

عملگرهای استلزام

سید محمود طاهری

چکیده. در این مقاله، سه رده اساسی از عملگرهای استلزام بررسی می‌شوند. این سه رده عبارت‌اند از استلزام‌های مبتنی بر S -نرم، استلزام‌های مبتنی بر توابع مانده T -نرم و Q -استلزام‌ها. مبنای منطقی این سه رده از عملگرها را شرح خواهیم داد. سپس به ویژگی‌هایی می‌پردازیم که عملگرهای استلزام به لحاظ ریاضی-شهودی باید (یا بهتر است) داشته باشند. در آخر، ملاک‌هایی را که در انتخاب عملگر مناسب در مسائل عملی اهمیت دارند بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

استلزام^۱ از مهم‌ترین مفاهیم در انواع منطق‌ها است. با گسترش منطق فازی،^۲ استدلال تقریبی^۳ و سیستم‌های خبره در دهه‌های گذشته، اهمیت این عملگر در مباحث نظری و کاربردی بیشتر شناخته شده است. در منطق کلاسیک، تعریف رایج رابطه استلزام یعنی $p \rightarrow q$ ، به صورت $(p \vee q) \wedge (\sim p)$ (یا هم‌ارز آن $(p \wedge \sim q) \sim$) است؛ [۲] و [۹]. در تعمیم رابطه استلزام به منطق فازی باید توجه داشت که ارزش‌های درستی در گزاره شرطی $p \rightarrow q$ تنها دو مقدار صفر و یک نیستند، بلکه مقادیر بازه $[0, 1]$ هستند. کلی‌ترین تعریف رابطه استلزام، که ازین پس بنابر متون مرتبط، عملگر استلزام خواهیم نامید، چنین است؛ [۱۸] و [۲۲].

تعریف ۱.۱. یک عملگر استلزام فازی^۴ (یا به اختصار، عملگر استلزام) تابعی است دومتغیره به صورت

$$(۱) \quad I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

که به هر جفت مقدار a و b (به ترتیب، درجه درستی گزاره‌های p و q) درجه درستی گزاره «اگر p ، آن‌گاه q » را نسبت دهد و

$$I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1 - I(1, 0) = 1$$

البته در برخی متون، مانند [۱۳]، عملگر استلزام با شرایط بالا همراه با دو شرط کاهشی (نزولی) بودن برحسب مؤلفه اول و افزایشی (صعودی) بودن برحسب مؤلفه دوم تعریف شده است. روشن است که در حالت خاص منطق کلاسیک دوارزشی که a و b تنها دو مقدار صفر و یک را می‌گیرند، تعریف بالا بر تعریف رایج استلزام منطبق می‌شود.

عبارات و کلمات کلیدی: نرم مثلثی، استلزام فازی، قاعده شرطی، منطق کلاسیک، منطق فازی.
دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی

نوع مقاله: ترویجی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۲۲

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130252.1462>

¹ implication ² fuzzy logic ³ approximate reasoning ⁴ fuzzy implication operator

یادآور می‌شویم که در منطق دو ارزشی، از چهار حالت ممکن، گزاره $p \rightarrow q$ در حالت $a = ۱$ و $b = ۰$ نادرست، و در سه حالت دیگر درست است.

سه ساختار اساسی در تعریف استلزام فازی وجود دارد که مبتنی بر سه روش بیان استلزام در حالت کلاسیک هستند:

(۱) استلزام‌های مبتنی بر S -نرم؛

(۲) استلزام‌های مبتنی بر توابع مانده‌ای T -نرم‌ها (R -استلزام‌ها)؛

(۳) Q -استلزام‌ها.

در این مقاله، پس از بیان مفاهیم مقدماتی در بخش ۲، این سه رده عملگرهای استلزام را در بخش‌های ۳، ۴، ۵ بررسی می‌کنیم. سپس، در بخش ۶، توضیح می‌دهیم که از دید منطقی-ریاضی عملگر استلزام باید (یا بهتر است) چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟ و آیا عملگرهای سه رده بالا، کدام‌یک از ویژگی‌ها را دارند؟ در بخش ۷ به این می‌پردازیم که در مسائل کاربردی چه ملاک‌هایی در انتخاب عملگر استلزام اهمیت دارند؟ در بخش ۸ نکته‌هایی تکمیلی بیان می‌کنیم.

۲. چند تعریف مقدماتی

در تعریف و صورت‌بندی عملگرهای استلزام از سه مفهوم کلیدی استفاده می‌شود: عملگر نفی، عملگر عطف («و» منطقی، هم‌ارز اشتراک برای مجموعه‌ها) و عملگر فصل («یا» منطقی، هم‌ارز اجتماع برای مجموعه‌ها). چون مدت‌هاست انواع عملگرهای عطف و فصل در چارچوب توابع T -نرم و S -نرم بررسی می‌شوند، پیش از ورود به مبحث عملگرهای استلزام، تعریف رایج عملگر نفی و تعریف توابع T -نرم و S -نرم را یادآوری می‌کنیم.^۵

تعریف ۱.۲. تابع $N : [۰, ۱] \rightarrow [۰, ۱]$ یک تابع نفی^۶ نامیده می‌شود، اگر نزولی باشد و

$$N(۰) = ۱, \quad N(۱) = ۰$$

مثال ۲.۲. سه تابع (عملگر) نفی که بیشتر رایج هستند عبارت‌اند از:

$$(۱) \quad N(x) = ۱ - x \quad (\text{عملگر نفی استاندارد});$$

$$(۲) \quad N(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}, \lambda \in (-1, \infty) \quad (\text{عملگر نفی سوگنو}^{۷});$$

$$(۳) \quad N(x) = [1 - x^\omega]^\frac{1}{\omega}, \omega \in (0, \infty) \quad (\text{عملگر نفی یاگر}^{۸}).$$

تعریف ۳.۲. تابع دومتغیره $[۰, ۱] \times [۰, ۱] \rightarrow [۰, ۱]$ را یک T -نرم^۹ (نرم مثلثی)^{۱۰} گوئیم، اگر

$$(۱) \quad T(x, ۱) = x$$

$$(۲) \quad \text{یکنوایی} \quad x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$$

$$(۳) \quad \text{جاب‌جایی} \quad T(x, y) = T(y, x)$$

$$(۴) \quad \text{شرکت‌پذیری} \quad T[x, T(y, z)] = T[T(x, y), z]$$

^۵ در متون مختلف، از واژه‌های عملگر، رابطه و تابع در تعریف استلزام و همچنین در تعریف نفی، عطف و فصل استفاده می‌شود. مانند عملگر استلزام، رابطه استلزام و تابع استلزام.

