

توسیع و کاربرد H_v - گروه‌ها در مدل‌بندی برهم‌کنش برخی کاتیون‌ها

سهراب استادهادی دهکردی* و بیژن دواز

چکیده. در این مقاله، تعمیمی از H_v - گروه‌ها، آبرگروه‌های مارتی، و گروه‌ها به اسم $\Gamma - H_v$ - گروه‌ها را معرفی می‌کنیم. با استفاده از رابطه منظم قوی به هر $\Gamma - H_v$ - گروه، گروهی متناظر می‌کنیم و ثابت می‌کنیم عملگری همورد بین رسته $\Gamma - H_v$ - گروه‌ها با مورفیس‌های پوشا و رسته گروه‌ها وجود دارد و این عملگر همورد هر دنباله دقیق را به دنباله دقیق تصویر می‌کند. در پایان نیز با استفاده از پتانسیل استاندارد سلول، برهم‌کنش کاتیون‌های قلع، کبالت، و آهن را بررسی و در قالب H_v - گروه‌ها مدل‌بندی و ثابت می‌کنیم که H_v - گروه‌های به‌دست آمده یکرخت‌اند.

۱. مقدمه

مفهوم آبرگروه‌ها را که تعمیمی از گروه‌ها است مارتی^۱ در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنگره ریاضی دانان اسکندیناوی معرفی کرد [۱۹]. او از ابرعمل به منظور معرفی این مفهوم استفاده کرد و در ادامه آبرگروه‌ها را در زمینه‌های گوناگونی نظیر توابع جبری، گروه‌های ناآبلی، و توابع گویا به کار برد. بعدها، انواع آبرگروه‌ها نظیر آبرگروه‌های منظم، آبرگروه‌های منظم برگشت‌پذیر، آبرگروه‌های کانونی، آبرگروه‌های دوری معرفی و مطالعه شدند. همچنین انواع گوناگونِ همریختی‌ها و زیرآبرگروه‌های بسته، معکوس‌پذیر، فوق بسته و مزدوج‌پذیر نیز معرفی و بررسی شدند. اولین کتاب در زمینه آبرگروه‌ها را کورسینی^۲ در سال ۱۹۹۳ منتشر کرد [۳]. یک سال بعد از انتشار کتاب کورسینی، وجیوکلِس^۳ کتابی با عنوان «آبرساختارها و نمایش‌های آن‌ها» منتشر کرد [۲۲]. کورسینی و لئوناریو^۴ نیز با توجه به اهمیت و کاربرد نظریه آبرساختارهای جبری در علوم دیگر نظیر هندسه، گراف و آبرگراف، شبکه‌ها، مجموعه‌های فازی، و کدگذاری کتابی با عنوان «کاربردهای نظریه آبرساختارهای جبری» تالیف کردند [۴]. اهمیت کاربرد مفاهیم آبرساختارهای جبری باعث شده است محققانی از جمله دواز کتاب‌هایی در زمینه‌های پلی‌گروه‌ها، نیم‌آبرگروه‌ها، آبرساختارهای جبری فازی و H_v - ساختارها تالیف کنند [۵، ۶، ۷، ۸].

مفاهیم آبرساختارهای جبری در علوم مختلف کاربرد دارند که از آن جمله می‌توان به کاربرد در زمینه فیزیک هسته‌ای و فیزیک ذرات بنیادی اشاره کرد. موسوی‌نژاد و همکاران [۲۰] با استفاده از مفاهیم H_v - گروه‌ها به توصیف نظم

عبارت و کلمات کلیدی: $\Gamma - H_v$ - گروه‌ها، پتانسیل سلول، رابطه اساسی، قلب $\Gamma - H_v$ - گروه‌ها

دبیر تخصصی رابط: علیرضا عبدالمی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۶/۲۱

نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129723.1450>

موجود در گروهی از فرایندهای برهم‌کنشی از قبیل برهم‌کنش لیپتون‌ها در فیزیک ذرات بنیادی و همجوشی هسته‌ای پرداخته‌اند؛ همچنین نگاه کنید به [۲۳].

در زمینه کاربرد در زیست‌شناسی، می‌توان به [۱] اشاره کرد که در آن تاهان^۵ و همکاران به ارتباط بین آبرساختارهای جبری و علم وراثت پرداخته‌اند. لازم است متذکر شویم که آبرساختارهای جبری در زمینه‌های دیگری نیز کاربرد دارد؛ مثلاً [۱، ۲، ۱۰، ۱۱، ۱۲] را مطالعه کنید.

مفهوم H_v - گروه‌ها را وجیوکلایس در چهارمین کنگره آبرساختارهای جبری با استفاده از آبرعمل‌های شرکت‌پذیر ضعیف، معرفی کرد [۲۲]. ذکر این نکته لازم است که H_v - ساختارهای جبری تعمیمی از آبرساختارهای جبری نظیر آبرحلقه‌ها، آبرگروه‌ها، آبرمدول‌ها و غیره‌اند که در آن‌ها ویژگی‌هایی نظیر شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری با شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری ضعیف جایگزین شده است و در قالب برخی مفاهیم توسعه داده شده است [۱۵، ۲۱]. برای بررسی ویژگی‌های H_v - ساختارها، مطالعه کتاب [۹] تالیف دواز و وجیوکلایس مفید است. بعدها، Γ - آبرساختارهای جبری به‌صورت توسیعی از ساختارهای جبری کلاسیک و آبرساختارهای جبری معرفی و مطالعه شدند [۱۳، ۱۴، ۱۸].

در این مقاله، با استفاده از مفهوم α - آبرعمل، ساختار H_v - گروه را تعمیم می‌دهیم. در ساختارهای جبری کلاسیک و آبرساختارهای جبری به ترتیب از مفاهیم عمل و آبرعمل استفاده می‌شود، ولی در Γ - H_v - گروه‌ها از مجموعه‌ای آبرعمل‌های دوتایی استفاده می‌کنیم که هریک از آن‌ها از طریق خاصیت شرکت‌پذیری ضعیف با همدیگر در ارتباط‌اند و در ویژگی اصل تکثیر نیز صدق می‌کنند [۱۶، ۱۷]. با استفاده از رابطه منظم قوی به H_v - Γ - گروه گروهی نظیر می‌شود و به آن گروه اساسی می‌گوییم. ثابت می‌شود که هر همریختی پوشا بین دو H_v - Γ - گروه، بروریختی بین گروه‌های اساسی متناظر القاء می‌کند و با استفاده از این همریختی القاء شده، عملگری همورد بین رسته H_v - Γ - گروه‌ها با مورفیس‌های پوشا و رسته گروه‌ها معرفی و برخی از ویژگی‌های این عملگر همورد بررسی می‌شود. در پایان نیز از H_v - گروه‌ها در مدل‌بندی واکنش‌های بین کاتیون‌های قلع، کبالت و آهن استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که ساختارهای به‌دست آمده یکرخت‌اند.

۲. Γ - H_v - گروه‌ها و گروه اساسی

آبرساختارهای جبری توسیع مناسبی از ساختارهای جبری‌اند. برخلاف ساختارهای جبری کلاسیک که از اعمال دوتایی استفاده می‌کنند در آبرساختارهای جبری از آبرعمل استفاده می‌کنیم. به عبارت دقیق‌تر، منظور از آبرعمل دوتایی روی مجموعه ناتهی H ، تابع $P^*(H) \rightarrow H \times H$: $\circ$ است. مجموعه ناتهی H همراه با آبرعمل $\circ$ را آبرگروه‌وار گویند و به‌صورت $(H, \circ)$ نشان می‌دهند. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از آبرگروه‌وار $(H, \circ)$ باشد و تعریف کنید

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b, \quad \{x\} \circ A = x \circ A, \quad B \circ \{x\} = B \circ x.$$

مفهوم H_v - ساختارها را وجیوکلایس در چهارمین کنگره ای. ای. معرفی کرد و بعدها مفاهیم دیگری در این باره معرفی و مطالعه شد [۲۲].

تعریف ۱.۲. نیم‌آبرگروه‌وار $(H, \circ)$ را H_v - نیم‌گروه گویند، هرگاه برای هر x, y, z از H ،

$$(x \circ y) \circ z \cap x \circ (y \circ z) \neq \emptyset.$$

همچنین یک H_v - نیم‌آبرگروه را H_v - گروه گویند، هرگاه برای هر x از H ، $x \circ H = H \circ x = H$.

⁵Tahan

بدیهی است که هر گروه را می‌توان H_v -گروه در نظر گرفت؛ به عبارت دیگر H_v -گروه‌ها تعمیمی از گروه‌ها هستند.

