

## مطالعه ساختارهای ریاضی در مدل‌سازی سیستم‌های اجتماعی: تحلیل شبکه‌های اجتماعی

مهدی خواجه‌صالحانی

**چکیده.** برای تحلیل و بررسی ساختار یک شبکه اجتماعی و مطالعه تعاملات موجود تنها بر اساس اطلاعات ارتباطی بین عوامل و اجزاء شبکه، علاوه بر شیوه‌ای مناسب برای نمایش داده‌ها (که در این مقاله نمایش آبرگرافی می‌باشد) به مدلی دقیق و قابل اطمینان نیز احتیاج داریم. به منظور طراحی و ساخت چنین مدل مطلوبی از تکنیک یادگیری عمیق<sup>۱</sup> روی گراف‌ها استفاده کرده و یک شبکه عصبی پیچشی<sup>۲</sup> بر پایه گراف‌های چندگانه<sup>۳</sup> را برای آبرگراف‌های مورد نظر به کار برده‌ایم. با استفاده از چارچوب و مدل ارائه شده در این مقاله می‌توانیم ویژگی‌های مستقل از مقیاس یک شبکه اجتماعی را به نمایش گذاشته و آن‌را برای مطالعه ساختار ریاضیاتی و تحلیل هر شبکه اجتماعی دلخواهی تعمیم دهیم.

### ۱. مقدمه

ساختار یک شبکه اجتماعی آنلاین شامل حجم انبوهی از اطلاعات در ارتباط با روابط درونی مابین عوامل اجزاء و مفاهیم موجود در شبکه می‌باشد. مطالعه چنین روابطی می‌تواند ما را در تحلیل ساختار شبکه (مثل دسته‌بندی عوامل شبکه به احزاب و زیرگروه‌ها و شناسایی میزان ارتباطات عوامل با یکدیگر) یاری رساند. گام اصلی و اولیه در مطالعه چنین روابطی نیز نمایش داده‌های مشاهده شده و موجود به شیوه‌ای مفید و مؤثر است. در واقع، عوامل و اجزاء در یک شبکه می‌توانند کاربران شبکه‌های ارتباطی اجتماعی (مثل سروش، تلگرام، فیسبوک و توییتر) یا تصاویر و ویدئوهایی باشند که در یک شبکه اشتراک‌گذاری محصولات رسانه‌ای (مانند فلیکر<sup>۱</sup> و اینستاگرام) به اشتراک گذاشته می‌شوند و یا متون ارائه شده در سایت‌های بحث و تبادل نظر (همچون ردیت<sup>۲</sup> و کورا<sup>۳</sup>) باشند. در هر یک از این شبکه‌های اجتماعی روابط زیاد و پیچیده‌ای بین عوامل و اجزاء شبکه وجود دارد که می‌تواند مانعی برای استخراج اطلاعات معنی‌دار جهت تحلیل شبکه باشد. یکی از راه‌حل‌های کلیدی برای رفع این مشکل، ارائه مدلی است که به واسطه آن بتوان به‌طور مؤثر حجم زیادی از اطلاعات مربوط به ارتباطات بین عوامل و اجزاء انواع شبکه‌های اجتماعی را استخراج کرد. در طراحی و ارائه چنین مدل مطلوبی با دو چالش عمده روبرو هستیم:

عبارات و کلمات کلیدی: شبکه اجتماعی، ساختار ریاضیاتی، شبکه عصبی پیچشی.

دبیر تخصصی رابط: سعید مقصودی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۷/۳۰

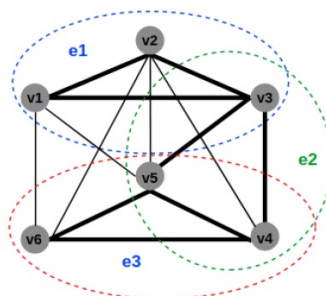
<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129873.1452>

<sup>۱</sup>flickr <sup>۲</sup>reddit <sup>۳</sup>quora

الف) هر شبکه اجتماعی دارای یک ساختار اجتماعی/حزبی درونی است؛ در هر یک از اجتماعات/ احزاب/ زیرگروه‌های موجود در یک شبکه اجتماعی، می‌توان روابطی را یافت که پیچیده‌تر از روابط دو-جانبه هستند. در واقع این گونه از روابط، روابطی هستند که در آنها بیش از دو عامل با یکدیگر در ارتباط هستند؛ از این‌رو، مدل گرافی کلاسیک (که در آن هر یک از یال‌ها بیانگر ارتباط بین تنها دو عامل هستند) برای چنین شبکه‌هایی نمی‌تواند مدل مناسبی باشد.

ب) از آنجا که در یک شبکه اجتماعی عوامل و اجزاء فراوان و روابط متنوعی وجود دارد، ارایه مدلی که بتوان به کمک آن ساختار شبکه و روابط درونی آن را تحلیل و بررسی کرد کار بسیار دشواری است.

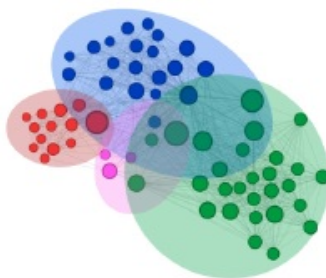
برای روشن‌تر شدن چالش‌های موجود، لازم است به چندین نکته توجه داشته باشیم. اول اینکه، به‌منظور مدل گرافی کلاسیک برای شبکه‌های اجتماعی- از آنجا که در چنین مدلی تنها روابط دو-جانبه بین عوامل و اجزاء شبکه در نظر گرفته می‌شود، می‌تواند باعث از دست دادن حجم وسیعی از اطلاعات شده و منجر به تحلیل ناقص و نادرستی از شبکه اجتماعی شود. در واقع مجموعه این دست از روابط دو-جانبه نمی‌تواند روابطی که در آنها بیش از دو عامل با یکدیگر در تعامل هستند را به نمایش بگذارند. همچنین چنین روابط دو-جانبه‌ای قادر نیستند شار یا جریان کلی اطلاعات در یک شبکه اجتماعی را به تصویر بکشند. به عنوان مثال: در شبکه توییت (که شامل کاربران، توییت‌ها، هشتگ‌ها<sup>۴</sup> و لیست‌ها می‌باشد) حتی نمایش سه-جانبه، برای کاربری که توییتی شامل چندین هشتگ را منتشر می‌کند، به‌وسیله گراف‌های معمولی و کلاسیک امری غیرممکن است [۱۷]. حتی در مثال نسبتاً ساده یک شبکه از همکاران نویسنده به کمک مدل گرافی کلاسیک نمی‌توان تشخیص داد که اگر به عنوان مثال در این شبکه سه نویسنده (یا بیشتر) با یکدیگر در ارتباط باشند آنگاه آیا این نویسندگان، همکاران نویسنده در یک مقاله واحد هستند یا خیر [۲۹]؛ شکل ۱ را ببینید.