^۶negation function ^۷Sugeno negation ^۸Yager negation ^۹T-norm ^{۱۰}triangular norm

تعریف ۴.۲. تابع دومتغیره $S(x, y) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را یک T -هم نرم (یا S -نرم)^{۱۱} گوئیم، اگر

$$S(x, 0) = x \quad (۱)$$

$$x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2 \Rightarrow S(x_1, y_1) \leq S(x_2, y_2) \quad (۲) \text{ یکنوایی}$$

$$S(x, y) = S(y, x) \quad (۳) \text{ جابه جایی}$$

$$S[x, S(y, z)] = S[S(x, y), z] \quad (۴) \text{ شرکت پذیری}$$

عملگرهای T -نرم و S -نرم رابطه جالبی با هم دارند، به این معنی که به ازای هر T -نرم، یک S -نرم وجود دارد به قسمی که

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y)$$

بنابراین، هر T -نرم، یک S -نرم دوگان دارد. چهار جفت T -نرم و S -نرم دوگان، که متداول ترین این عملگرها هستند، عبارت اند از:

(۱) عملگرهای استاندارد:

$$T_m(x, y) = \min(x, y), \quad S_m(x, y) = \max(x, y)$$

(۲) ضرب جبری^{۱۲} و جمع احتمالی^{۱۳}:

$$T_p(x, y) = x.y, \quad S_p(x, y) = x + y - x.y$$

(۳) تفاضل کراندار^{۱۴} و جمع کراندار^{۱۵}:

$$T_b(x, y) = \max(0, x + y - 1), \quad S_b(x, y) = \min(1, x + y)$$

(۴) عملگرهای دراستیک^{۱۶} (در برخی جاها، عملگرهای قوی):

$$T_d(x, y) = \begin{cases} x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ 0 & x, y \neq 1 \end{cases} \quad S_d(x, y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ y & x = 0 \\ 1 & x, y \neq 0 \end{cases}$$

انواع دیگری از عملگرهای T -نرم و S -نرم معرفی شده اند که افزون بر کاربرد در منطق فازی و استدلال تقریبی، در الحاق مجموعه های فازی (به ترتیب برای عمل های اشتراک و اجتماع) کاربرد دارند. همچنین رده های پارامتری از این عملگرها معرفی و بررسی شده اند. ما، با توجه به نیاز این مقاله، به همین مقدار درباره این عملگرها بسنده می کنیم. به منظور بررسی بیشتر این عملگرها به [۳] و [۵] و با هدف بررسی های جامع به [۱۷] مراجعه کنید.

۳. استلزام های مبتنی بر S -نرم

این بخش و دو بخش آینده به بررسی سه رده اساسی عملگرهای استلزام اختصاص دارد. نخستین رده ای که بررسی می کنیم رده ای است که برپایه رابطه ای آشنا در منطق دوازدهی کلاسیک بنا نهاده شده است. اگر رابطه

$$p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q \quad (۲)$$

را که تعریف مرسوم در ارزش دهی به گزاره شرطی $p \rightarrow q$ در منطق کلاسیک است مبنا قرار دهیم، تعریف زیر برای تابع (۱) حاصل می شود

$$I(a, b) = S(N(a), b) \quad (۳)$$

¹¹T-conorm (S-norm) ¹²algebraic product ¹³probabilistic sum ¹⁴bounded difference ¹⁵bounded sum ¹⁶drastic operators

که در آن S یک S -نرم (در مقام عملگری برای فصل، و هم‌ارز عملگر اجتماع فازی) است و N یک عملگر نفی است. در متون رایج، معمولاً از عملگر نفی استاندارد یعنی $N(a) = 1 - a$ استفاده می‌شود. چند استلزام رایج مبتنی بر S -نرم (به‌اختصار، S -استلزام^{۱۷})، همگی بر اساس نفی استاندارد، عبارت‌اند از (شکل ۱)

(۱) استلزام لوکاشویچ^{۱۸} (مبتنی بر عملگر جمع کراندار یعنی $S(a, b) = \min(1, a + b)$)

$$I_L(a, b) = \min(1, 1 - a + b)$$

(۲) استلزام کِلنه-دینز^{۱۹} (مبتنی بر عملگر استاندارد اجتماع یعنی $S(a, b) = \max(a, b)$)

$$I_{KD}(a, b) = \max(1 - a, b)$$

(۳) استلزام رایسنباخ^{۲۰} (مبتنی بر عملگر جمع احتمالی یعنی $S(a, b) = a + b - ab$)

$$I_R(a, b) = 1 - a + ab$$

همچنین اگر در رابطه (۳)، از S -نرم دراستیک استفاده کنیم، عملگر استلزام زیر به‌دست می‌آید که، به تعبیری، بزرگ‌ترین عملگر استلزام مبتنی بر S -نرم است.

$$I_{LS}(a, b) = \begin{cases} b & a = 1 \\ 1 - a & b = 0 \\ 1 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

روابط زیر بین چهار S -استلزام رایج برقرار است

$$I_{KD} \leq I_R \leq I_L \leq I_{LS}$$

۴. استلزام‌های مبتنی بر توابع مانده‌ای T -نرم‌ها (R -استلزام‌ها)

پیش از بیان این نوع استلزام‌ها نیاز است که بحثی نظری دربارهٔ توابع موسوم به توابع مانده‌ای^{۲۱} مطرح کنیم. نخست یادآور می‌شویم که در منطق دوازده‌گانه، استلزام $q \rightarrow p$ درست است اگر و تنها اگر ارزش درستی p (مقدار a) کمتر یا برابر با ارزش درستی q (مقدار b) باشد. تعمیم این ویژگی به استلزام فازی نتیجه می‌دهد که تابع $I(a, b)$ در رابطه (۱) باید برحسب a غیرصعودی و نسبت به b غیرنزولی باشد. از سوی دیگر با توجه به قاعدهٔ وضع مقدم (یعنی قاعدهٔ $q \rightarrow (p \wedge (p \rightarrow q))$) می‌توانیم بر اساس کران پایین a و کران پایین I ، کران پایینی برای b مشخص کنیم. چون q نتیجهٔ عطف p و $p \rightarrow q$ است، تابع مناسب برای کران پایین b ، یک T -نرم است و بنابراین اگر $x \leq a$ و $y \leq I$ آن‌گاه $T(x, y) \leq b$ و به‌ویژه اگر $a = x$ و $y = z$ آن‌گاه $T(a, z) \leq b$. از سوی دیگر I را تا بشود بزرگ تعریف می‌کنیم که شرط $y \leq I$ حفظ شود. لذا هرگاه $T(a, z) \leq I$ آن‌گاه z یک مقدار ممکن برای I خواهد بود. به این معنی که استنتاج $T(x, y) \leq b$ از $x \leq a$ و $y \leq I$ معتبر باشد. در این صورت شرط برعکس را نیز داریم یعنی