مثال ۲.۲. فرض کنید G گروه و $\{A_g\}_{g \in G}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی و دوبه‌دو مجزا باشد. در این صورت $H = \bigcup_{g \in G} A_g$ ، با ابرعمل $\oplus : H \times H \rightarrow P^*(H)$ تشکیل H_v -گروه می‌دهد:

$$x_1 \oplus x_2 = A_{g_1 + g_2},$$

که در آن $x_1, x_2 \in H$ و $x_1 \in A_{g_1}, x_2 \in A_{g_2}$. این H_v -گروه را با H_G نمایش می‌دهیم. همچنین در صورتی که $(G, *)$ H_v -گروه باشد، H_G با ابرعمل $\otimes : H \times H \rightarrow P^*(H)$ تشکیل H_v -گروه می‌دهد:

$$x_1 \otimes x_2 = \bigcup_{g \in g_1 * g_2} A_g,$$

که در آن $x_1 \in A_{g_1}, x_2 \in A_{g_2}$.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $(G, *)$ و $(H, \circ)$ دو H_v -گروه باشند. تابع $\varphi : G \rightarrow H$ را همریختی گویند، هرگاه برای هر $x, y \in G$

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y).$$

هر همریختی یک‌به‌یک و پوشا را یکرختی گویند.

مثال ۴.۲. فرض کنید H_G ابرگروه مثال ۲.۲ باشد که در آن G یک H_v -گروه است. تابع $\varphi : H_G \rightarrow G$ با ضابطه $\varphi(x) = g$ ، که در آن $x \in A_g$ ، همریختی پوشا بین دو H_v -گروه G و H_G است.

تعریف ۵.۲. فرض کنید $(H, \circ)$ یک H_v -گروه و مجموعه $\mathcal{U}$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\mathcal{U} = \left\{ \prod_{i=1}^n x_i : x_i \in H, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

رابطه β به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(a, b) \in \beta \iff \exists u \in \mathcal{U}, \{a, b\} \subseteq u.$$

بستار انتقالی رابطه β را با β^* نشان می‌دهیم و به آن رابطه اساسی گوئیم.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $(H, \circ)$ یک H_v -گروه باشد و عضو $h \in H$ وجود داشته باشد به طوری که

$$H = h \circ h \circ \dots \circ h^n,$$

در این صورت H_v -گروه $(H, \circ)$ را دوری گویند.

مثال ۷.۲. فرض کنید $(G, +)$ گروه دوری باشد، در این صورت H_G یک H_v -گروه دوری است.

قضیه ۸.۲. [۵] فرض کنید β^* رابطه اساسی روی H_v -گروه $(H, \circ)$ باشد، در این صورت $H/\beta^* = \{\beta^*(x) : x \in H\}$ با عمل دوتایی

$$\beta^*(a) \otimes \beta^*(b) = \beta^*(c) \quad (c \in a \circ b)$$

گروه است.

قضیه ۹.۲. فرض کنید $(H, \circ)$ یک H_v -گروه دوری باشد، در این صورت گروه بنیادی H/β^* نیز دوری است.

اثبات. فرض کنید H یک H_v -گروه دوری باشد. بنابراین عضوی مثل $h \in H$ موجود است به طوری که

$$H = h^1 \circ h^2 \circ \dots \circ h^n.$$

لذا برای هر $x \in H$ ، نتیجه می‌گیریم

$$\beta^*(x) = \beta^*(t) \quad (t \in h \circ h^2 \circ \dots \circ h^n).$$

□

پس $\beta^*(h)$ مولدی برای گروه H/β^* است.

همان‌طور که در تعریف ۱.۲ اشاره شد، برای بیان مفهوم H_v -گروه $(H, \circ)$ ، فقط از یک ابرعمل $\circ : H \times H \rightarrow H$ استفاده می‌شود. در ادامه این ابرساختار جبری به‌گونه‌ای تعمیم داده می‌شود که در آن بیشتر از یک ابرعمل استفاده بشود.

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید H مجموعه‌ای ناتهی باشد و برای هر $\alpha \in \Gamma$ ابرعمل دوتایی $\oplus_\alpha : H \times H \rightarrow P^*(H)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\alpha, \beta \in \Gamma$ و $x, y, z \in H$ داشته باشیم

$$x \oplus_\alpha (y \oplus_\beta z) \cap (x \oplus_\alpha y) \oplus_\beta z \neq \emptyset.$$

به این ویژگی شرکت‌پذیری ضعیف گویند. همچنین

$$x \oplus_\alpha H = H \oplus_\alpha x = H.$$

به این ویژگی، اصل تکثیر می‌گوییم. در این صورت $(H, \oplus_\alpha)$ ، را Γ - H_v -گروه می‌گوییم.

لازم است توجه کنیم که هر H_v -گروه را می‌توان یک Γ - H_v -گروه در نظر گرفت. در ادامه ثابت می‌کنیم که گروهی متناظر با Γ - H_v وجود دارد.

مثال ۱۱.۲. فرض کنید $(G, \cdot)$ گروه و Γ زیرمجموعه ناتهی از آن باشد. رابطه هم‌ارزی σ را روی G در نظر بگیرد. در این صورت G با ابرعمل زیر Γ - H_v -گروه است

$$\sigma(x) \oplus_\alpha \sigma(y) = \{\sigma(z) : z \in \sigma(x) \cdot \alpha \cdot \sigma(y)\}.$$

تعریف ۱۲.۲. رابطه هم‌ارزی ρ را روی Γ - H_v -گروه $(H, \oplus_\alpha)$ در نظر بگیرید. در این صورت برای زیرمجموعه‌های ناتهی A و B از H ،

$$A \bar{\rho} B \iff \forall a \in A, b \in B, a \bar{\rho} b.$$

این رابطه هم‌ارزی روی Γ - H_v -گروه $(H, \oplus_\alpha)$ را منظم قوی از راست می‌گوییم، هرگاه

$$x \rho y \implies \forall z \in H, \alpha \in \Gamma, (x \oplus_\alpha z) \bar{\rho} (y \oplus_\alpha z).$$

به همین ترتیب رابطه منظم قوی از چپ نیز قابل تعریف است و یک رابطه را منظم می‌گوییم، هرگاه منظم قوی از چپ و راست باشد.

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید H یک $\Gamma-H_v$ -گروه باشد. رابطه اساسی β روی H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x\beta y \iff \exists n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in H, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Gamma, \{x, y\} \subseteq \bigoplus_{i=1}^n (x_i \oplus_{\alpha_i} x_{i+1}).$$

بستار انتقالی رابطه β را با β^* نشان می‌دهیم و به آن رابطه اساسی گوئیم.

قضیه ۱۴.۲. رابطه اساسی β^* ، منظم قوی است.

اثبات. با توجه به تعریف رابطه منظم قوی به‌دست می‌آید. $\square$

به کمک رابطه منظم قوی روی $\Gamma-H_v$ -گروه $(H_v, \oplus_\alpha)$ ، گروهی متناظر می‌کنیم که جزئیات آن در قضیه زیر ذکر شده است.

قضیه ۱۵.۲. فرض کنید ρ رابطه منظم قوی روی $\Gamma-H_v$ -گروه $(H, \oplus_\alpha)$ باشد و

$$M_H = \{[\rho(x), \alpha] : x \in M, \alpha \in \Gamma\},$$

در این صورت M_H همراه با عمل دوتایی زیر گروه است

$$[\rho(x_1), \alpha_1][\rho(x_2), \alpha_2] = [\rho(t), \alpha_2] \quad (t \in x_1 \oplus_{\alpha_1} x_2).$$

اثبات. دو عضو دلخواه $x_1 \oplus_{\alpha_1} x_2$ ، $t_1, t_2 \in x_1 \oplus_{\alpha_1} x_2$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه رابطه ρ منظم قوی است، لذا $[\rho(t_1), \alpha_2] = [\rho(t_2), \alpha_2]$ و $(x_1 \oplus_{\alpha_1} x_2) \bar{\rho} (x_1 \oplus_{\alpha_1} x_2)$. بنابراین رابطه دوتایی تعریف‌شده روی M_H عمل دوتایی است. ابتدا خوش‌تعریفی عمل دوتایی ذکرشده روی M_H بررسی می‌شود. فرض کنید

$$[\rho(x_1), \alpha_1] = [\rho(y_1), \beta_1], \quad [\rho(x_2), \alpha_2] = [\rho(y_2), \beta_2].$$

در این صورت برای هر $\rho(z)$ ، نتیجه می‌شود

$$\rho(x_1) \hat{\oplus}_{\alpha_1} \rho(z) = \rho(x_2) \hat{\oplus}_{\beta_1} \rho(z), \quad \rho(x_2) \hat{\oplus}_{\alpha_2} \rho(z) = \rho(y_2) \hat{\oplus}_{\beta_2} \rho(z).$$