شکل ۱. مقایسه نمایش گرافی کلاسیک و نمایش “آبرگرافی” برای بیان ارتباطات بین عوامل و اجزاء یک شبکه

بنابراین نمایش گرافی کلاسیک نمایشی نارسا و ناقص برای بیان ارتباطات موجود در یک شبکه اجتماعی می‌باشد. مشخصه دیگر شبکه‌های اجتماعی، وجود اجتماعات و زیرگروه‌های هم‌پوش<sup>۵</sup>، [۱۸]، در چنین شبکه‌هایی است. نکته مهم‌تر اینکه شبکه‌های اجتماعی، شبکه‌هایی مستقل از مقیاس هستند ([۲۱] و [۲۳] را ببینید). در شبکه‌های مستقل از مقیاس<sup>۶</sup>، عواملی که ارتباطات زیادی دارند (یعنی رأس‌های با درجه بالا) مایلند با رأس‌های از درجه بالا ارتباط برقرار کنند حتی اگر توسط عواملی با ارتباطات کمتر (یعنی رأس‌هایی از درجات پایین) احاطه شده باشند. به عبارتی دیگر شبکه‌های اجتماعی دارای ساختاری متشکل از زیرگروه‌ها/ جوامع درونی هستند که در آنها زیرگروه‌های کوچکتر به‌واسطه رئوس از درجات بالا به زیرگروه‌های بزرگتر ملحق می‌شوند؛ در واقع چنین رئوس درجه بالایی نقش کانون‌های موضعی را در شبکه بازی می‌کنند [۲۶]. در حقیقت همان‌طور که در شکل ۲ نمایش داده شده است. چنین زیرگروه‌هایی در شبکه مورد مطالعه تشکیل زیربخش‌هایی می‌دهند که همبندی بسیاری بین عوامل درونی هر زیربخش وجود دارد ولی ارتباطات (برون‌بخشی) ضعیف‌تری بین زیربخش‌های متفاوت شبکه برقرار است. بر این اساس می‌توان گفت رئوس از درجه بالا که در مرکزیت زیربخش‌های شبکه قرار دارند نقش بسیار مهمی را برای برقراری جریان اطلاعات و حفظ همبندی عمیق در یک شبکه اجتماعی ایفا می‌کنند.

<sup>4</sup>hashtag <sup>5</sup>overlapping communities <sup>6</sup>scale-free network



شکل ۲. ساختار زیرگروه‌های هم‌پوش در یک شبکه اجتماعی

در گذشته رویکردهای متنوع فراوانی برای استخراج اطلاعات مربوط به ارتباطات و تعاملات بین عوامل شبکه‌های اجتماعی پیشنهاد شده است؛ به عنوان نمونه [۸]، [۱۳]، [۱۹]، [۲۰] و [۲۴] را ببینید. هر چند، به کمک هیچ یک از چنین رویکردهایی نمی‌توان در مورد ویژگی‌های ساختاری به اشتراک گذاشته شده در ساختار زیرگروه‌های هم‌پوش یک شبکه اجتماعی اطلاعات کاملی به دست آورد. به منظور رفع این مشکل در این مقاله پژوهشی شبکه‌های اجتماعی را به صورت آبرگراف‌هایی<sup>۷</sup> نمایش می‌دهیم که در آن هر یک از اجزاء شبکه توسط مجموعه‌ای از رئوس نمایش داده می‌شود و یال‌های آبرگراف بیانگر ارتباطات هم‌پوش بین عوامل هستند. در واقع در یک آبرگراف (به عنوان تعمیمی از ساختار یک گراف کلاسیک) یال‌ها، که آنها را آبريال‌های<sup>۸</sup> آبرگراف می‌نامیم، عبارتند از زیرمجموعه‌های ناتهی دلخواهی از مجموعه رئوس گراف؛ مرجع [۳] را مشاهده کنید. لذا آبريال‌ها می‌توانند بیانگر ارتباط بین هر تعداد از رئوس (نه لزوماً دو رأس، مثل یک گراف کلاسیک) باشند. نقطه تمایز اصلی یک آبرگراف و یک گراف کلاسیک در همین مفهوم آبريال می‌باشد. مفهوم رأس برای یک آبرگراف و یک گراف کلاسیک یکسان است ولی یک آبريال حتی می‌تواند بیانگر ارتباط تمامی رئوس باشد در حالی که یک یال در یک گراف کلاسیک تنها ارتباط دو رأس را نمایش می‌دهد. عوامل و اجزاء یک شبکه اجتماعی را می‌توان توسط یک آبرگراف به نمایش گذاشت که رئوسش افراد موجود در شبکه بوده و آبريال‌ها نیز بیانگر زیرگروه‌ها یا زیربخش‌های شبکه اجتماعی می‌باشند. از لحاظ عملیات محاسباتی نیز آبرگراف‌ها را به گراف‌های کلاسیک ترجیح می‌دهیم زیرا ماتریس وقوع<sup>۹</sup> متناظر با یک آبرگراف به فضای رایانش/ محاسباتی کمتری (نسبت به ماتریس مجاورت<sup>۱۰</sup> مربوط به گراف کلاسیک نظیر) برای تحلیل و توصیف حجم معینی از اطلاعات نیاز دارد (مرجع [۲۸] را ببینید). از این رو یک آبرگراف در واقع، چارچوبی طبیعی برای مطالعه ساختار زیرگروه‌ها و تحلیل کلیه روابط قابل توصیف بین رئوس یک شبکه اجتماعی می‌باشد.