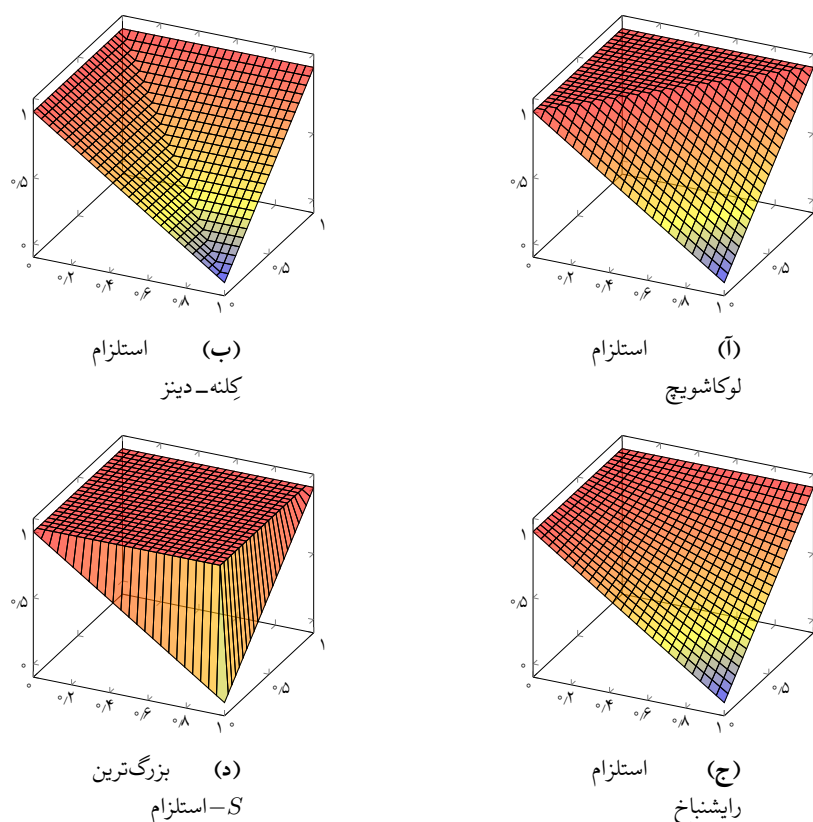
$$\text{اگر } T(a, z) \leq b \text{ آن‌گاه } z \leq I$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$T(a, z) \leq b \text{ اگر و تنها اگر } z \leq I$$

و لذا می‌توان گفت که I حداکثر مقدار z است که $T(a, z) \leq b$.

¹⁷S-implication ¹⁸Lukasiewicz ¹⁹Kleene-Dienes ²⁰Reichenbach ²¹residuated functions



شکل ۱. چهار استلزام رایج مبتنی بر S -نرم

گزاره زیر که اثبات و توضیحاتی درباره آن را می‌توان در [۱] یافت، تضمین می‌کند که برای هر T -نرم پیوسته، یک تابع با ویژگی بالا وجود دارد.

قضیه ۱.۴. به ازای هر T -نرم پیوسته، یک و تنها یک عملگر دوتایی $I(a, b)$ وجود دارد که به ازای هر $a, b, z \in [0, 1]$

$$T(a, z) \leq b \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad z \leq I(a, b)$$

یعنی

$$(۴) \quad I[a, b] = \sup\{z \in [0, 1] ; T(a, z) \leq b\}$$

تعریف ۲.۴. تابع $I(a, b)$ در قضیه بالا، تابع مانده‌ای T -نرم مربوط نامیده می‌شود.

بر پایه بحث بالا، به ازای هر T -نرم پیوسته، یک تابع استلزام بر اساس رابطه (۴) به دست می‌آید. چنین استلزام‌هایی، R -استلزام^{۲۲} (استلزام‌های مبتنی بر توابع مانده‌ای T -نرم) نام دارند. کاربردی از توابع مانده‌ای و R -استلزام‌ها را در یادگیری ماشین در [۱۲] ملاحظه کنید. چهار نوع R -استلزام رایج عبارت‌اند از (شکل ۲)

²²R-implication (residual implication)

(۱) استلزام گودل^{۲۳} (مبتنی بر T -نرم استاندارد، یعنی $(T(a, b) = \min(a, b))$)

$$I_{G\ddot{o}}(a, b) = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$$

(۲) استلزام گوگن^{۲۴} (مبتنی بر T -نرم حاصل ضرب، یعنی $(T(a, b) = ab)$)

$$I_{Go} = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ \frac{b}{a} & a > b \end{cases}$$

(۳) استلزام لوکاشویچ (مبتنی بر T -نرم تفاضل کراندار، یعنی $(T(a, b) = \max(0, a + b - 1))$)

$$I_L(a, b) = \min(1, 1 - a + b)$$

توجه دارید که استلزام لوکاشویچ به هر دو رده S -استلزامها و R -استلزامها تعلق دارد.

(۴) بزرگترین R -استلزام

$$I_{LR}(a, b) = \begin{cases} 1 & a < b \\ b & a = 1 \end{cases}$$

این استلزام، حد همه R -استلزامها می باشد، و در واقع کوچکترین کران بالای رده R -استلزامها است. از این رو، گاه

این استلزام را در رده R -استلزامها منظور می کنند هرچند بر اساس رابطه (۴) به دست نمی آید.

به آسانی می توان بررسی کرد که روابط زیر بین چهار R -استلزام که در بالا اشاره شد، برقرار است

$$I_{G\ddot{o}} \leq I_{Go} \leq I_L \leq I_{LR}$$

۵. استلزامها Q

رده سوم از عملگرهای استلزام بر این پایه است که در منطق دوارزشی کلاسیک، رابطه شرطی $p \rightarrow q$ معادل است با

$$(\sim p) \vee (p \wedge q) \text{ یعنی}$$

$$p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee (p \wedge q) \quad (5)$$

با مبنا قرار دادن این رابطه، ساختار زیر برای عملگرهای استلزام فازی به دست می آید.

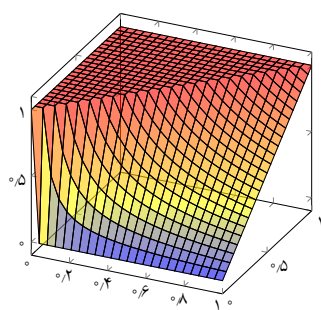
$$I(a, b) = S[N(a), T(a, b)]$$

چون این استلزامها نخستین بار در منطق کوانتوم به کار گرفته شد، استلزامهای منطق کوانتوم، یا به کوتاهی Q -استلزامها^{۲۵}، نامیده می شوند. چهار Q -استلزام رایج، همگی مبتنی بر نفی استاندارد، عبارتند از (شکل ۳)

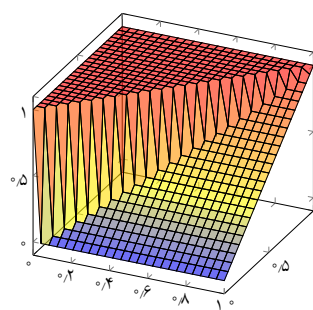
(۱) استلزام زاده^{۲۶} (مبتنی بر عملگرهای $\max$ و $\min$):

$$I_Z(a, b) = \max[1 - a, \min(a, b)]$$

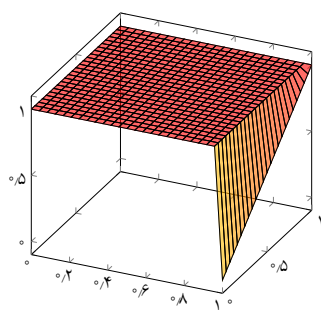
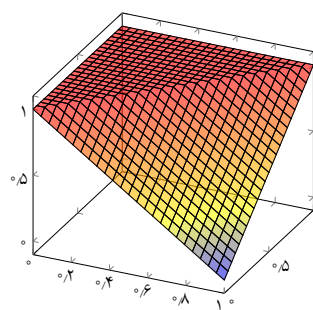
²³Godel ²⁴Goguen ²⁵Q-implications ²⁶Zadeh



(آ) استلزام گودل



(ب) استلزام گوگن

(د) بزرگ‌ترین $-R$ استلزام

(ج) استلزام لوکاشویچ

شکل ۲. چهار $-R$ استلزام رایج

(۲) استلزام کِلنه-دینز (مبتنی بر عملگرهای تفاضل کراندار و جمع کراندار):

$$I_{KD}(a, b) = \max[1 - a, b]$$

توجه دارید که استلزام کِلنه-دینز به هر دو رده S -استلزام‌ها و Q -استلزام‌ها تعلق دارد.