بنابراین

$$\rho(x_1) \hat{\oplus}_{\alpha_1} (\rho(x_2) \hat{\oplus}_{\alpha_2} \rho(z)) = \rho(x_2) \hat{\oplus}_{\beta_1} (\rho(y_2) \hat{\oplus}_{\beta_2} \rho(z)).$$

پس

$$[\rho(x_1), \alpha_1][\rho(y_1), \beta_1] = [\rho(x_2), \alpha_2][\rho(y_2), \beta_2].$$

بررسی خاصیت شرکت‌پذیری عمل دوتایی معرفی‌شده روی M_H به راحتی به‌دست می‌آید. از طرفی طبق ویژگی اصل تکثیر در $\Gamma-H_v$ -گروه $(H, \oplus_\alpha)$ ، نتیجه می‌شود که برای هر

$$[\rho(a_i), \alpha_i], [\rho(b_i), \beta_i] \in M_H \quad (1 \leq i \leq 2)$$

معادله‌های زیر در M_H جواب‌اند

$$[\rho(a_1), \alpha_1][\rho(x), \alpha] = [\rho(b_1), \beta_1], \quad [\rho(b_1), \beta_1][\rho(y), \beta] = [\rho(b_2), \beta_2].$$

بنابراین M_H با عمل دوتایی معرفی‌شده، گروه است. $\square$

قضیه ۱۶.۲. فرض کنید $(G_1, \oplus_\alpha)$ و $(G_2, \odot_\alpha)$ ، $\Gamma-H_v$ - گروه باشد. در این صورت $G_1 \times G_2$ نیز با عمل زیر $\Gamma-H_v$ - گروه است

$$(x_1, x_2) \otimes_\alpha (y_1, y_2) = \{(t_1, t_2) : t_1 \in x_1 \oplus_\alpha y_1, t_2 \in x_2 \odot_\alpha y_2\}.$$

اثبات. واضح است که خاصیت شرکت پذیری ضعیف و اصل تکثیر برقرار است.

□

قضیه ۱۷.۲. فرض کنید G_1 و G_2 دو $\Gamma-H_v$ - گروه باشند. در این صورت

$$M_{(G_1 \times G_2)} \cong M_{G_1} \times M_{G_2}.$$

اثبات. فرض کنید β^* و β^*_2 به ترتیب روابط اساسی روی $G_1 \times G_2$ و G_1 و G_2 باشند. در این صورت ابتدا خوش تعریفی $\varphi : M_{(G_1 \times G_2)} \rightarrow M_{G_1} \times M_{G_2}$ را به صورت $\varphi([\beta^*(x_1, x_2), \alpha]) = [\beta^*_1(x_1), \alpha] \times [\beta^*_2(x_2), \alpha]$ در نظر بگیرید. فرض کنیم $[\beta^*(x_1, x_2), \alpha_1] = [\beta^*(y_1, y_2), \alpha_2]$. در این صورت برای هر $\beta^*(z_1, z_2)$ نتیجه می شود

$$\beta^*(x_1, x_2) \otimes_{\alpha_1} \beta^*(z_1, z_2) = \beta^*(y_1, y_2) \otimes_{\alpha_2} \beta^*(z_1, z_2),$$

پس برای هر $\beta^*(z_1), \beta^*(z_2)$ داریم

$$\beta^*(x_1) \oplus_{\alpha_1} \beta^*(z_1) = \beta^*(y_1) \oplus_{\alpha_2} \beta^*(z_1), \quad \beta^*(x_2) \oplus_{\alpha_1} \beta^*(z_2) = \beta^*(y_2) \oplus_{\alpha_2} \beta^*(z_2).$$

بنابراین $[\beta^*(x_1), \alpha_1] = [\beta^*(y_1), \alpha_2]$ و $[\beta^*(x_2), \alpha_2] = [\beta^*(y_2), \alpha_2]$ و در نتیجه تابع φ خوش تعریف است. یکرختی φ نیز به راحتی به دست می آید.

□

هر همریختی پوشا بین دو $\Gamma-H_v$ - گروه، بروریختی بین گروه های متناظر القاء می کند که در قضیه ۱۸.۲ بیان شده است. همچنین به کمک این بروریختی، عملگری همورد بین رسته $\Gamma-H_v$ - گروه ها با مورفیس های پوشا و رسته گروه ها با بروریختی ها وجود دارد که در قضیه ۲۱.۲ بیان شده است.

قضیه ۱۸.۲. فرض کنید H_1 و H_2 دو $\Gamma-H_v$ - گروه $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ همریختی پوشا باشد. در این صورت همریختی پوشا $\hat{\varphi} : M_{H_1} \rightarrow M_{H_2}$ القاء می شود.

اثبات. فرض کنید $H_1 \rightarrow H_2$ ، φ ، همریختی باشد. در این صورت $\hat{\varphi} : M_{H_1} \rightarrow M_{H_2}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{\varphi}([\beta^*(x), \alpha]) = [\beta^*(\varphi(x)), \alpha].$$

ابتدا خوش تعریفی $\hat{\varphi}$ را به صورت زیر بررسی می کنیم. فرض کنید $[\beta^*(x_1), \alpha_1] = [\beta^*(x_2), \alpha_2]$. در این صورت

$$\forall \beta^*(z), \beta^*(x_1) \oplus_{\alpha_1} \beta^*(z) = \beta^*(x_2) \oplus_{\alpha_2} \beta^*(z) \implies (\exists t_1 \in x_1 \oplus_{\alpha_1} z, t_2 \in x_2 \oplus_{\alpha_2} z) \beta^*(t_1) = \beta^*(t_2).$$

لذا $z_1, z_2, \dots, z_m \in H$ موجود است که $z_1 = t_1, z_m = t_2$ و برای هر $1 \leq i \leq m-1$ ، $z_i \beta z_{i+1}$. بنابراین

$$\{z_i, z_{i+1}\} \subseteq \bigoplus_{j=1}^{k_i} w_i \oplus_{\gamma_i} w_{i+1},$$

که در آن $\gamma_i \in \Gamma$ و $w_i \in H_1$. با توجه به آنکه φ همریختی است داریم

$$\{\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})\} \subseteq \varphi \left(\bigoplus_{j=1}^{k_i} w_i \oplus_{\gamma_i} w_{i+1} \right) = \bigoplus_{j=1}^{k_i} \varphi(w_i) \oplus_{\gamma_i} \varphi(w_{i+1}).$$

لذا $\beta^*(\varphi(t_1)) = \beta^*(\varphi(t_2))$. از طرفی $\varphi(t_1) \in \varphi(x_1) \oplus_{\alpha_1} \varphi(z)$ و $\varphi(t_2) \in \varphi(x_2) \oplus_{\alpha_2} \varphi(z)$. پس برای هر $\varphi(z) \in H_2$ نتیجه می‌شود

$$\beta^*(\varphi(x_1)) \oplus_{\alpha_1} \beta^*(\varphi(z)) = \beta^*(\varphi(x_2)) \oplus_{\alpha_2} \beta^*(\varphi(z)).$$

پس $[\beta^*(\varphi(x_1)), \alpha_1] = [\beta^*(\varphi(x_2)), \alpha_2]$ و بنابراین $\hat{\varphi}$ خوش‌تعریف است. از طرفی برای بررسی ویژگی همریختی $\hat{\varphi}$ ، فرض کنید $[\beta^*(x_1), \alpha_1], [\beta^*(x_2), \alpha_2] \in M_{H_1}$. در این صورت

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}([\beta^*(x_1), \alpha_1][\beta^*(x_2), \alpha_2]) &= \hat{\varphi}([\beta^*(t), \alpha_2], t \in x_1 \oplus_{\alpha_1} x_2 \\ &= [\beta^*(\varphi(t)), \alpha_2], \varphi(t) \in \varphi(x_1) \oplus_{\alpha_1} \varphi(x_2) \\ &= [\beta^*(\varphi(x_1)), \alpha_1][\beta^*(\varphi(x_2)), \alpha_2] \\ &= \hat{\varphi}([\beta^*(x_1), \alpha_1])\hat{\varphi}([\beta^*(x_2), \alpha_2]). \end{aligned}$$

□

واضح است که همریختی $\hat{\varphi}$ پوشا است.