برای تحلیل و بررسی ساختار یک شبکه اجتماعی و مطالعه تعاملات موجود تنها بر اساس اطلاعات ارتباطی بین عوامل و اجزاء شبکه، علاوه بر شیوه‌ای مناسب برای نمایش داده‌ها (که در این مقاله نمایش آبرگرافی می‌باشد) به مدلی دقیق و قابل اطمینان نیز احتیاج داریم. با استفاده از روش پیشنهادی این مقاله (که در ادامه به جزئیات آن خواهیم پرداخت) قادر خواهیم بود عملیات رایانشی/ محاسباتی متفاوتی را برای هر نوع شبکه اجتماعی انجام دهیم. با به منظور مدل پیشنهادی این مقاله پژوهشی می‌توانیم اطلاعات (فرداده<sup>۱۱</sup>) گمشده مربوط به یک عامل شبکه را با یادگیری روابط بین عوامل (و بدون نیاز به ویژگی محتوایی عامل مورد نظر) استخراج کنیم. به منظور طراحی و ساخت چنین مدل مطلوبی از تکنیک یادگیری عمیق<sup>۱۲</sup> روی گراف‌ها استفاده کرده و یک شبکه عصبی پیچشی<sup>۱۳</sup> بر پایه گراف‌های چندگانه<sup>۱۴</sup> را برای آبرگراف‌های مورد نظر معرفی خواهیم کرد.

اثبات شده است که شبکه‌های عصبی پیچشی عمیق، چارچوبی مفید و مؤثر برای شناسایی الگوهای آماری معنی‌دار حاکم بر سیگنال‌هایی مثل تصاویر، سخنرانی‌ها و ویدیوها (که دارای ساختار اقلیدسی پنهانی هستند) می‌باشند (به عنوان نمونه مرجع [۱۶] را ملاحظه کنید). البته برای تعریف و به کارگیری اکثر مفاهیم مربوط به شبکه‌های پیچشی کلاسیک به برخی از ویژگی‌ها همچون ثبوت<sup>۱۵</sup>

<sup>7</sup>hypergraph <sup>8</sup>hyperedge <sup>9</sup>incidence matrix <sup>10</sup>adjacency matrix <sup>11</sup>metadata <sup>12</sup>deep learning <sup>13</sup>convolutional neural network (CNN) <sup>14</sup>multi-graph <sup>15</sup>stationarity

و موضعی بودن<sup>۱۶</sup> نتایج نیاز داریم که چنین ویژگی‌هایی تنها برای فضاهای داده‌ای اقلیدسی (مانند داده‌های توری<sup>۱۷</sup>) برقرارند. اخیراً پژوهش‌هایی در ارتباط با تکنیک‌های جدیدی با عنوان “یادگیری عمیق هندسی<sup>۱۸</sup>” به منظور تعمیم چارچوب مبتنی بر شبکه‌های عصبی پیچشی برای تحلیل و بررسی داده‌هایی که دارای نمایش گرافی (و نه توری؛ یا به عبارتی دقیق‌تر دارای نمایشی غیراقلیدسی) هستند، به انجام رسیده است (به عنوان دو نمونه بارز، [۱۰] و [۱۵] را ببینید). به عنوان مثال، از شبکه‌های پیچشی گرافی می‌توان در تحلیل رفتاری مؤلفان و دسته‌بندی آنان در یک شبکه استنادی/ارجاعی<sup>۱۹</sup> بهره برد. اما در واقع، با به کارگیری شبکه‌های عصبی پیچشی گرافی معمولی تنها می‌توان به تحلیلی جزئی از شبکه اجتماعی مورد مطالعه دست یافت. از این رو، در این مقاله پژوهشی قصد داریم چارچوب و مدلی ارایه دهیم که بتواند ویژگی‌های مستقل از مقیاس یک شبکه اجتماعی را به نمایش گذاشته و بعلاوه بتوان آن را برای تحلیل و مطالعه ساختاری هر شبکه اجتماعی دلخواهی تعمیم داد.

## ۲. مفاهیم کلیدی

در این بخش قصد داریم به معرفی مفاهیمی همچون آبرگراف‌ها، روش تکمیل یک ماتریس و تکنیک یادگیری عمیق هندسی (که هر سه دارای نقشی کلیدی در این مقاله می‌باشند) بپردازیم.