(۳) استلزام کلیر-یوان (نوع اول)^{۲۷} (مبتنی بر ضرب جبری و جمع احتمالی):

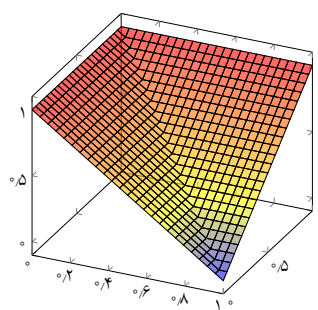
$$I_{KY1}(a, b) = 1 - a + a^2b$$

(۴) استلزام کلیر-یوان (نوع دوم)^{۲۸} (مبتنی بر T -نرم و S -نرم دراستیک):

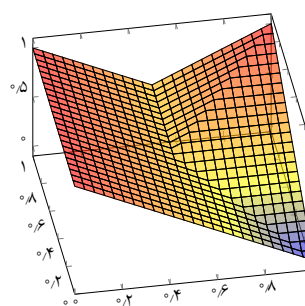
$$I_{KY2}(a, b) = \begin{cases} b & a = 1 \\ 1 - a & a \neq 1, b \neq 1 \\ 1 & a \neq 1, b = 1 \end{cases}$$

نکته ۱.۵. گفتنی است که رده چهارمی نیز از عملگرهای استلزام معرفی شده است موسوم به D -استلزام‌ها^{۲۹}. این رده از استلزام‌ها، که به نحوی مرتبط با Q -استلزام‌ها هستند، با این دیدگاه ساخته می‌شوند که در منطق دوازشی کلاسیک، رابطه شرطی $p \rightarrow q$

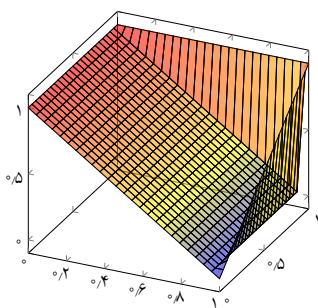
²⁷Klir-Yuan (Type I) ²⁸Klir-Yuan (Type II) ²⁹D-implications (Dishkant implications)



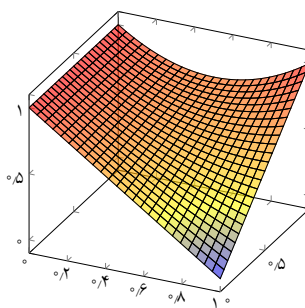
(ب) استلزام
کلنه-دینز



(آ) استلزام زاده



(د) استلزام کلیر-
یوان (نوع دوم)



(ج) استلزام
کلیر-یوان (نوع اول)

شکل ۳. چهار Q -استلزام رایج

معادل با $q \vee (p \wedge \sim q)$ است، یعنی

$$(۶) \quad p \rightarrow q \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee q$$

با مبنا قرار دادن این رابطه، ساختار زیر برای عملگرهای استلزام فازی به دست می آید (توضیحات بیشتر را در [۱۹] بباید)

$$I(a, b) = S(T(N(a), N(b), b))$$

نکته ۲.۵. به جز چهار رده عملگرهای استلزام فازی که به آنها پرداختیم، عملگرهای دیگری نیز برای استلزام معرفی شده اند که به هیچ یک از این رده ها تعلق ندارند. چهار تا از مهم ترین آنها عبارت اند از

$$(۱) \text{ عملگر لارسن}^{۳۰} \quad I_{La}(a, b) = ab \quad (\text{با تسامح، موسوم به استلزام لارسن})$$

$$(۲) \text{ عملگر ممدانی}^{۳۱} \quad I_M(a, b) = \min(a, b) \quad (\text{حالت ساده شده استلزام زاده}) \quad (\text{با تسامح، موسوم به استلزام ممدانی})$$

درباره دو عملگر لارسن و ممدانی و دلیل کاربرد رایج آنها، در بخش ۸ توضیحاتی خواهیم داد.

(۳) استلزام یاگر^{۳۲}:

$$I_Y(a, b) = \begin{cases} 1 & a = b = 0 \\ b^a & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

³⁰Larsen ³¹Mamdani ³²Yager

(۴) استلزام و^{۳۳}:

$$I_W(a, b) = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ \min(1 - a, b) & a > b \end{cases}$$

۶. ویژگی‌های عملگرهای استلزام

عملگر استلزام فازی، از لحاظ منطقی-ریاضی-کاربردی، چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد؟ یا بهتر است که چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟ به سخن دیگر، عملگر استلزام باید در چه روابط یا اصول یا شرایطی صدق کند؟ با این دید که استلزام فازی باید تعمیم مناسبی از استلزام در منطق دوازدهی باشد و با توجه به مفهوم استلزام، می‌توان ویژگی‌های زیر را ویژگی‌های مناسب برای عملگر استلزام فازی برشمرد.

$$۱) a \leq b \Rightarrow I(a, x) \geq I(b, x) \text{ (یکنوایی برحسب مؤلفه اول)}$$

این ویژگی بیان می‌کند که ارزش درستی گزاره استلزام، با کاهش ارزش مقدم، افزایش می‌یابد.

$$۲) a \leq b \Rightarrow I(x, a) \leq I(x, b) \text{ (یکنوایی برحسب مؤلفه دوم)}$$

که بیان می‌کند ارزش درستی گزاره استلزام، با افزایش درستی تالی، افزایش می‌یابد.

$$۳) I(\circ, b) = 1 \text{ (غلبه نادرستی)}$$

یعنی، از مقدم نادرست، هر چیزی را می‌توان نتیجه گرفت.

$$۴) I(1, b) = b \text{ (خنثی بودن درستی)}$$

یعنی، از مقدم درست، چیزی نتیجه نمی‌شود.

$$۵) I(a, a) = 1 \text{ (همانی)}$$

یعنی اگر مقدم و تالی، هم‌ارزش باشند، ارزش استلزام برابر یک است.

$$۶) I(a, I(b, c)) = I(b, I(a, c)) \text{ (تبادل پذیری)}$$

این ویژگی، تعمیم رابطه $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (p \rightarrow r)$ مربوط به منطق کلاسیک دوازدهی است.

$$۷) I(a, b) = 1 \Leftrightarrow a \leq b$$

یعنی استلزام فازی ارزش یک دارد اگر و تنها اگر ارزش تالی دست کم به مقدار ارزش مقدم باشد.

$$۸) I(a, b) = I(\sim b, \sim a)$$

یعنی با نفی مقدم و تالی و جابه‌جایی آنها، ارزش درستی استلزام تغییر نکند (رابطه عکس نقیض).

$$۹) \text{ پیوستگی تابع } (a, b) \text{ برحسب هر دو مؤلفه}$$

که تضمین می‌کند، تغییر اندک در ارزش مقدم یا تالی، منجر به تغییر زیاد در درستی استلزام نمی‌شود.