تعریف ۱۹.۲. رسته‌ای مانند $\mathcal{C}$ خانواده‌ای متشکل از اشیاء با ویژگی‌های زیر است

(۱) به ازای هر دوشیء مانند A, B مجموعه‌ای نظیر می‌شود که با $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ نشان داده می‌شود و دارای این خاصیت است که برای هر چهار شیء مانند A, B, C, D با شرط $A \neq C$ یا $B \neq D$ ،

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset.$$

(۲) به ازای هر سه شیء A, B و C تابع

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \quad (g, f) \longmapsto gf,$$

موجود است به طوری که به ازای هر چهار شیء A, B, C, D ، اگر $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ، $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ و $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ ، آنگاه

$$h(gf) = (hg)f.$$

همچنین به ازای هر شیء A ، عضوی از $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ ، مانند I_A موجود است که به ازای هر عضو از $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ مانند f و هر عضو از $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ مانند g ،

$$fI_A = f, \quad I_Ag = g.$$

تعریف ۲۰.۲. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. عملگر همورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ زوجی متشکل از دو تابع است، یعنی به هر شیء از $\mathcal{C}$ مانند A ، شیء $F(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد و برای هر مورفیزم از رسته $\mathcal{C}$ مانند $f : A \longrightarrow B$ مورفیزم $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ وجود دارد، با این ویژگی که

$$(۱) \quad F(I_A) = I_{F(A)}, \quad A \text{ مانند } \mathcal{C} \text{ رسته}$$

$$(۲) \quad F(gf) = F(g)F(f), \quad g : B \longrightarrow C \text{ و } f : A \longrightarrow B \text{ مورفیزم}$$

قضیه ۲۱.۲. فرض کنید T تابعی از رسته $\Gamma - H_v$ گروه‌ها به رسته گروه‌ها باشد به طوری که $T(H) = M_H$ و برای همریختی پوشای $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ تابع $T(\varphi) : M_{H_1} \rightarrow M_{H_2}$ را با شرط $T(\varphi) = \widehat{\varphi}$ در نظر بگیرید. در این صورت T عملگری همورد بین این دو رسته است.

اثبات. با توجه به قضیه ۱۸.۲ نتیجه می‌شود که این عملگر خوش‌تعریف است و برای هر شیء H از رسته $H_v - \Gamma$ گروه‌ها، M_H شیء از رسته گروه‌ها خواهد بود. فرض کنید $\varphi_1 : H_1 \rightarrow H_2$ و $\varphi_2 : H_2 \rightarrow H_3$ ، همریختی پوشا باشد. در این صورت برای هر $[\beta^*(x_1), \alpha] \in M_{H_1}$ ، نتیجه می‌گیریم

$$T(\varphi_2 \varphi_1)([\beta^*(x_1), \alpha]) = \widehat{\varphi_2 \varphi_1}([\beta^*(x_1), \alpha]) = [\beta^*(\varphi_2(\varphi_1(x_1))), \alpha] = T(\varphi_2)T(\varphi_1)([\beta^*(x_1), \alpha]).$$

همچنین برای هر $\Gamma - H_v$ گروه H و همریختی همانی $I_H : H \rightarrow H$ نتیجه می‌شود

$$T(I_H)([\beta^*(x), \alpha]) = [\beta^*(I(x)), \alpha] = [\beta^*(x), \alpha],$$

که در آن $[\beta^*(x), \alpha] \in M_H$ لذا $T(I_H) = I_{T(A)}$. $\square$

با استفاده از مفهوم رابطه اساسی ذکر شده در تعریف ۱۳.۲ قلب یک $\Gamma - H_v$ گروه در تعریف ۲۲.۲ آمده است و در قضیه ۲۴.۲ ثابت می‌شود که قلب هر $\Gamma - H_v$ گروه یک $\Gamma - H_v$ زیرگروه است. لازم است توجه داشته باشیم که این مفاهیم به منظور به دست آوردن شرط لازم و کافی برای یک‌به‌یک بودن همریختی القایی معرفی شده در قضیه ۲۶.۲ مطرح شده‌اند.

تعریف ۲۲.۲. فرض کنید β^* رابطه اساسی روی $\Gamma - H_v$ گروه H باشد. در این صورت قلب این $\Gamma - H_v$ گروه با ω_H نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega_H = \{x \in H : \forall \alpha \in \Gamma, \pi_\alpha(x) = \circ_{M_H}\},$$

که در آن $\pi_\alpha : H \rightarrow M_H$ و با ضابطه $\pi_\alpha(x) = [\beta^*(x), \alpha]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲۳.۲. فرض کنید H_1 و H_2 ، $\Gamma - H_v$ گروه باشد و همریختی $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ را در نظر بگیرید. هسته این همریختی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\ker \varphi = \{x \in H_1 : \varphi(x) \in \omega_{H_2}\}.$$

قضیه ۲۴.۲. همریختی $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\ker \varphi$ ، $\Gamma - H_v$ زیرگروهی از H_1 است.

اثبات. فرض کنید $x_1, x_2 \in \ker \varphi$ و $\beta \in \Gamma$. در این صورت $\varphi(x_1), \varphi(x_2) \in \omega_{H_2}$ لذا

$$\forall \alpha \in \Gamma, \pi_\alpha(\varphi(x_1)) = \pi_\alpha(\varphi(x_2)) = \circ_{M_{H_2}}.$$

بنابراین

$$[\beta^*(\varphi(x_1)), \alpha][\beta^*(\varphi(x_2)), \alpha] = [\beta^*(b), \alpha] \quad (b \in \varphi(x_1) \oplus_\alpha \varphi(x_2) = \varphi(x_1 \oplus_\alpha x_2)).$$

پس برای هر $b \in \varphi(x_1) \oplus_\alpha \varphi(x_2)$ ، نتیجه می‌شود $[\beta^*(b), \alpha] = \circ_{M_{H_2}}$. لذا $\ker \varphi$ یک $\Gamma - H_v$ زیرگروه از H_1 است. $\square$

قضیه ۲۵.۲. فرض کنید $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ همریختی باشد. در این صورت $\varphi(\omega_{H_1}) \subseteq \omega_{H_2}$.

اثبات. فرض کنید $x \in \omega_{H_1}$ ، در این صورت برای هر $\alpha \in \Gamma$ ، $\pi_\alpha(x) = \circ_{M_{H_1}}$ ، بنابراین $[\beta^*(x), \alpha] = \circ_{M_{H_1}}$.
همریختی $\hat{\varphi}: M_{H_1} \rightarrow M_{H_2}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\hat{\varphi}([\beta^*(x), \alpha]) = [\beta^*(\varphi(x)), \alpha] = \hat{\varphi}(\circ_{M_{H_1}}) = \circ_{M_{H_2}}.$$

□

بنابراین $\varphi(x) \in \omega_{H_2}$ که نتیجه می‌دهد $\varphi(\omega_{H_1}) \subseteq \omega_{H_2}$.

قضیه ۲۶.۲. فرض کنید $\varphi: H_1 \rightarrow H_2$ همریختی باشد. در این صورت $\hat{\varphi}: M_{H_1} \rightarrow M_{H_2}$ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $\ker \varphi = \omega_{H_1}$.

اثبات. فرض کنید $\hat{\varphi}$ یک‌به‌یک است و $x \in \ker \varphi$ ، در این صورت $\varphi(x) \in \omega_{H_2}$. پس عضوی مثل $\alpha \in \Gamma$ موجود است به طوری که $\pi_\alpha(\varphi(x)) = [\beta^*(\varphi(x)), \alpha] = \circ_{M_{H_2}}$. بنابراین $\hat{\varphi}([\beta^*(x), \alpha]) = \circ_{M_{H_2}}$. با توجه به اینکه $\hat{\varphi}$ یک‌به‌یک است، نتیجه می‌شود که $[\beta^*(x), \alpha] = \circ_{M_{H_1}}$. پس $\pi_\alpha(x) = \circ_{M_{H_1}}$ و $x \in \omega_{H_1}$. لذا $\ker \varphi \subseteq \omega_{H_1}$. فرض کنید $x \in \omega_{H_1}$. قضیه ۲۵.۲ ایجاب می‌کند که $\varphi(x) \in \omega_{H_2}$ و نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

برعکس، فرض کنید $\ker \varphi = \omega_{H_1}$. ثابت می‌کنیم که همریختی $\hat{\varphi}: M_{H_1} \rightarrow M_{H_2}$ یک‌به‌یک است. فرض کنید $[\beta^*(x), \alpha] \in \ker \hat{\varphi}$. در این صورت $\hat{\varphi}([\beta^*(x), \alpha]) = \circ_{M_{H_2}}$ و $[\beta^*(\varphi(x)), \alpha] = \circ_{M_{H_2}}$. از طرفی $\hat{\varphi} \circ \pi_\alpha = \pi'_\alpha \circ \varphi$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}([\beta^*(x), \alpha]) = \circ_{M_{H_2}} &\implies (\hat{\varphi} \circ \pi_\alpha)(x) = \circ_{M_{H_2}} \implies (\pi'_\alpha \circ \varphi)(x) = \circ_{M_{H_2}} \\ &\implies \varphi(x) \in \ker \pi'_\alpha = \omega_{H_2} \\ &\implies x \in \omega_{H_1} \\ &\implies \beta^*(x) = \circ_{H_1/\beta^*} \\ &\implies [\beta^*(x), \alpha] = \circ_{M_{H_1}}. \end{aligned}$$

□

بنابراین هسته همریختی $\hat{\varphi}$ فقط شامل عضو صفر گروه M_{H_1} است و لذا $\hat{\varphi}$ یک‌به‌یک است.