**۱.۲. آبرگراف‌ها.** یک آبرگراف مانند  $G$  را به صورت دوتایی مرتب  $G = (V, E)$  نمایش می‌دهیم که در آن  $V$  می‌باشد. تعداد رئوس موجود در آبریال دلخواه  $e \in E$  را با  $\delta(e)$  نمایش داده و آن را درجه این آبریال می‌نامیم. لذا در مورد یک گراف ساده کلاسیک، درجه تمامی یال‌ها برابر  $\delta(e) = 2$  می‌باشد؛ از این رو، یک گراف ساده کلاسیک را می‌توانیم یک “دو-گراف” (یا یک گراف دوگانه) بنامیم. ماتریسی قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن شامل درجه تمامی رئوس  $v \in V$  باشد را با نماد  $D_v$  نمایش می‌دهیم. به همین ترتیب، ماتریس قطری متناظر با درجه همه آبریال‌های  $e \in E$  را نیز با نماد  $D_e$  معرفی می‌کنیم. اصطلاحاً می‌گوییم بین رئوس  $v_1$  و  $v_k$ ، از مجموعه رئوس یک آبرگراف، یک آبرمسیر<sup>۲۰</sup> وجود دارد هرگاه دنباله‌ای از رئوس مجزا و آبریال‌های متمایز مانند  $\{v_1, e_1, v_2, \dots, e_{k-1}, v_k\}$  وجود داشته باشد به طوری که برای هر اندیس  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  داشته باشیم  $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$ . یکی از تفاوت‌های اصلی یک آبرگراف و یک گراف ساده کلاسیک در نحوه نمایش آنهاست. یک آبرگراف را به کمک ماتریسی به نام ماتریس وقوع نمایش می‌دهیم ولی برای مطالعه یک گراف ساده از ماتریس مجاورت نظیرش استفاده می‌کنیم. برای آبرگراف  $G = (V, E)$ ، ماتریس وقوع  $H$  عبارتست از ماتریسی (نه لزوماً مربعی) با ابعاد  $|V| \times |E|$  که تنها شامل درایه‌های صفر و یک می‌باشد و در واقع درایه  $h(v, e)$  در آن برابر یک است هرگاه  $v \in e$ . از طرف دیگر، ماتریس مجاورت  $A$  متناظر با یک گراف ساده کلاسیک، ماتریسی مربعی تنها شامل درایه‌های صفر و یک است (که تعداد سطرها و یا ستون‌هایش برابر تعداد رئوس گراف می‌باشد) به طوری که درایه  $a_{ij}$  آن برابر یک است هرگاه یالی از رأس  $i$  به رأس  $j$  در گراف موجود باشد. در مدل کردن داده‌های مربوط به روابط و تعاملات بین عوامل و اجزاء یک شبکه اجتماعی، ساختار آبرگرافی و ماتریس وقوع متناظرش ( $H$ ) مزیت‌های فراوانی نسبت به ساختار گرافی و ماتریس مجاورت نظیرش  $A$  دارد. از آن جمله می‌توان به سه مزیت زیر اشاره کرد:

الف) با به کارگیری ماتریس وقوع یک آبرگراف به فضای ذخیره کمتری نسبت به ماتریس مجاورت یک گراف، برای نمایش حجم معینی از اطلاعات، نیاز خواهیم داشت؛

ب) با به کارگیری ماتریس وقوع متناظر با یک آبرگراف، برای محاسبه حاصلضرب‌های ماتریسی-بردار به عملیات محاسباتی کمتری احتیاج خواهیم داشت؛

ج) مهمتر از همه اینکه، با به منظور ماتریس وقوع یک آبرگراف، می‌توانیم از قدرت تحلیلی عملگرهای مفیدی همچون لاپلاسیان<sup>۲۱</sup> یک ماتریس وقوع بهره ببریم (در بخش ۳ توضیحاتی را در مورد این عملگر ارایه خواهیم کرد).

<sup>16</sup>locality <sup>17</sup>grid data space <sup>18</sup>geometric deep learning <sup>19</sup>citation network <sup>20</sup>hyperpath <sup>21</sup>Laplacian

**۲.۲. روش تکمیل یک ماتریس.** منظور از تکمیل یک ماتریس، روشی است برای یافتن درایه‌های گمشده ماتریسی مانند  $M$  با ابعاد  $p \times q$  که تنها برخی از درایه‌هایش مشاهده یا مشخص شده‌اند. به عبارتی دیگر، با در دست داشتن مجموعه‌ای  $\mathcal{T}$  مانند  $E$  از مشاهدات  $M_{ij}$ ، که  $|E| \ll pq$ ، هدف ما از به منظور این روش، تخمین یا تعیین مابقی درایه‌های  $E$  می‌باشد. یک رویکرد شناخته شده در استفاده از این روش این است که فرض کنیم درایه‌های گمشده در زیرفضایی کوچکتر قرار گرفته‌اند، زیرا در این صورت به‌طور ضمنی برای ماتریس به‌طور جزئی مشخص شده  $M$  رتبه‌ای  $r$  پایین‌تر در نظر گرفته‌ایم و به این ترتیب در واقع، برای یافتن درایه‌های گمشده کافی است به حل یک مساله مینیمم‌سازی رتبه بپردازیم. فرض کنید  $\Pi_E(\cdot)$  عملگر تصویری/افکشی  $\mathcal{T}$  باشد که خروجی آن دقیقاً همان درایه‌هایی است که در مجموعه  $E$  واقع هستند، همچنین فرض کنید  $R$  ماتریس هدف مساله باشد که قرار است با داشتن درایه‌های مشاهده شده  $M_{ij} \in E$ ، ساخته شود. در این صورت، مساله مینیمم‌سازی رتبه به‌صورت زیر قابل ارایه است:

$$(۱) \quad \tilde{R} = \min_{R \in \mathbb{R}^{pq}} \text{rank}(R); \quad \Pi_E(R) = \Pi_E(M).$$

اما در عمل، همواره درایه‌های مشاهده شده می‌توانند با نویزها و سیگنال‌های ناخواسته‌ای نیز همراه باشند. به عنوان مثال، در سیستم‌ها و شبکه‌های آنلاین توصیه فیلم‌ها و ویدیوها (مانند آنچه توسط شرکت IrNetflix طراحی شده است) اطلاعات مربوط به رتبه‌بندی فیلم‌ها توسط کاربران می‌تواند حاوی نویزهایی باشد؛ یا در شبکه‌های ارتباطی بی‌سیم، سیگنال‌ها می‌توانند آلوده به نویزهایی باشند. به‌منظور ایمن کردن روش تکمیل ماتریسی نسبت به تاثیر منفی نویزها، کاندز<sup>۲۵</sup> و همکارانش (در مرجع [۷])، با استفاده از مینیمم‌سازی نرم هسته‌ای<sup>۲۶</sup>، معادله ۱ را به صورت زیر اصلاح کرده‌اند:

$$(۲) \quad \tilde{R} = \min_R \frac{1}{p} \|R\|_* + \lambda_R \|\Pi_E(M - R)\|_F^2.$$