البته ویژگی‌های بالا، همگی مستقل از هم نیستند (برای نمونه، می‌توان ویژگی‌های ۳ و ۵ را از ویژگی ۷ نتیجه گرفت) ولی برای تمایز عملگرهای مختلف استلزام، همه ویژگی‌ها را فهرست کرده‌ایم.

نکته جالب توجه مرتبط با این ویژگی‌ها، درباره استلزام لوکاشویچ است که در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۱.۶ ([۱۸]). الف) استلزام لوکاشویچ، همراه با نفی استاندارد، در همه ویژگی‌های نه‌گانه صدق می‌کند.

ب) بر اساس نفی استاندارد، تنها استلزامی که در همه شرایط نه‌گانه صدق می‌کند، استلزام لوکاشویچ است.

در جدول ۱ ویژگی‌های رایج‌ترین استلزام‌های فازی درج شده‌اند [۱۳] و [۱۸].

³³ Wu

جدول ۱. رایج‌ترین استلزام‌های فازی و ویژگی‌های آن‌ها

تابع $I(a, b)$ بیانگر درجه درستی گزاره شرطی $p \rightarrow q$ است، هرگاه درجه‌های درستی p و q ، به ترتیب، a و b هستند.

تذکر: گرچه عملگرهای لارسن و ممدانی در تعریف ۱.۱ صدق نمی‌کنند، ولی با هدف مقایسه، این دو عملگر نیز در جدول درج شده‌اند.

نام	نماد	ویژگی‌ها	رده	تابع $I(a, b)$
زاده	I_Z	$9, 4 - 1$	Q	$\max[1 - a, \min(a, b)]$
گودل	$I_{G\ddot{o}}$	$7 - 1$	R	$\begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$
گوگن	$I_{G\ddot{o}}$	$9, 7 - 1$	R	$\begin{cases} 1 & a \leq b \\ \frac{b}{a} & a > b \end{cases}$
کلنه-دینز	I_{KD}	$9, 8, 6, 4 - 1$	S, Q	$\max(1 - a, b)$
لارسن	I_{La}	$9, 6, 4, 2$	$-$	ab
لوکاشویچ	I_L	$9 - 1$	S, R	$\min(1, 1 - a + b)$
ممدانی	I_M	$9, 6, 4, 2$	$-$	$\min(a, b)$
رایشنباخ	I_R	$9, 8, 6, 4 - 1$	S	$1 - a + ab$
یاگر	I_Y	$6, 4 - 1$	$-$	$\begin{cases} 1 & a = b = 0 \\ b^a & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$
وو	I_W	$8, 7, 5, 3 - 1$	$-$	$\begin{cases} 1 & a \leq b \\ \min(1 - a, b) & a > b \end{cases}$

۷. انتخاب عملگر استلزام

کدام یک از عملگرهای استلزام، عملگرهای مناسبی هستند؟ از دیدگاه نظری، ویژگی‌های ریاضی و منطقی، که در بخش پیشین برشمردیم، مهم‌اند. از دید کاربردی برخی ملاحظات مانند سرعت محاسباتی و تطبیق نتایج با توقعات کاربر (برای مثال، تطبیق خروجی سیستم‌های کنترل فازی با انتظارات کاربر) اهمیت دارند. به هر حال، در منطق فازی و استدلال تقریبی، انتخاب عملگر استلزام موضوعی مهم در مسائل کاربردی است و در هر زمینه باید عملگر استلزام مناسب را برگزید. در پی، چهار ملاک مهم را در انتخاب عملگر استلزام بیان می‌کنیم و شرح می‌دهیم.

۱.۷. ویژگی‌های ریاضی-منطقی. ویژگی‌های نه‌گانه که در بخش قبل مطرح شد، ملاک‌هایی ریاضی-منطقی هستند که می‌توان بر بنیاد آن‌ها و با توجه به انتظاراتی که در هر مسئله خاص داریم، عملگر مناسب را انتخاب نمود.

مثال ۱.۷. اگر در یک مسئله پیوستگی معیار مهمی باشد (یعنی نباید تغییر اندک در مقدم یا تالی منجر به تغییر زیاد در نتیجه استلزام شود) آن‌گاه باید توجه خود را به استلزام‌های پیوسته معطوف کنیم.

مثال ۲.۷. چنانچه در یک سیستم، وضعیت به گونه‌ای باشد که از مقدم نادرست هر چیزی را بتوان نتیجه گرفت، باید استلزامی را به کار برد که ویژگی ۳ را داشته باشد. طبق این ویژگی هرگاه شرایط سیستم با مقدم گزاره شرطی هیچ تطابقی نداشته باشد، باید انتظار هر وضعیتی را برای متغیر خروجی داشته باشیم (امکان یک برای همه وضعیت‌ها).

با دو مثال بالا، روشن شد که چگونه می‌توان طبق انتظار کاربر یا وضعیت سیستم در دست بررسی، ویژگی ریاضی-منطقی استلزام را شناسایی و سپس استلزام یا استلزام‌های مناسب را انتخاب کرد.

۲.۷. سازگاری با قوانین بنیادی استنتاج. یکی از ملاک‌های انتخاب عملگر استلزام، سازگاری با قواعد بنیادین استدلال تقریبی است. سه قاعده بنیادین استدلال تقریبی عبارت‌اند از:

(۱) قاعده وضع مقدم تعمیم‌یافته^{۳۴}؛

(۲) قاعده رفع تالی تعمیم‌یافته^{۳۵}؛

(۳) قاعده تعدی (/ انتقالی) تعمیم‌یافته^{۳۶}.

در اینجا توجه خود را به سازگاری عملگرهای استلزام با قاعده وضع مقدم تعمیم‌یافته معطوف می‌کنیم (شرح کوتاه درباره این قاعده را در [۶] ببینید). این قاعده، که گسترش طبیعی قاعده وضع مقدم منطق کلاسیک است، چنین است

Rule: IF X is A , then Y is B

Input: X is A^*

Output: Y is B^*

که X و Y دو متغیر، و A ، B ، A^* و B^* مجموعه‌های فازی هستند. نکته کلیدی این است که نتیجه استنتاج، یعنی مجموعه فازی B^* ، را چگونه برپایه مشاهده و گزاره اگر-آن‌گاه به دست آوریم؟ رایج‌ترین روش، قاعده ترکیبی استنتاج است. طبق این قاعده، با داشتن مجموعه‌های فازی A و B و نتیجه استنتاج به صورت $B^* = A^* \text{ OR } R$ به دست می‌آید که R رابطه استلزام حاصل از رابطه شرطی «اگر X ، A باشد، آن‌گاه Y ، B است» می‌باشد، و O عملگر ترکیب بین دو مجموعه فازی است.