تعریف ۲۷.۲. ابرگراف، زوج $\Gamma = (H, E)$ است که در آن H مجموعه‌ای ناتهی از رئوس و $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی H است با این شرط که $H = \bigcup_{i=1}^m E_i$. هر عضو E را ی ابريال گویند. برای هر $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ، $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ هرگاه را مجاور گویند، هرگاه $E_i \cap E_j = \emptyset$.

فرض کنید $\Gamma = (H, E)$ ابرگراف باشد. ابرعمل زیر را روی مجموعه H به صورت زیر در نظر بگیرید

$$x \circ y = E(x) \cup E(y).$$

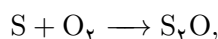
در این صورت $H_\Gamma = (H, \circ)$ را ابرگروه وار ابرگراف $\Gamma = (H, E)$ گویند، که در آن $E(x)$ و $E(y)$ به ترتیب ابريال‌های شامل رأس‌های x و y اند.

۳. ابرگروه و ابرگراف القائی توسط واکنش‌های اُکسایش و کاهش

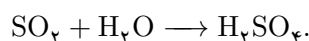
در این بخش، به کاربرد ابرساختار جبری H_v -گروه، برای مدل‌بندی برهم‌کنش‌های کاتیون‌های برخی عناصر استفاده شده است. به همین دلیل توضیح مختصری در مورد واکنش‌های اُکسایش و کاهش آورده شده است و به منظور بررسی انجام‌پذیری واکنش کاتیون‌ها نیز مختصراً پتانسیل استاندارد سلول بررسی شده است.

واکنش‌هایی را که موجب تغییر عدد اُکسایش اتم شوند، اُکسایش و کاهش گویند. این فرایند می‌تواند دربرگیرنده واکنش‌های ساده نظیر اُکسایش کربن و تبدیل آن به کربن دی‌اکسید و کاهش کربن و تبدیل آن به متان باشد یا ممکن

است شامل واکنش‌های پیچیده نظیر اکسایش قند در بدن انسان طی واکنش‌های چند مرحله‌ای باشد. در هر واکنش اکسایش و کاهش، اتم یا مولکولی الکترون از دست می‌دهد (اکسایش) و اتم یا مولکولی الکترون جذب می‌کند (کاهش). در واقع مولکول دهنده اتم اکسیدشده و مولکول گیرنده اتم کاهیده شده است. لازم است توجه کنیم که در ابتدا واکنش یک ماده با اکسیژن را اکسایش می‌گفتند و با کشف الکترون مفهوم دقیقی از اکسایش بیان شد و کلیه واکنش‌هایی را که طی آن اتم یا مولکولی الکترون از دست می‌داد، اکسایش نامیده می‌شد و این مطلب مستقل از وجود اکسیژن در آن واکنش بود. به عنوان مثال واکنش زیر را در نظر بگیرید



اکسایش اتم S از صفر به +۴ افزایش پیدا می‌کند و می‌گوییم گوگرد اکسید شده است و عدد اکسایش اتم O از صفر به -۲ کاهش پیدا کرده است و می‌گوییم اکسیژن کاهیده شده است. در طرف اول این واکنش عدد اکسیداسیون هر دو ماده صفر و در طرف دوم، عدد اکسیداسیون گوگرد در ترکیب +۴ و اکسیژن، -۲ است. اما در واکنش زیر اکسایش-کاهش انجام نمی‌شود، زیرا تغییری در عدد اکسایش هیچ‌یک از اتم‌ها به وجود نیامده است

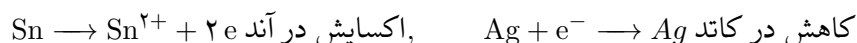


درباره تعریف اکسایش و کاهش تعاریف گوناگونی مطرح شده است:

- (۱) براساس مبادله اکسیژن: اگر عنصری اکسیژن بگیرد، اکسایش یافته یا اکسید شده و اگر اکسیژن از دست بدهد کاهش یافته یا کاهیده شده یا احیا شده است.
- (۲) براساس مبادله هیدروژن: اگر عنصری هیدروژن از دست بدهد اکسایش یافته یا اکسید شده و اگر هیدروژن بگیرد کاهش یافته یا کاهیده شده یا احیا شده است.
- (۳) براساس مبادله الکترون: اگر عنصری الکترون از دست بدهد، اکسایش یافته یا اکسید شده و اگر الکترون بگیرد کاهش یافته یا کاهیده شده یا احیا شده است.
- (۴) براساس عدد اکسایش: این تعریف امروزی از دیگر تعاریف جامع‌تر و کامل‌تر و از این قرار است که اگر عدد اکسایش عنصری افزایش یابد، اکسایش یافته یا اکسید شده و اگر عدد اکسایش عنصری کاهش یابد، آن عنصر کاهش یافته یا کاهیده شده یا احیا شده است.

در الکتروشیمی برای بررسی عملکرد یک سلول، باید دو نیم‌سلول بررسی شوند. از جدول پتانسیل استاندارد کاهش می‌توان برای تعیین واکنش‌های اکسایش و کاهش و همچنین پتانسیل استاندارد سلول استفاده کرد و نیازی به ساخت سلول و انجام آزمایش نیست. براساس این جدول، نیم‌سلولی که پتانسیل کاهش بالاتری داشته باشد، در سلول، کاهش پیدا می‌کند. به همین ترتیب، سلول با پتانسیل کاهش کمتر نیز دچار اکسایش می‌شود. در صورتی که این شرایط برقرار باشد، مقدار پتانسیل سلول، عدد مثبتی خواهد بود. اگر این مقدار، مثبت باشد، واکنش‌های در سلول به طور خودبه‌خودی انجام می‌گیرند.

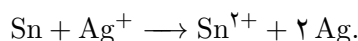
واکنش‌های اکسایش و کاهش در نیم‌سلول به صورت زیر است



پتانسیل سلول نیز به کمک رابطه زیر به دست می‌آید

$$E_{\text{cell}}^{\circ} = E_{\text{red}}^{\circ} - E_{\text{oxid}}^{\circ}$$

پیش از آنکه بخواهیم این دو واکنش را با یکدیگر جمع کنیم، باید در نظر داشته باشیم که تعداد الکترون‌های از دست‌رفته در فرآیند اُکسایش باید با تعداد الکترون‌های جذب‌شده در فرآیند کاهش یکسان باشد. بنابراین، نیم‌واکنش نقره در عدد ۲ ضرب خواهد شد. بعد از این کار و جمع کردن نیم‌واکنش‌ها با یکدیگر، به رابطه کلی واکنش می‌رسیم که در زیر نشان داده شده است

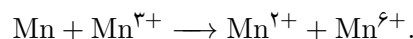


بنابراین پتانسیل سلول به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E_{\text{cell}}^{\circ} = E_{\text{red}}^{\circ} - E_{\text{oxid}}^{\circ} = 0/80 - (-0/14) = 0/94.$$

پتانسیل استاندارد سلول، عددی مثبت شد و بنابراین، واکنش به صورت خودبه‌خودی صورت می‌گیرد. قلع در آند اُکسید می‌شود و یون نقره در کاتد کاهش می‌یابد.

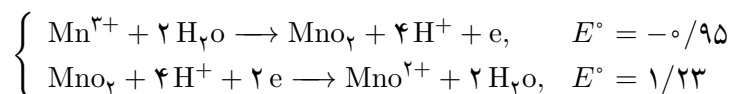
روش ذکرشده برای انجام‌پذیر بودن یک واکنش ممکن است نتایج متفاوتی داشته باشد. به این معنی که ممکن است فرایندی از مسیری انجام‌پذیر باشد و از مسیری دیگر انجام نشود. بنابراین همواره این دغدغه وجود دارد که ممکن است از مسیری پتانسیل استاندارد سلول مثبت و از مسیر دیگری منفی باشد و علامت پتانسیل سلول متفاوت به دست آید. برای توضیح این مطلب واکنش زیر را در نظر بگیرید



به منظور بررسی انجام‌پذیری واکنش کاتیون‌های ذکرشده، ابتدا نیم‌واکنش‌های آن‌را به صورت زیر در نظر بگیرید.