از آنجا که تعداد متغیرهای نامعلوم در مساله بالا از مرتبه  $p \times q$  است، لذا پیاده‌سازی مدل حاصل برای ماتریس‌های بزرگ کار بسیار مشکلی می‌باشد. یک راه حل برای رفع این مشکل، استفاده از نمایش تجزیه‌شده ماتریس هدف  $(R)$  به‌صورت  $R = XY^T$  است که در آن  $X$  و  $Y$ ، به ترتیب ماتریس‌هایی از ابعاد  $p \times r$  و  $q \times r$  می‌باشند که  $r \ll \min\{p, q\}$ . به این ترتیب، مساله بالا را می‌توان به شکل زیر فرمول‌بندی کرد:

$$(۳) \quad \tilde{X}, \tilde{Y} = \min_{X, Y} \frac{1}{p} \|X\|_F^2 + \frac{1}{q} \|Y\|_F^2 + \lambda_{X, Y} \|\Pi_E(M - XY^T)\|_F^2.$$

در فرآیند مینیمم‌سازی رتبه، وابستگی خطی سطرها/ستون‌های  $M$  می‌تواند به عنوان قیدی روی فضای جواب‌های مساله در نظر گرفته شده و دلیلی بر وجود ساختاری هموار روی چنین فضایی باشد. به علاوه وجود همبستگی بین اطلاعات سطری/ستونی نیز می‌تواند سبب بهینه شدن محاسبات گردد. در پژوهش‌هایی که اخیراً در ارتباط با روش تکمیل ماتریسی هندسی (در [۲]، [۱۴]، [۲۲] و [۲۵]) انجام شده است، اهمیت وجود چنین روابط و همبستگی‌هایی در پیاده کردن روش تکمیل ماتریس به اثبات رسیده است.

نمایش  $R = XY^T$  را برای ماتریس هدف  $(R)$  در نظر بگیرید. حال اگر فرض کنیم گرافی همچون  $G_r = (V^X, E^X)$  وجود دارد که ماتریس مجاورتش بیانگر ارتباطات بین  $p$  رأس ماتریس  $X$  بوده و گراف  $G_c = (V^Y, E^Y)$  ارتباطات بین  $q$  رأس ماتریس  $Y$  را به نمایش بگذارد، آنگاه مساله تکمیل ماتریسی هندسی را می‌توان به‌صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$(۴) \quad \min_{X, Y} \frac{1}{p} \|X\|_{G_r}^2 + \frac{1}{q} \|Y\|_{G_c}^2 + \lambda_{X, Y} \|\Pi_E(M - XY^T)\|_F^2,$$

که در آن  $\|X\|_{G_r}^2 = \text{trace}(X \Delta_r X^T)$  و  $\|Y\|_{G_c}^2 = \text{trace}(Y \Delta_c Y^T)$ ، به ترتیب، نیم-نرم دیریکله گرافی<sup>۲۷</sup> متناظر با سطرها و ستون‌های  $R$  بوده و به علاوه  $\Delta_r$  و  $\Delta_c$  نیز، به ترتیب، عبارتند از ماتریس‌های لاپلاسین سطری و ستونی نظیر (ماتریس لاپلاسین را در بخش ۳ معرفی خواهیم کرد).

<sup>22</sup>sparse set <sup>23</sup>rank (of a matrix) <sup>24</sup>projection operator <sup>25</sup>Candes <sup>26</sup>nuclear norm <sup>27</sup>graph Dirichlet semi-norm

۳.۲. تکنیک یادگیری عمیق هندسی. طبق تعریفی که برانستین<sup>۲۸</sup> و همکارانش (در مرجع [۴]) ارایه کرده‌اند، یادگیری عمیق هندسی به مجموعه تکنیک‌های جدیدی اطلاق می‌شود که سعی دارند مدل‌های عصبی عمیق ساختاریافته‌ای را برای دامنه غیراقلیدسی از داده‌ها، مانند گراف‌ها و خمینه‌ها<sup>۲۹</sup>، ارایه دهند. یکی از اولین تلاش‌ها برای تعمیم مفاهیم شبکه عصبی به روی گراف‌ها منسوب به اسکارسلی<sup>۳۰</sup> و همکارانش (در مرجع [۱۱]) می‌باشد؛ در واقع، رویکرد پیشنهادی آنها به منظور شبکه‌های عصبی گرافی<sup>۳۱</sup> است که ترکیبی از شبکه‌های عصبی مکرر<sup>۳۲</sup> و مدل‌های گام برداری تصادفی<sup>۳۳</sup> می‌باشند. در اولین فرمول‌بندی از شبکه‌های عصبی پیچشی<sup>۳۴</sup> روی گراف‌ها، از مفهوم پیچش برای پردازش سیگنال‌های گرافی در دامنه طیفی<sup>۳۵</sup> گراف استفاده شده است (مرجع [۵] را ببینید). در این مقاله پژوهشی، با به‌منظور شبکه‌های پیچشی روی گراف‌ها قصد داریم ارتباطات و تعاملات درونی شبکه‌های اجتماعی را مورد تحلیل و بررسی قرار دهیم. در واقع، یک لایه پیچشی<sup>۳۶</sup> در دامنه طیفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۵) \quad f_l^{\text{out}} = \xi \left( \sum_{l'=1}^p \Phi_k \hat{G}_{ll'} \Phi_k^T f_{l'}^{\text{in}} \right)$$

که در آن  $F_{\text{in}}^{n \times p} = (f_1^{\text{in}} \dots f_p^{\text{in}})$  و  $F_{\text{out}}^{n \times q} = (f_1^{\text{out}} \dots f_q^{\text{out}})$ ، به ترتیب، بیانگر سیگنال‌های ورودی  $p$  - بعدی و خروجی  $q$  - بعدی قابل جریان روی رئوس گراف؛  $\Phi_k$  عبارتست از ماتریس  $n \times k$  متشکل از بردارهای ویژه حاصل از تجزیه طیفی گراف؛  $\hat{G}_{ll'}$  فیلترهای طیفی قابل یادگیری<sup>۳۷</sup> بوده و  $\xi$  بیانگر عامل غیرخطی واحد یکسو شده خطی<sup>۳۸</sup> می‌باشد. پژوهش‌های فراوانی نیز در راستای عمومیت بخشیدن به کاربرد شبکه‌های پیچشی گرافی<sup>۳۹</sup> برای تحلیل انواع ساختاری شبکه‌های اجتماعی انجام شده‌اند (به عنوان نمونه، مراجع [۹]، [۱۲] و [۱۵]).