در اینجا R که رابطه فازی دو بُعدی حاصل از به کارگیری یک عملگر استلزام برای مدل‌سازی قاعده اگر-آن‌گاه فازی است، در استدلال تقریبی بالا اهمیت بنیادین دارد. آشکار است که B^* را می‌توان بر اساس گزینه‌های مختلفی برای عملگر استلزام و عمل ترکیب به دست آورد. یک انتظار نسبتاً معقول این است که اگر $A^* = A$ (یعنی مشاهده دقیقاً منطبق با مقدم رابطه شرطی باشد)، نتیجه نیز دقیقاً منطبق با B بشود، یعنی $B^* = B$. به سخن دیگر، طبق قاعده ترکیبی استنتاج، به ازای هر $y \in Y$ باید داشته باشیم

$$(V) \quad B(y) = \sup_{x \in X} T[A(x), I(A(x), B(y))]$$

اکنون پرسش این است: تحت چه شرایطی، یعنی با کدام T -نرم و کدام استلزام، رابطه بالا برقرار است؟ در این جا باید به نقش T -نرم و نقش عملگر استلزام - هر دو - توجه کرد. به ازای برخی عملگرهای استلزام (با این فرض که برد تابع عضویت‌های مجموعه‌های فازی A و B ، بازه $[0, 1]$ باشد)، مثلاً استلزام گودل و استلزام وو، رابطه (V) به ازای هر T -نرم برقرار است. ولی برای بیشتر عملگرهای استلزام، این رابطه تنها به ازای برخی T -نرم‌ها برقرار است. شایان ذکر است که با به کارگیری T -نرم جمع کراندار یا T -نرم دراستیک، رابطه (V) به ازای همه استلزام‌ها برقرار است (با این فرض که برد A و B ، بازه $[0, 1]$ باشد). نتایجی در این باره در جدول ۲ درج شده است (با الهام از [۱۱]، [۱۳] و [۱۸]). نتایج مندرج در این جدول با این فرض است که برد توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B ، بازه $[0, 1]$ است.

روشن است که، با به کارگیری T -نرم مینیمم، عملگرهای گودل، لارسن، ممدانی و وو در رابطه (V) صدق می‌کنند. همچنین، برپایه T -نرم ضرب جبری، رابطه (V) به ازای عملگرهای گودل، گوگن، لارسن، ممدانی و وو برقرار است.

³⁴generalized modus ponens ³⁵generalized modus tollens ³⁶generalized hypothetical syllogism

جدول ۲. قاعده وضع مقدم تعمیم یافته

حاصل $B^* = A^* \text{ OR } A^*$ هنگامی که $A^* = A$ ، به ازای عملگرهای مختلف و به کارگیری T - نرم استاندارد و T - نرم ضرب

T - نرم		نام استلزام
ضرب	مینیمم	
$\max[\frac{1}{4}, B]$	$\max[\frac{1}{4}, B]$	زاده
B	B	گودل
B	$B^{\frac{1}{2}}$	گوگن
$\max[\frac{1}{4}, B]$	$\max[\frac{1}{4}, B]$	کلنه - دینز
B	B	لارسن
$\frac{1}{4}(1+B)^2$	$\frac{1}{4}(1+B)$	لوکاشویچ
B	B	ممدانی
$\max \left[B, \frac{1}{4 - 4 \min(B, \frac{1}{4})} \right]$	$\frac{1}{4-B}$	رایشنباخ
B	B	وو

ملاک دیگر در سازگاری عملگر استلزام، سازگاری با قاعده رفع تالی تعمیم یافته است. یعنی چنانچه همراه با قاعده اگر-آن گاه فازی، مشاهده به صورت " Y is B^c " باشد، نتیجه استنتاج به صورت " X is A^c " به دست آید. یعنی به ازای هر x

$$(8) \quad 1 - A(x) = \sup_{y \in Y} T[1 - B(y), I(Ax(x), B(y))]$$

هم چنین سازگاری با قانون تعدی تعمیم یافته بدین معنی است که به ازای هر x و z

$$(9) \quad I(A(x), C(z)) = \sup_{y \in Y} T[I(A(x), B(y)), I(B(y), C(z))]$$

هر یک از دو رابطه بالا به ازای بعضی از استلزامها و برخی T - نرمها برقرار است. توضیحات بیشتر را در [۱]، [۱۱]، [۱۳] و [۱۸] پیگیری کنید.

در جمع بندی مطالب بالا می توان گفت که، از دید استدلال تقریبی و کاربرد در سیستم های خبره، سازگاری با قوانین استنتاج ملاک مهمی در انتخاب عملگر استلزام است. برای مثال، ثابت می شود که با به کارگیری هر یک از چهار T - نرم مینیمم، ضرب جبری، جمع کراندار و دراستیک، عملگر استلزام وو هر سه رابطه (۷) تا (۹) را برقرار می سازد. لذا استلزام وو استلزام مناسبی در استنتاج های فازی است. استلزام گودل نیز چنین است جز این که بر حسب T - نرم های مینیمم و ضرب، نتیجه قاعده رفع تالی به ازای مشاهده B^c ، به ترتیب به صورت $\max[\frac{1}{4}, A^c]$ و $\max[\frac{1}{4}, A^c]$ به دست می آید. دقت شود که اینها بدین معنی نیست که استلزام وو و استلزام گودل به طور کلی بهترین استلزامها هستند، بلکه بدین معنی است که از دیدگاه سازگاری با قوانین بنیادین استنتاج فازی، نامزدهای مناسبی می باشند.

۳.۷. حل معادله رابطه ای فازی. در مسائل کاربردی که مبتنی بر قواعد اگر-آن گاه فازی هستند، می توان رابطه استلزام مناسب را با حل یک معادله رابطه ای فازی^{۳۷} به دست آورد. به منظور توضیح مطلب، قاعده وضع مقدم تعمیم یافته را دوباره در نظر بگیرید.

³⁷Fuzzy relational equation

Rule: IF X is A , then Y is B

Input: X is A^*

Output: Y is B^*

در بخش پیش گفتیم که روش متداول در استفاده از الگوی بالا، به کارگیری قاعده ترکیبی استنتاج است. طبق این قاعده، با داشتن مجموعه‌های فازی A ، B و A^* نتیجه استنتاج، یعنی مجموعه فازی B^* ، به صورت $B^* = A^*OR$ به دست می‌آید که R رابطه استلزام حاصل از رابطه شرطی «اگر X ، A باشد، آن‌گاه Y ، B است» می‌باشد، و O عملگر ترکیب بین دو مجموعه فازی است.

فرض کنید در مسئله موردنظر، بر اساس دیدگاه خبره یا بر پایه مشاهدات، بتوان مشاهده A^* و نتیجه B^* را مشخص کرد. در این صورت از سه مؤلفه در معادله رابطه‌ای فازی $B^* = A^*OR$ ، دو مؤلفه یعنی A^* و B^* معلوم‌اند، و می‌توان با حل معادله $B^* = A^*OR$ ، رابطه استلزام R را به دست آورد. درباره حل معادلات رابطه‌ای فازی به [۱۴] مراجعه کنید.

۴.۷. نحوه فرایند استنتاج. یک موضوع کلیدی در سیستم‌های استنتاج فازی، تفاوت آن‌ها برحسب نوع استنتاج از دید افزایشی، کاهشی و نایکونوا بودن است. به تعریف زیر توجه کنید [۱].