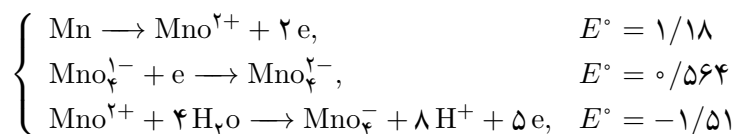


برای محاسبه پتانسیل استاندارد نیم‌واکنش کاتد از مسیر زیر استفاده شده است



$$E_{\text{cathode}} = 0/28.$$

همچنین برای محاسبه پتانسیل نیم‌سلول از مسیر زیر استفاده کرده‌ایم

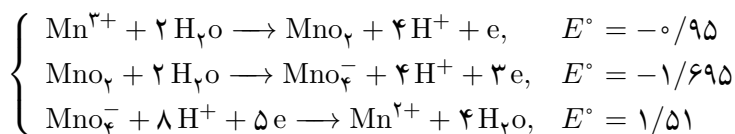


$$E_{\text{anode}} = -0/234.$$

بنابراین، از مسیر ذکرشده برای محاسبه پتانسیل نیم‌سلول‌های آند و کاتد، پتانسیل واکنش کاتیون‌های Mn^{3+} و Mn عددی مثبت خواهد بود و بنابراین واکنش از این مسیر انجام‌پذیر است.

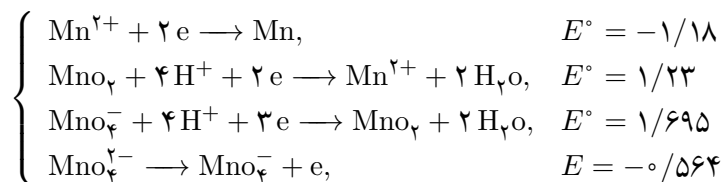
$$E_{\text{cell}} = 0/28 - (-0/234) = 0/514.$$

اکنون برای محاسبه پتانسیل استاندارد واکنش مذکور از مسیرهای زیر استفاده می‌کنیم و انجام پذیری واکنش از مسیری متفاوت با مسیر قبلی بررسی می‌شود



$$E_{\text{cathode}} = -1/135$$

و



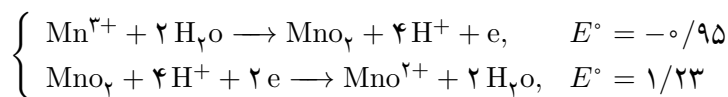
$$E_{\text{anode}} = 1/18.$$

بنابراین

$$E_{\text{cell}} = -1/135 - 1/18 = -2/315.$$

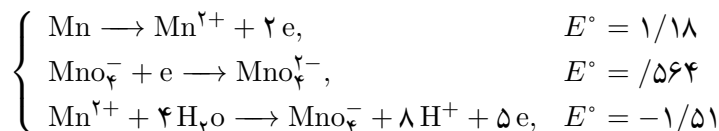
لذا از این مسیر واکنش‌های کاتیون‌های Mn و Mn^{3+} انجام‌پذیر نخواهد بود، زیرا پتانسیل استاندارد واکنش مورد نظر منفی است. طبق محاسبات انجام شده، مشخص می‌شود که واکنش ذکر شده از مسیری انجام‌پذیر بوده، زیرا پتانسیل سلول مثبت است و از مسیری انجام نمی‌شود، زیرا پتانسیل سلول منفی است.

بنابراین اگر در بررسی انجام‌پذیری واکنشی پتانسیل سلول منفی باشد، نمی‌توان به‌طور قطع اطمینان حاصل کرد که این واکنش انجام‌پذیر نیست، زیرا ممکن است مسیری وجود داشته باشد که در آن واکنش انجام‌پذیر باشد. بنابراین ممکن است برای برهم‌کنش کاتیون‌های عنصری مسیرهای زیادی وجود داشته باشد که محاسبه پتانسیل استاندارد سلول از آن مسیرها نیازمند زمان و دقت زیادی باشد. سوال مهمی که در این باره مطرح می‌شود این است که آیا روشی وجود دارد که براساس آن بتوان اطمینان حاصل کرد که از مسیرهای متفاوت واکنش انجام‌پذیر است یا خیر؟ به منظور رفع مشکل یادشده در انجام‌پذیری یا انجام‌ناپذیری بودن از راهکار زیر برای محاسبه پتانسیل استفاده می‌کنیم



$$E_1 = \frac{1(-0.95) + 3(-1/695) + 3(1/23)}{6} = 1/51.$$

همچنین

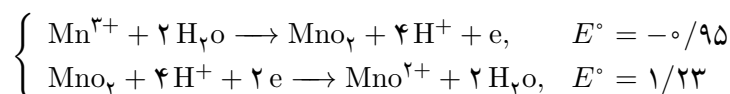


که برای آن داریم

$$E_2 = \frac{2(1/18) + 5(-1/51) + 0.564}{6} = -0.77, \quad E_{\text{cell}} = \frac{1(1/51) + 6(-0.77)}{5} = -0.622.$$

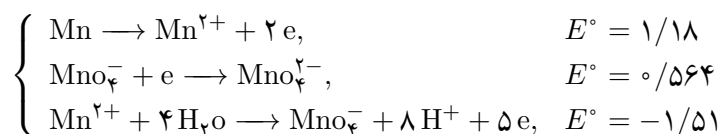
در این روش از مسیرهای متفاوت جواب‌های یکسان برای پتانسیل سلول به دست می‌آید و در صورتی که از این روش پتانسیل سلول منفی به دست بیاید به طور قطع آن واکنش انجام‌ناپذیر است و از هر مسیر دیگری نیز این واکنش انجام‌ناپذیر خواهد بود.

باین روش واکنش کاتیون‌ها Mn و Mn^{3+} را از مسیر دیگری محاسبه می‌کنیم



$$E_1 = \frac{1(-0.95) + 3(-1.695) + 3(1.23)}{6} = 1.51.$$

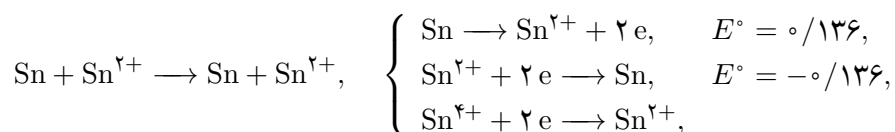
همچنین



$$E_2 = \frac{2(1.18) + 5(-1.51) + 0.564}{6} = -0.77, \quad E_{cell} = \frac{1(1.51) + 6(-0.77)}{5} = -0.622.$$

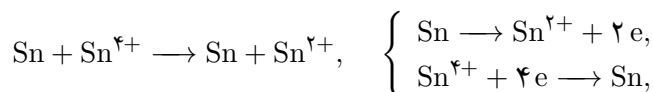
همان‌طور که مشخص است استفاده از این روش جهت محاسبه مقدار پتانسیل سلول از مسیرهای متفاوت به نتیجه یکسانی خواهد رسید و اگر از یک مسیر پتانسیل منفی شد، نیازی به محاسبه پتانسیل از مسیرهای مختلف نیست. آبرساختارهای جبری در زمینه‌های گوناگونی نظیر هندسه، آبرگراف، شبکه، مجموعه‌های فازی، کدگذاری، ترکیبیات و نظریه احتمال دارای کاربرد است. با استفاده از آبرساختار جبری H_v - گروه به بررسی جبری برهم‌کنش کاتیون‌های عناصر قلع، آهن، تیتانیوم، کبالت و منگنز می‌پردازیم. همچنین ساختارهای جبری به دست آمده از برهم‌کنش کاتیونی عناصر ذکر شده در حد یکرختی مشخص می‌شود و گروه‌های اساسی هریک از ساختارهای به دست آمده مشخص می‌شود.