### ۳. تحلیل شبکه‌های اجتماعی بر پایه ساختار ریاضیاتی سیستم‌های اجتماعی متناظر

در این بخش قصد داریم از مفاهیم شبکه‌های عصبی پیچشی روی آبرگراف‌ها در طراحی و ارایه مدلی تحلیلی استفاده کنیم. در مدل مورد نظر، فرض بر این است که اطلاعات حاصل از مجموعه‌ای از داده‌های مرتبط با تعاملات بین عوامل و اجزای یک شبکه دارای ویژگی‌های خاصی باشد که این ویژگی‌ها قابل یادگیری بوده و بتوان با استفاده از آنها به اطلاعات تکمیلی دیگری درباره تعاملات بین عوامل شبکه دست یافت. برای این منظور، یک آبرگراف را با نماد  $H_{\Theta}^{p/c}$  (و ماتریس وقوع متناظرش را با نماد  $I_{\Theta}^{p/c}$ ) نمایش می‌دهیم؛ در این نمادگذاری، اندیس بالایی  $p$  به معنی آبرگرافی جزئی<sup>۴۰</sup> و اندیس بالایی  $c$  نمایانگر آبرگرافی کامل<sup>۴۱</sup> می‌باشد. همچنین، اندیس پایینی  $\Theta \in \{t, l, g, u\}$  بیانگر نوع فراداده مورد استفاده در ساختن آبرگراف شبکه می‌باشد: که  $t$  برای تگ‌ها<sup>۴۲</sup>،  $l$  برای لیبل‌ها/تیکت‌ها<sup>۴۳</sup>،  $g$  برای گروه‌ها و  $u$  برای کاربران/یوزرها<sup>۴۴</sup> به‌کار برده می‌شود. ورودی‌های مدل عبارتند از:

الف) آبرگراف کامل  $H_{\Theta}^c$  از عوامل و اجزاء یک شبکه اجتماعی که توسط نوع مشخصی از فراداده ساخته شده است.

ب) آبرگراف جزئی  $H_{\Theta}^p$

از همان مجموعه از عوامل و اجزاء شبکه که توسط فراداده مورد نظر در مساله ساخته شده است. جهت بهره بردن مؤثر از تکنیک یادگیری عمیق هندسی در مدل پیشنهادی این مقاله، سه فاز زیر را در نظر می‌گیریم:

- (۱) ساخت و طراحی مدل از طریق فرمول‌بندی آن به عنوان یک مساله تکمیل ماتریس تجزیه شده؛ (ii)
- (۲) استخراج و شناسایی ویژگی‌های ارتباطی و تعاملی بین عوامل و اجزاء شبکه بوسیله تکنیک یادگیری عمیق هندسی؛
- (۳) به‌روزر کردن آبرگراف جزئی با پیش‌بینی آبريال‌های موجود در ساختار شبکه (که در آبرگراف جزئی موجود نبوده‌اند).

<sup>28</sup>Bronstein <sup>29</sup>manifold <sup>30</sup>Scarselli <sup>31</sup>graph neural network (GNN) <sup>32</sup>recurrent neural network <sup>33</sup>random walk model <sup>34</sup>convolution neural network <sup>35</sup>spectral domain <sup>36</sup>convolutional layer <sup>37</sup>learnable spectral filter <sup>38</sup>rectified linear unit (ReLU) <sup>39</sup>graph convolution network (GCN) <sup>40</sup>partial <sup>41</sup>complete <sup>42</sup>tags <sup>43</sup>labels <sup>44</sup>users

در واقع، هدف این مدل استخراج اطلاعات مربوط به روابط و تعاملات بین عوامل شبکه با بررسی همزمان آبرگراف‌های  $H_{\Theta}^c$  و  $H_{\Theta}^p$  می‌باشد. به این ترتیب، با استفاده از این مدل، می‌توانیم آبريال‌های گمشده در  $H_{\Theta}^p$  را با بررسی اطلاعات مربوط به روابط و تعاملات نمایش داده شده در آبرگراف کامل  $H_{\Theta}^c$  پیش‌بینی و شناسایی کنیم. در حقیقت، طراحی و ارایه این مدل بر پایه پژوهش‌های انجام شده روی شبکه‌های پیچشی گراف‌های چندگانه استوار است (به عنوان نمونه‌ای از این دست پژوهش‌ها، مرجع [۲۲] را ببینید). در این مدل از فرمول‌بندی شبکه‌های پیچشی گرافی (GCN) و نوع ویژه‌ای از چندجمله‌ای‌های چیشیف<sup>۴۵</sup> (که در مرجع [۹] معرفی شده است)، به منظور ساده کردن رابطه (۵) مربوط به لایه‌های شبکه پیچشی گراف‌های چندگانه، استفاده می‌کنیم. علت اصلی به منظور مفهوم شبکه‌های پیچشی روی گراف‌های چندگانه این است که می‌توان تبدیل فوریه<sup>۴۶</sup> یک سیگنال دو بعدی را با به منظور یک تبدیل فوریه یک بعدی روی بردارهای سطری و ستونی ماتریس به شیوه‌ای ساده‌تر مورد بررسی قرار داد. به ویژه اینکه، با به منظور مفهوم پیچشی روی گراف‌های چندگانه می‌توانیم مدل را به وسیله فرمول‌بندی یک مساله تکمیل ماتریس طراحی کرده و با بررسی بردارهای سطری و ستونی یک ماتریس به اطلاعات مربوط به روابط و تعاملات موجود در شبکه دسترسی پیدا کنیم. در واقع، در این مدل، با در نظر گرفتن ماتریس‌های وقوع  $I_{\Theta}^p$  و  $I_{\Theta}^c$  و پشته کردن/چیدمان لایه‌های شبکه عصبی پیچشی گراف چندگانه (به صورت زیر) می‌توانیم به اطلاعات مورد نظر در مورد شبکه اجتماعی مورد مطالعه دست پیدا کنیم:

