳۵–۶۶.

[۲۹] س. مقصودی، مجموعه‌های متخلخل و پدیده‌های ابرعام در آنالیز ریاضی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، **۶۲** (۱۳۹۷) ۵۹–۸۰.

[۳۰] س. مقصودی، چشم‌اندازهای تاریخی از آنالیز هارمونیک، گزارش طرح پژوهشی شماره ۹۸۰۱، دانشگاه زنجان، ۱۴۰۰.

ابراهیم اکبربگلو

گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

i.akbarbaglu@cfu.ac.ir ibrahim.akbarbaglu@gmail.com

نویسنده متولد شهریور ماه ۱۳۶۰ در شهر خوی از استان آذربایجان غربی است. وی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه تربیت معلم تبریز و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه تربیت مدرس تهران شد.



Convolution of functions and Orlicz spaces

Ibrahim Akbarbaglu

Abstract: In this paper we first give some preliminaries of Orlicz spaces. Then, using a topological criterion, we determine the size of subsets in Orlicz spaces on a locally compact group with polynomial growth for which the convolution product is well defined or include in a specific set.

Keywords: Orlicz space, convolution, locally compact group, polynomial growth, porosity.

Ibrahim Akbarbaglu

Department of Mathematics, Farhangian University, Tehran, Iran.

Email: ibrahim.akbarbaglu@gmail.com

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Research Paper.

Received: 07/10/2021, Accepted: 05/12/2021.