تعریف ۳.۷. در قاعده وضع مقدم تعمیم‌یافته چنانچه فرایند استنتاج به گونه‌ای باشد که همواره $B \subseteq B^*$ گوئیم فرایند از نوع افزایشی است. اگر فرایند استنتاج به گونه‌ای باشد که همواره $B^* \subseteq B$ گوئیم فرایند از نوع کاهشی است. اگر گاه $B \subseteq B^*$ و گاه $B^* \subseteq B$ گوئیم فرایند استنتاج از نوع نایکونوا است.

هرگاه کاربری از سیستم استنتاج فازی استفاده می‌کند باید، با توجه به نوع و شرایط مسئله و پایگاه قواعد، تصمیم بگیرد که چه نوع فرایند استنتاج مناسب مسئله است. ولی این موضوع چه پیوندی با عملگرهای استلزام دارد؟ نخست به تعریف و مثال زیر توجه کنید.

تعریف ۴.۷. عملگر استلزام $I(a, b)$

(الف) افزایشی نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $a, b \in [0, 1]$ ، داشته باشیم $I(a, b) \geq b$.

(ب) کاهشی نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $a, b \in [0, 1]$ ، داشته باشیم $I(a, b) \leq b$.

(ج) نایکونوا نامیده می‌شود اگر نه از نوع افزایشی و نه از نوع کاهشی باشد.

مثال ۵.۷. (الف) هر S - استلزام افزایشی است. همچنین، هر R - استلزام افزایشی است.

(ب) عملگرهای لارسن و ممدانی از نوع کاهشی‌اند.

(ج) استلزام‌های زاده و وو از نوع نایکونوا هستند.

اکنون قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که بیانگر رابطه بین نوع فرایند و عملگر استلزام مورد استفاده است. این قضیه می‌تواند در انتخاب عملگر استلزام در مسائل کاربردی کارگشا باشد.

قضیه ۶.۷ [۱]. در قاعده وضع مقدم تعمیم‌یافته، اگر استلزام مورد استفاده افزایشی، کاهشی یا نایکونوا باشد، فرایند استنتاج نیز، به‌ترتیب افزایشی، کاهشی یا نایکونوا خواهد بود.

بحث بالا و به‌ویژه قضیه ۶.۷ در موضوع انتخاب عملگر استلزام راه‌گشا است. بدین ترتیب که هرگاه در مسئله‌ای، کاربر تشخیص دهد که فرایند استنتاج باید از نوع افزایشی باشد، باید الزاماً از یک استلزام افزایشی استفاده کند، و اگر وی تشخیص دهد که استنتاج باید از نوع کاهشی باشد، باید الزاماً از یک استلزام کاهشی استفاده کند.

نکته ۷.۷. چهار ملاک اصلی را به منظور انتخاب عملگر مناسب گفتیم و شرح دادیم. در عمل، افزون بر برخی نکات جزئی دیگر، دیدگاه کاربر و کارشناس هر مسئله است که تعیین کننده نهایی در انتخاب عملگر استلزام مناسب است. حتی ممکن است در بخش‌های مختلف فرایند تصمیم‌گیری یا فرایند استنتاج، از عملگرهای گوناگون استفاده شود.

۸. چند نکته تکمیلی

۱.۸. احتمال استلزام و استلزام احتمالاتی. چنانچه رابطه استلزام $p \rightarrow q$ را از دید احتمالی بنگریم، به رابطه احتمال شرطی رهنمون می‌شویم، یعنی، با زبان مجموعه‌ها، به رابطه $P(A|B)$ می‌رسیم. این زاویه دید، منجر به دو مفهوم و دو رویکرد می‌شود: (۱) احتمال استلزام، (۲) استلزام احتمالاتی^{۳۸}. مفهوم احتمال استلزام مرتبط با این موضوع است که هرگاه نایقینی گزاره‌های منطقی، برای مثال p, q و $p \rightarrow q$ ، از نوع احتمالی باشد، ساختارها و استنتاج‌های منطقی به چه صورت است؟ این رویکرد، در چارچوب احتمال منطقی بررسی شده است. به منظور آشنایی مقدماتی با احتمال منطقی و مراجعی در این باره به [۷] مراجعه کنید. استلزام احتمالاتی به این موضوع بازمی‌گردد که برپایه روابط احتمال و به‌ویژه با دیدگاه احتمال شرطی چگونه می‌توان عملگرهای استلزام را ساخت؟ در این باره [۱۶] و [۲۱] را ببینید.

۲.۸. عملگرهای استلزام و توابع مفصل^{۳۹}. از موضوع‌های محل توجه در سال‌های اخیر، رابطه بین عملگرهای استلزام و توابع مفصل است. مفصل مفهومی است که در نظریه احتمال و به‌ویژه ساختن توزیع‌های دو یا چندمتغیره کاربرد دارد. این موضوع در کنار بررسی رابطه بین نرم‌های مثلثی (T -نرم‌ها) و توابع مفصل، منجر به مبحث سه‌گانه نرم‌های مثلثی-عملگرهای استلزام-مفصل‌ها شده است. علاقمندان این سه‌گانه را به [۱۵] و [۱۶] ارجاع می‌دهیم.

۳.۸. منطق دانان قدیم و عملگر استلزام. منطق دانان ایرانی-اسلامی، مانند ابن‌سینا و خواجه نصیر، مباحثی درازدامن درباره رابطه استلزام داشته‌اند. آن‌ها مفهوم استلزام را با عنوان «قضیه شرطیه اتصالیه» معرفی و بررسی کرده‌اند. این مبحث به‌ویژه از دید ارتباط آن با انواع قیاس به‌خصوص قیاس استثنایی (قاعده وضع مقدم و قاعده رفع تالی) اهمیت داشته است. البته در این تبیین، اصل رابطه استلزام به‌عنوان رابطه‌ای میان دو طرف (مقدم و تالی) بررسی می‌شده است، یعنی کل این رابطه در مقام یک متغیر در نظر گرفته می‌شده است. در واقع، پس از ظهور منطق ریاضی بود که نگاه به رابطه استلزام همچون عملگری دومتغیره توسعه داده شد. درباره آراء منطق دانان ایرانی-اسلامی درباره رابطه استلزام و تمایز استلزام مادی و استلزام صوری کتاب‌ها و مقالات بسیار نوشته شده است که برای نمونه به [۴] و [۱۰] اشاره می‌کنیم.