$$(6) \quad X'_t = \sum_{j=0}^q \Phi_j T_j(\Delta_r) X_t$$

که در آن  $\Phi_j$  ها ضرایب فیلتری قابل یادگیری هستند،  $\Delta_r^{n \times n}$  لاپلاسین آبرگراف سطری بوده و  $T_j$  نمایش فیلترها با استفاده از چندجمله ای‌های چیشیف می‌باشد. به این صورت، با استفاده از یک شبکه عصبی پیچشی گراف چندگانه روی  $X_t^{n \times q}$  می‌توانیم خروجی  $k$  - بعدی  $X_t^{m \times q \times k}$  را تولید کنیم.

امتیاز دیگر این مدل نسبت به مدل‌های مشابه این است که از طریق آن می‌توانیم با استفاده از عملگر لاپلاسین برای گد کردن اطلاعات حاصل از داده‌های تعریف شده روی آبرگراف  $H_{\Theta}^c$  استفاده کنیم. کارایی تحلیلی ماتریس لاپلاسین یک آبرگراف در موارد زیر به اثبات رسیده است: یادگیری و شناسایی کلیه روابط و تعاملات (دو یا چندجانبه) موجود در یک شبکه اجتماعی [۱] و [۲۷]؛ خوشه‌سازی طیفی<sup>۴۷</sup> یال‌ها (در مرجع [۲۹])؛ و اندازه‌گیری میزان ارتباط بین عوامل و اجزاء شبکه [۶]. در این مقاله، شکل ثرمال شده ماتریس لاپلاسین آبرگراف را که به صورت زیر تعریف می‌شود به کار می‌بریم:

$$(7) \quad \Delta_r = \mathbb{I} - D_v^{-\frac{1}{2}} I_{\Theta}^c D_e^{-1} I_{\Theta}^{cT} D_v^{-\frac{1}{2}}$$

که در آن  $D_e$  و  $D_v$ ، به ترتیب، ماتریس‌های درجه‌های رأسی و یالی آبرگراف  $H_{\Theta}^c$  هستند،  $\mathbb{I}$  ماتریس همانی بوده و  $I_{\Theta}^{cT}$  ترانپوز ماتریس وقوع  $I_{\Theta}^c$  می‌باشد (مرجع [۲۹] را ببینید). از کنار هم قرار دادن معادلات (۶) و (۷) و با در نظر گرفتن شبکه عصبی پیچشی عمیق به کار گرفته شده در این مدل، می‌توان کلیه روابط و تعاملات (دو یا چندجانبه) موجود در شبکه‌های اجتماعی را شناسایی و میزان قوام این روابط و تعاملات را اندازه‌گیری کرده و لذا ساختار درونی شبکه‌ها و ارتباطات بین زیرگروه‌ها/ زیربخش‌های موجود در شبکه‌های اجتماعی را کشف کرد.

#### ۴. تشکر و قدردانی

نویسنده مقاله در طی انجام این پژوهش از حمایت مالی پژوهشکده ریاضیات در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، IPM، (با شماره طرح پژوهشی: ۱۴۰۵۱۰۰۲۵) بهره برده است.

<sup>45</sup>Chebyshev polynomial <sup>46</sup>Fourier transform <sup>47</sup>Spectral clustering