برهم‌کنش کاتیون‌های قلع. کاتیون‌های فلز قلع عبارت‌اند از Sn ، Sn^{2+} و Sn^{4+} . با استفاده از فرایندی که برای انجام‌پذیر بودن یک واکنش ذکر شد، برهم‌کنش این کاتیون‌ها را به صورت زیر بررسی می‌کنیم



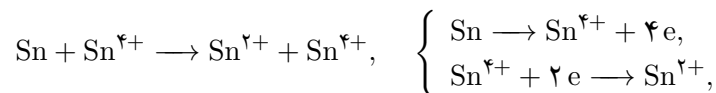
$$E_{cell} = \frac{2(-0.136) + 2(0.136) + 2(0.154)}{2} = 0.154$$

همچنین



$$E_{cell} = \frac{2(0.136) + 4(0.009)}{2} = 0.1454$$

و



$$E_{\text{cell}} = \frac{2(0/154) + 4(-0/009)}{2} = 0/136.$$

بنابراین با در نظر گرفتن $H_{\text{Sn}} = \{\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}\}$ و محاسبات انجام شده ابرعمل $\oplus : H \times H \longrightarrow P^*(H)$ به صورت زیر خواهد بود

$\oplus$	Sn^{2+}	Sn	Sn^{4+}
Sn	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}$	Sn	$\text{Sn}^{4+}, \text{Sn}, \text{Sn}^{2+}$
Sn^{2+}	Sn^{2+}	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}$	$\text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$
Sn^{4+}	$\text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$	Sn^{4+}

قضیه ۱.۳. فرض کنید $H_{\text{Sn}} = \{\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}\}$. در این صورت $(H_{\text{Sn}}, \oplus)$ یک H_v -گروه است. همچنین

$$\beta^*(\text{Sn}) = \beta^*(\text{Sn}^{2+}) = \beta^*(\text{Sn}^{4+}) = H_{\text{Sn}}.$$

لذا گروه بنیادی H_{Sn}/β^* گروه بدیهی است.

اثبات. فرض کنید α_1, α_2 دو عضو دلخواه از H_{Sn} باشند. در این صورت $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \text{Sn} \oplus \text{Sn}^{4+}$. بنابراین $(\alpha_1, \alpha_2) \in \beta \subseteq \beta^*$ لذا

$$\beta^*(\text{Sn}) = \beta^*(\text{Sn}^{2+}) = \beta^*(\text{Sn}^{4+}) = H_{\text{Sn}}.$$

□

H_v -گروه معرفی شده $(H_{\text{Sn}}, \oplus)$ ، ابرگراف های متعددی القاء می کند که در ادامه به معرفی دو ابرگراف القایی می پردازیم.

(۱) فرض کنید $\Gamma_{\text{Sn}} = (H, \{E_i\}_{i=1}^4)$ و

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\text{Sn}\}, & E_2 &= \{\text{Sn}^{2+}\}, & E_3 &= \{\text{Sn}^{4+}\}, \\ E_4 &= \{\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}\}, & E_5 &= \{\text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}\}, & E_6 &= \{\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}\}. \end{aligned}$$

در این ابرگراف یال های E_1, E_3, E_6 مجاورند. همچنین یال های E_2, E_3, E_5, E_6 نیز باهم مجاورند و یال های E_4, E_5, E_6 با هم و یال های E_2, E_5, E_6 نیز با هم مجاورند. ابرگروه وار القاء شده این ابرگراف، ابرگروه کلی است.

(۲) ابرگراف دیگری که توسط H_v -گروه H_{Sn} ، القاء می شود $\Gamma_{\text{Sn}} = (H, \{E_i\}_{i=1}^6)$ است که در آن

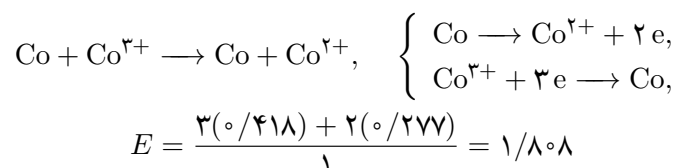
$$E_1 = \{\text{Sn}\}, \quad E_2 = \{\text{Sn}^{2+}\}, \quad E_3 = \{\text{Sn}^{4+}\}, \quad E_4 = \{\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}\}, \quad E_5 = \{\text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}\}, \quad E_6 = \{\text{Sn}^{4+}\}.$$

ابرگروه وار القاء شده این ابرگراف به صورت زیر است

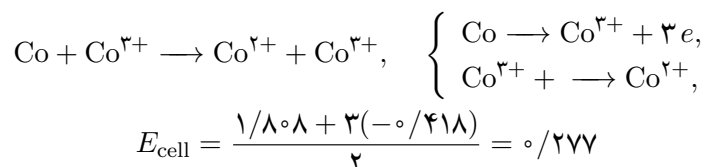
$\oplus$	Sn^{2+}	Sn	Sn^{4+}
Sn	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}$	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$
Sn^{2+}	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$
Sn^{4+}	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$	$\text{Sn}, \text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$	$\text{Sn}^{2+}, \text{Sn}^{4+}$

قضیه ۲.۳. فرض کنید H آبرگروه‌وار القاء شده آبرگراف Γ_{Sn} باشد. در این صورت H یک آبرگروه است.

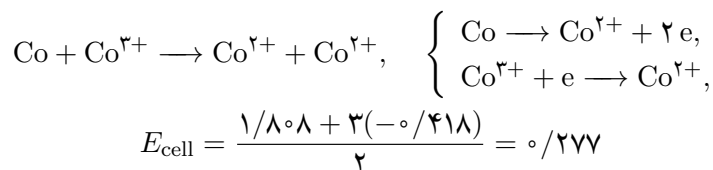
برهم‌کنش کاتیون‌های کبالت. عنصر کبالت با عدد اتمی ۲۷ در گروه ۹ و دوره ۴ جدول تناوبی قرار گرفته است. این عنصر دارای اعداد اکسایش ۰، ۲، ۳ است. بنابراین برهم‌کنش کاتیون‌های این عنصر به صورت زیر است. توجه شود که فقط پتانسیل سلول‌های انجام‌پذیر محاسبه شده است و برای موارد دیگر پتانسیل سلول‌ها منفی بوده به صورت خودبه‌خودی انجام‌پذیر نیستند.



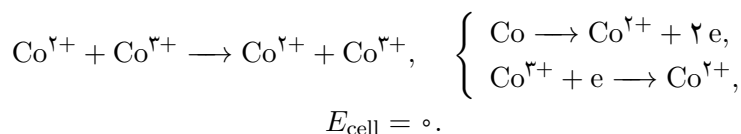
و



و



و



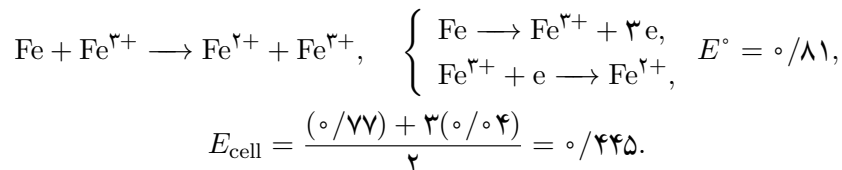
قضیه ۳.۳. فرض کنید $H_{Co} = \{\text{Co}, \text{Co}^{2+}, \text{Co}^{3+}\}$. در این صورت جدول برهم‌کنش کاتیون‌های کبالت به صورت زیر است

$\oplus$	Co^{2+}	Co	Co^{3+}
Co	$\text{Co}, \text{Co}^{2+}$	Co	$\text{Co}, \text{Co}^{2+}, \text{Co}^{3+}$
Co^{2+}	Co^{2+}	$\text{Co}, \text{Co}^{2+}$	$\text{Co}^{2+}, \text{Co}^{3+}$
Co^{3+}	$\text{Co}^{2+}, \text{Co}^{3+}$	$\text{Co}, \text{Co}^{2+}, \text{Co}^{3+}$	Co^{3+}

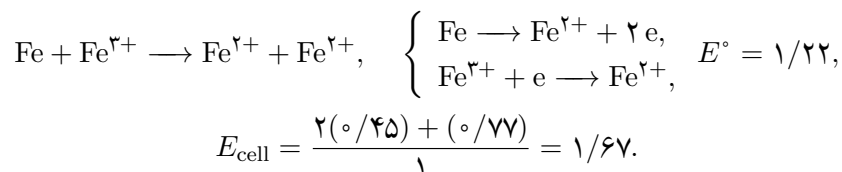
قضیه ۴.۳. H_v - گروه‌های القایی کاتیون‌های دو عنصر قلع و کبالت یکرخت‌اند.

دو عنصر کبالت و قلع در گروه‌های متفاوتی در جدول تناوبی قرار گرفته‌اند و ویژگی‌های شیمیایی متفاوتی دارند، ولی برهم‌کنش کاتیون‌های این دو عنصر، H_v - گروه‌های یکرختی القاء می‌کند. در ادامه کاتیون‌های فلز آهن و برهم‌کنش بین آن‌ها بررسی خواهد شد. لذا بررسی عواملی که موجب یکرختی H_v - گروه‌های القایی از برهم‌کنش قلع و کبالت می‌شوند، مورد توجه است. در واقع می‌توان با قراردادن عناصر با ساختارهای جبری یکرخت در یک گروه به رده‌بندی جدیدی از عناصر جدول تناوبی دست پیدا کرد.