۴.۸. چرا عملگرهای حاصل ضرب و مینیمم. در واپسین نکته و در پایان مقاله به پرسشی می‌پردازیم که پرسش بسیاری از کاربران منطق فازی و سیستم‌های هوشمند است. پرسش این است: چرا، با اینکه عملگرهای ضرب جبری و مینیمم در تعریف استلزام صدق نمی‌کنند (و در حالت خاص، منطبق بر تعریف استلزام در منطق دوازدهی نیستند) در برخی کاربردها استفاده می‌شوند و در نرم‌افزارها رایج‌اند؟

پاسخ این پرسش به کارایی این دو عملگر در برخی وضعیت‌های عملی برمی‌گردد. در برخی وضعیت‌ها، قاعده اگر-آنگاه تاکید بر برقراری حالت A برای متغیر X دارد. در این وضعیت‌ها، قاعده اگر-آنگاه چنین بیان می‌شود: اگر X, A است، آنگاه B, Y باشد، وگرنه هیچ. بدین ترتیب با قاعده قیاس استثنایی تعمیم‌یافته زیر روبه‌رو هستیم

Rule: IF X is A , then Y is B , else nothing

Input: X is A^*

Output: Y is B^*

³⁸probabilistic implication ³⁹Copula

در چنین وضعیت‌هایی که معمولاً در استلزام‌های محلی (موضعی) رخ می‌دهد، رابطه استلزام $p \rightarrow q$ مناسب باید رابطه‌ای باشد که هرگاه مقدم گزاره شرطی نادرست است، ارزش گزاره شرطی صفر باشد. و این هنگامی اتفاق می‌افتد که در مدل‌سازی رابطه استلزام $p \rightarrow q$ از یک T -نرم استفاده کنیم. یعنی قرار دهیم $I(a, b) = T(a, b)$. و چون عملگرهای ضرب جبری و مینیم، دو T -نرم شناخته شده و رایج هستند، از این دو عملگر در مسایل کاربردی و نرم‌افزارها برای مدل‌سازی رابطه استلزام استفاده می‌شود [۸].

نکته دیگر، سازگاری این دو عملگر با قوانین بنیادی استنتاج فازی است. برای نمونه، با دقت در جدول ۲ روشن است که با به کارگیری عملگرهای ضرب جبری (لارسن) و مینیم (ممدانی) رابطه (۷) برقرار است (اثباتی از این موضوع در [۱] ارائه شده است). گفتنی است در چند بررسی، کارایی این دو عملگر در مقام عملگرهایی مناسب برای استلزام اثبات شده است، برای نمونه [۲۰] را ببینید.

۹. تشکر و قدردانی

از استاد اسفندیار اسلامی، که در بررسی برخی مطالب همفکری داشتند، سپاسگزارم. از دکتر مهدی عاشوری و دکتر علی دولتی برای مشورت‌های سودمند آن‌ها و از آقای مهندس وحید حیدری به خاطر کمک در رسم شکل‌ها ممنونم. از داوران ناشناس مقاله، که نکاتی در اصلاح مقاله پیشنهاد دادند، تشکر می‌کنم.

مراجع

- [۱] ا. اسلامی، منطق فازی و کاربردها، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۹۱.
- [۲] م. ع. پورعبدال...، منطق برای ریاضی‌دانان، انتشارات دانشگاه امام رضا (ع)، ۱۳۸۴.
- [۳] ف. جوادی جهان‌تیغ، چند رده جدید از عملگرهای استلزام و کاربردهای آن‌ها، گزارش پروژه کارشناسی آمار، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۲.
- [۴] م. حاج‌حسینی، بررسی و تحلیل شرطی‌ها و شروط صدق آن‌ها در منطق ابن‌سینا، مجله پژوهشی علوم انسانی دانشگاه اصفهان، ۱۳ (۱۳۸۱) ۲۷-۵۰.
- [۵] س. م. طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، چاپ دوم، ۱۳۷۸.
- [۶] س. م. طاهری، سیمای منطق فازی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۳۵ (۱۳۸۴) ۷۳-۹۲.
- [۷] س. م. طاهری، مفهوم منطقی احتمال از دیدگاه کارنپ، مجموعه مقالات ۱۵ امین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه یزد، (۱۳۹۹) ۳۵-۴۴.
- [۸] م. عنابستانی و ف. حسن‌زاده، هوش محاسباتی و زیستی (مقدمه‌ای بر محاسبات نرم)، موسسه فرهنگی هنری دیباگران تهران، ۱۳۹۷.
- [۹] غ. مصاحب، منطق ریاضی، انتشارات حکمت، ۱۳۶۶.
- [۱۰] ل. نبوی، منطق زمان و نظریه قیاس اقترانی شرطی ابن‌سینا، در: "منطق سینوی به روایت نیکولاس رشر"، انتشارات علمی و فرهنگی، (۱۳۸۱) ۱۲۰-۹۷.
- [۱۱] ل. وانگ، سیستم‌های فازی و کنترل فازی، ترجمه: م. تشن‌لب و همکاران، انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیر، ۱۳۹۱.
- [12] M. Arefi and S. M. Taheri, Possibilistic Bayesian inference based on fuzzy data, *Int. J. Mach. Learn. Cyber.*, 7 (2016) 753–763.
- [13] M. Baczynski and B. Jayaram, *Fuzzy Implications*, Springer, 2008.
- [14] B. De Baets, *Analytical solution methods for fuzzy relational equations*, In: Dubois D., Prade H. (eds) *Fundamentals of Fuzzy Sets. The Handbooks of Fuzzy Sets Series*, 7 291–340 Springer, 2000.
- [15] A. Dolati, J. F. Sanchez and M. Ubeda-Flores, A capula-based family of fuzzy implication operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 211 (2013) 55–61.
- [16] P. Grzegorzewski, Probabilistic implications, *Fuzzy Sets and Systems*, 226 (2013) 53–66.
- [17] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, *Triangular Norms*, Springer, 2000.
- [18] J. G. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Pearson College Div, 1995.
- [19] M. Mas, M. Monserrat, J. Torrens and E. Trillas, A survey on fuzzy implications functions, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 15 (2007) 1107–1121.

- [20] C. Moraga, E. Trillas and S. Guadarrama, Multiple-valued logic and artificial intelligence: Fundamentals of fuzzy control revisited, *Artif. Intell. Rev.*, **20** (2003) 169–197.
- [21] H. T. Nguyen, M. Mukaidono and V. Kreinovich, *Probability of implication, logical version of Bayes theorem, and Fuzzy logic operations*, Proc. of FUZZ-IEEE'2002, Hawaii, (2002) 530–535.
- [22] H. T. Nguyen and E. A. Walker, *A First Course in Fuzzy Logic*, Chapman & Hall/CRC, 2006.

سید محمود طاهری

دانشکده فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

sm_taheri@ut.ac.ir

سید محمود طاهری در سال ۱۳۶۲ وارد مقطع کارشناسی رشته آمار و در سال ۱۳۶۷ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته آمار دانشگاه فردوسی مشهد، و در سال ۱۳۷۴ وارد دوره دکتری آمار ریاضی دانشگاه شیراز شد. وی حدود ۱۵ سال هیأت علمی دانشگاه صنعتی اصفهان بوده و اکنون استاد دانشکده فنی دانشگاه تهران است. زمینه‌های پژوهشی وی استنباط آماری، احتمال و آمار مهندسی، احتمال و آمار در محیط نایقینی و مدل‌سازی رگرسیونی در محیط نایقینی است.



Implication Operators

S. Mahmoud Taheri

Abstract: Three basic classes of implication operators are investigated, including: implication based on S-norms, implications based on residuated functions of T-norms, and Q-implications. We explain the logical basis of these three classes of implications. We then turn to what mathematical-intuitive properties the implication operators should (or better yet) have. We then explore what criteria are important in choosing the appropriate operator in practice.

Keywords: Triangular morm, Fuzzy implication, Conditional rule, Classical logic, Fuzzy logic.

S. Mahmoud Taheri

College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

Email: sm_taheri@ut.ac.ir

Communicated by Saeid Maghsoudi.

Article Type: Promotional.

Received: 2021/08/25, Accepted: 2021/11/13.