## مراجع

- [1] S. Agarwal, K. Branson, and S. Belongie, Higher order learning with graphs, In *Proceedings of the 23rd International Conference on Machine Learning*, ACM (2006) 17–24.
- [2] K. Benzi, V. Kalofolias, X. Bresson, and P. Vandergheynst, Song recommendation with non-negative matrix factorization and graph total variation, In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, IEEE, (2016) 2439–2443.
- [3] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland mathematical library, Elsevier, **6** 1973.
- [4] M. M. Bronstein, J. Bruna, Y. LeCun, A. Szlam, and P. Vandergheynst, Geometric deep learning: going beyond euclidean data, *IEEE Signal Processing Magazine*, **34** (2017) 18–42.
- [5] J. Bruna, W. Zaremba, A. Szlam, and Y. Lecun, Spectral networks and locally connected networks on graphs, *International Conference on Learning Representations (ICLR2014)*, CBLS, (2014).
- [6] J. Bu, S. Tan, C. Chen, C. Wang, H. Wu, L. Zhang, and X. He, Music recommendation by unified hypergraph: combining social media information and music content, *Proceedings of the 18th ACM international conference on Multimedia*, ACM, (2010) 391–400.
- [7] E. J. Candes and Y. Plan, Matrix completion with noise, *Proc. IEEE*, **98** (2010) 925–936.
- [8] J. Chen, H. Gao, Z. Wu, and D. Li, Tag co-occurrence relationship prediction in heterogeneous information networks, Parallel and Distributed Systems (ICPADS), *International Conference on IEEE*, (2013) 528–533.
- [9] M. Defferrard, X. Bresson, and P. Vandergheynst, Convolutional neural networks on graphs with fast localized spectral filtering, *Advances in Neural Information Processing Systems*, (2016) 3844–3852.
- [10] D. K. Duvenaud, D. Maclaurin, J. Iparraguirre, R. Bombarell, T. Hirzel, A. Aspuru-Guzik, and R. P. Adams, Convolutional networks on graphs for learning molecular fingerprints, *Advances in Neural Information Processing Systems*, (2015) 2224–2232.
- [11] M. Gori, G. Monfardini, and F. Scarselli, A new model for learning in graph domains, *IJCNN'05*, **2** (2005) 729–734.
- [12] M. Henaff, J. Bruna, and Y. LeCun, Deep convolutional networks on graphstructured data, (2015) Preprint at arXiv:1506.05163.
- [13] J. Johnson, L. Ballan, and L. Fei-Fei, Love thy neighbors: Image annotation by exploiting image metadata, *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, (2015) 4624–4632.
- [14] V. Kalofolias, X. Bresson, M. Bronstein, and P. Vandergheynst, Matrix completion on graphs, (2014), arXiv:1408.1717.
- [15] T. N. Kipf and M. Welling, Semi-supervised classification with graph convolutional networks, (2016), arXiv:1609.02907
- [16] A. Krizhevsky, I. Sutskever, and G. E. Hinton, Imagenet classification with deep convolutional neural networks, *Advances in Neural Information Processing Systems*, (2012) 1097–1105.
- [17] D. Li, Z. Xu, S. Li, and X. Sun, Link prediction in social networks based on hypergraph, *Proceedings of the 22nd International Conference on World Wide Web*, ACM, (2013) 41–42.
- [18] D. Liu, N. Blenn, and P. Van Mieghem, A social network model exhibiting tunable overlapping community structure, *Procedia Computer Science*, **9** (2012) 1400–1409.
- [19] Y.-F. Liu, J.-M. Guo, and An. Lingling, Multimedia Classification Using Bipolar Relation Graphs, *IEEE Transactions on Multimedia*, **19** (2017) 1860–1869.
- [20] J. McAuley and J. Leskovec, Image labeling on a network: using socialnetwork metadata for image classification, *Computer Vision–ECCV*, **2012** (2012) 828–841.
- [21] A. Mislove, M. Marcon, K. P. Gummadi, P. Druschel, and B. Bhattacharjee, Measurement and analysis of online social networks, *Proceedings of the 7th ACM SIGCOMM Conference on Internet Measurement*, ACM (2007) 29–42.
- [22] F. Monti, M. Bronstein, and X. Bresson, Geometric matrix completion with recurrent multi-graph neural networks, *Advances in Neural Information Processing Systems*, (2017) 3700–3710.

- [23] A. A. Moreira, D. R. Paula, R. N. Costa Filho, and J. S. Jr. Andrade, Competitive cluster growth in complex networks, *Physical Review E*, **73** (2006) 065101.
- [24] Z. Niu, G. Hua, X. Gao, and Q. Tian, Semi-supervised relational topic model for weakly annotated image recognition in social media, *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, (2014) 4233–4240.
- [25] N. Rao, H. F. Yu, P. K. Ravikumar and, I. S. Dhillon, Collaborative filtering with graph information: Consistency and scalable methods, *Advances in neural information processing systems*, (2015) 2107–2115.
- [26] E. Ravasz and Barabási, A.L., Hierarchical organization in complex networks, *Physical Review E* **67**(2) (2003) 026112.
- [27] L. Sun, S. Ji, and J. Ye, Hypergraph spectral learning for multi-label classification, *Proceedings of the 14th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, ACM (2008) 668–676.
- [28] M. M. Wolf, A. M. Klinvex and D. M. Dunlavy, Advantages to modeling relational data using hypergraphs versus graphs, *HPEC, IEEE* (2016) 1–7.
- [29] D. Zhou, J. Huang, and B. Schölkopf, Learning with hypergraphs: Clustering, classification and embedding, *Advances in Neural Information Processing Systems*, (2007) 1601–1608.

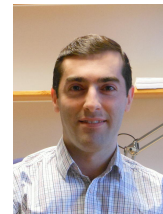
#### مهدی خواجه صالحانی

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، صندوق پستی: ۶۴۵۵-۱۴۱۵۵، تهران، ایران.

salehani@ut.ac.ir

پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM)، صندوق پستی: ۵۷۴۶-۱۹۳۹۵، تهران، ایران.

نویسنده مقاله دارنده مدرک دکتری تخصصی (PhD) در رشته ریاضی از دانشگاه علوم و تکنولوژی نروژ (NTNU) بوده و هم‌اکنون از اعضای هیات علمی دانشگاه تهران می‌باشد. هندسه دیفرانسیل و مطالعه سیستم‌های دینامیکی (گسسته و پیوسته) با رویکرد هندسی-آنالیزی از جمله علایق اصلی پژوهشی نویسنده می‌باشد. نویسنده مقاله اوقات فراغت را غالباً با خانواده، طبیعت‌گردی و یا با مطالعه منابعی که به پیدایش و شکل‌گیری گرایش‌های (کاملاً نظری و کلاسیک و یا میان-رشته‌ای و نوین) علوم مختلف می‌پردازند، می‌گذراند.



# A Study of Mathematical Structures in the Modeling of Social Systems: Social Networks Analysis

Mahdi Khajeh Salehani

**Abstract:** To analyze and investigate the structure of a social network and to consider the existing interactions within the network – just based on the interacting information among individuals and elements of the network – besides a suitable method for data visualization (which is the hyper-graph representation in the present paper) we require a precise and reliable model as well. In order to design and construct such a desirable model, we employ a deep learning technique on graphs and make use of a convolutional neural network for the associated hyper-graphs based on the same concepts on multi-graphs. The given framework and model of this paper can be used to represent the scale-free characteristics of a social network, and be extended for analyzing any social network and studying its mathematical structure.

**Keywords:** Social network; Mathematical structure; Convolutional neural network.

**Mahdi Khajeh Salehani**

School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, P.O. Box: 14155-6455, Tehran, Iran.

Email: salehani@ut.ac.ir

School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box: 19395-5746, Tehran, Iran.

---

Communicated by Saeid Maghsoudi.

Article Type: Research Paper.

Received: 2021/08/03, Accepted: 2021/10/22.