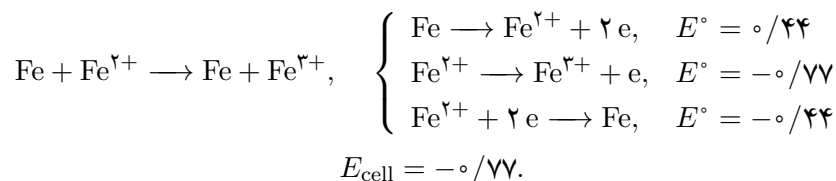
برهم‌کنش کاتیون‌های آهن. عنصر آهن با عدد اتمی ۲۶ در دسته فلزات جدول تناوبی قرار دارد و آرایش اتمی آن به صورت $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^2, 3d^6$ است. این عنصر دارای اعداد اکسایش ۰، ۲، ۳ و بنابراین کاتیون‌های آن $H_{Fe} = \{Fe, Fe^{2+}, Fe^{3+}\}$ است. برهم‌کنش واکنش‌هایی که انجام‌پذیرند به صورت زیر است



همچنین



و



بنابراین جدول ناشی از برهم‌کنش کاتیون‌های آهن به صورت زیر در می‌آید

$\oplus$	Fe^{2+}	Fe	Fe^{3+}
Fe	Fe, Fe^{2+}	Fe	Fe, Fe^{2+}, Fe^{3+}
Fe^{2+}	Fe^{2+}	Fe, Fe^{2+}	Fe^{2+}, Fe^{3+}
Fe^{3+}	Fe^{2+}, Fe^{3+}	Fe, Fe^{2+}, Fe^{3+}	Fe^{3+}

۴. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

آبرساختارهای جبری، تعمیم مناسبی از ساختارهای جبری کلاسیک‌اند که مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته و تحقیقات فراوانی در این زمینه منتشر شده است. در این مقاله، مفهوم $\Gamma-H_v$ - گروه‌ها به‌منزله تعمیمی از H_v - گروه‌ها معرفی و برخی از ویژگی‌های آن را بررسی کردیم. همچنین با استفاده از رابطه منظم قوی، عملگری همورد از رسته $\Gamma-H_v$ - گروه‌های با مورفیزم‌های پوشا به رسته گروه‌ها تعریف شد و برخی از ویژگی‌های این عملگر بررسی شد. سپس با استفاده از پتانسیل استاندارد سلول، خودبه‌خودی بودن واکنش‌های کاتیون‌های قلع، آهن و کبالت بررسی گردید. لازم است متذکر شویم که منفی بودن پتانسیل سلول کاتیون‌های یک عنصر نشان می‌دهد که از آن مسیر، واکنش خودبه‌خودی انجام نمی‌شود. همچنین واکنش این کاتیون‌ها مورد بررسی قرار گرفت و ثابت شد که ساختار جبری حاصل از برهم‌کنش این کاتیون‌ها، H_v - گروه است و H_v - گروه‌های کاتیون‌ها مذکور یکرخیخت‌اند. در مطالعات آتی ویژگی‌های دیگری از $\Gamma-H_v$ - گروه‌ها بررسی خواهد شد. همچنین بررسی و شناسایی عواملی که موجب یکرخیختی H_v - گروه‌های به‌دست آمده از برهم‌کنش کاتیون‌های ذکر شده است، نیز از دیگر سؤال‌های مورد توجه است. برهم‌کنش کاتیون‌های سایر عناصر جدول تناوبی و رده‌بندی آن‌ها با توجه به یکرخیختی ساختارهای جبری حاصل، از زمینه‌های پژوهشی آینده است.

۵. تشکر و قدردانی

نویسندگان، مراتب قدردانی و سپاسگزاری خود را از داوران گرامی مقاله اعلام می‌دارند که با پیشنهادهای سازنده و داوری دقیق باعث ارتقاء مطالب این مقاله شدند.

مراجع

- [1] M. Al-Tahan and B. Davvaz, Algebraic hyperstructures associated to biological inheritance, *Math. Biosci.*, **285** (2017) 112–118.
- [2] M. Al-Tahan and B. Davvaz, n -ary hyperstructures associated to the genotypes of F_2 -offspring, *Int. J. Biomath.*, **10** (2017) pp. 17.
- [3] P. Corsini, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, Tricesimo, 1993.
- [4] P. Corsini and V. Leoreanu, *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publications, Dordrecht, 2003.
- [5] B. Davvaz and V. Leoreanu-Fotea, *Hyperring Theory and Applications*, International Academic Press, USA, 2007.
- [6] B. Davvaz, *Polygroup Theory and Related Systems*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2013.
- [7] B. Davvaz and I. Cristea, *Fuzzy Algebraic Hyperstructures-An Introduction*, Springer, New York, 2015.
- [8] B. Davvaz, *Semihypergroup Theory*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2016.
- [9] B. Davvaz and T. Vougiouklis, *A Walk Through Weak Hyperstructures- H_v -Structure*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2019.
- [10] B. Davvaz, Weak algebraic hyperstructures as a model for interpretation of chemical reactions, *Iranian J. Math. Chem.*, **7** (2016) 267–283.
- [11] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad and A. Benvidi, Chain reactions as experimental examples of ternary algebraic hyperstructures, *Match Commun. Math. Comput. Chem.*, **65** (2011) 491–499.
- [12] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad, and A. Benvidi, Chemical hyperalgebra: dismutation reactions, *Match Commun. Math. Comput. Chem.*, **67** (2012) 55–63.
- [13] S. O. Dehkordi and B. Davvaz, A strong regular relation on Γ -semihyperrings, *J. Sci. Islamic Repub. Iran*, **22** (2011) 257–266.
- [14] S. O. Dehkordi and B. Davvaz, Γ -semihyperrings: approximations and rough ideals, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **34** (2012) 1035–1047.
- [15] M. Ghadiri and B. Davvaz, Direct System and Direct limit of H_v -group, *Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, **28** (2004) 267–275.
- [16] H. Hedayati and B. Davvaz, Regular relations and hyperideals in H_v - Γ -semigroups, *Utilitas Math.*, **86** (2011) 169–182.
- [17] H. Hedayati and I. Cristea, Fundamental Γ -semigroups through H_v - Γ -semigroups, *U. P. B. Sci. Bull., Series A*, **75** (2013) 33–46.
- [18] S. O. Dehkordi and M. Heidari, General Γ -hypergroups: θ relation, T -Functor and Fundamental groups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **37** (2014) 907–921.
- [19]] F. Marty, *Sur une generalization de la notion de groupe*, in 8th Congress Math. Scandenaves, Stockholm, Sweden, 1934, 45–49.
- [20] S. M. Moosavi Nejad, M. Eslami Kalantari and A. Dehghan Nezhad, Extension of algebraic hyperstructures theory to the elementary particle physics and nuclear physics, *Iran. J. Phys. Res.*, **11** (2012) 429–434.
- [21] S. Ostadhadi-Dehkordi, T. Vougiouklis and K. Hila, H -sets and applications on H_v -groups, (accepted).

[22] T. Vougiouklis, *Hyperstructures and Their Representations*, Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1994.

[۲۳] ح. اقبازرگی و م. جعفرپور، ابرگروه‌های به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر و کاربرد آن‌ها در فیزیک ذرات بنیادی، جامعه و ریاضی، ۵، ۲۵، no. ۴۶-۲۹ (۱۳۹۹).

سهراب استادهادی دهکردی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران

ostadhadi@hormozgan.ac.ir

سهراب استادهادی دهکردی متولد ۱۳۶۱ در شهرکرد است. او سال ۱۳۸۰ در مقطع کارشناسی ریاضی محض دانشگاه شهرکرد پذیرفته شد و پایان‌نامه کارشناسی خود را با راهنمایی دکتر محمدتقی دیبایی، استاد دانشگاه تربیت معلم تهران، به اتمام رساند و سال ۱۳۸۷ در مقطع دکتری دانشگاه یزد پذیرفته شد و رساله خود را زیر نظر دکتر بیژن دواز، استاد دانشگاه یزد، در سال ۱۳۹۰ به پایان رساند و به عضویت هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه هرمزگان در آمده است.



بیژن دواز

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

davvaz@yazd.ac.ir

بیژن دواز متولد آبان ماه ۱۳۴۳ در شهر شیراز و فارغ‌التحصیل دوره دکتری از دانشگاه تربیت مدرس تحت راهنمایی دکتر محمدرضا درفشه است. وی از سال ۱۳۷۰ به عضویت هیئت علمی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد در آمده است. ایشان مولف دو کتاب به زبان فارسی و ۶ کتاب به زبان انگلیسی است و عناوینی همچون استاد نمونه کشوری و پژوهشگر نمونه کشوری و همچنین کسب درجه استاد ممتازی را در کارنامه خود دارد.

