

گروپوید و جبرهای گروپویدی

حبیب امیری

به یاد استادام دکتر محمود لشکری زاده بمی (۱۳۲۷-۱۴۰۰)

چکیده. گروپوید یا گروهوار یکی از چند ساختار شبیه به گروه است که کاربردهایی فراتر از کاربرد گروه در هندسه دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل، هندسه جبری، آنالیز ریاضی، و فیزیک دارد. در این مقاله ابتدا تعریف‌های مختلف گروپوید و C^* -جبر، جبر فوریه و جبر فوریه-اشتیتیس روی آن‌ها را مرور می‌کنیم و سپس به نظریه نمایش جبرهای گروپویدی می‌پردازیم و در آخر نتیجه‌ای کلاسیک در نظریه نمایش گروه‌های موضعا فشرده را به گروپویدها گسترش می‌دهیم.

۱. مقدمه

مفهوم گروه یکی از مفاهیم اساسی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات است که در کمال تعجب کاربردهای بسیاری نیز در علوم دیگر از جمله فیزیک و شیمی یافته است. یکی از دلایل اهمیت گروه این است که این مفهوم ابزار بیان ریاضی فرایندهای برگشت‌پذیر (نوعی تقارن) است. در اصل، با توجه به برنامه ارلانگن در هندسه^۱ ساختارهای هندسی براساس گروه‌های خودریختی‌شان تعریف و مشخص می‌شوند و از اینجاست که مفهوم تقارن با مفهوم گروه مترادف انگاشته می‌شود. اساسا گذر از گروه به گروپوید ما را به نظریه‌ای بیشتر ناجابه‌جایی می‌برد. حال اگر آن تقارن موجود نباشد و بخواهیم ابزار صوری برای بیان فرایندهای برگشت‌پذیری بیابیم که برگشت در آن‌ها به طریقه‌های مختلفی امکان‌پذیر است، گروپوید مفهوم مناسب این کار است.

به زبان ساده گروپوید یک گروه است فقط عمل ضرب در آن به جای اینکه بین همه اعضا انجام شود بین بعضی از اعضا تعریف می‌شود؛ پس به نوعی خاصیت تقارن گروه‌ها را ندارد. ناگفته نماند که در کتاب‌های جبر معمولا یک مجموعه به همراه یک عمل دوتایی که روی هر دو عضو آن مجموعه اثر می‌کند را یک گروپوید می‌نامند حال آنکه هاینریش برانت^۲، ریاضی‌دان آلمانی در سال ۱۹۲۶ ساختاری را برای اولین بار معرفی کرد و آنرا گروپوید نامید، در ساختار معرفی‌شده برانت عمل دوتایی روی هر دو عضو تعریف نمی‌شود و ویژگی‌های بیشتری دارد که در ادامه معرفی می‌کنیم. این مقاله نیز در مورد گروپویدی که برانت معرفی کرده است نگاشته شده است. در جدول ۱ چند ساختار جبری از این دیدگاه مقایسه شده است [۴۰]. رانلد براون، یکی از متخصصان مشهور نظریه گروپویدها، تمثیل دیگری را برای گروپویدها ذکر کرده است: گروپوید گردایه‌ای از مکان‌ها به همراه مجموعه‌ای از مسیرها برای رفتن از مکانی به مکان دیگر است با این شرایط که (۱) ماندن در مکان (الف) بدون انجام هیچ کاری یک مسیر حساب می‌شود؛ (۲) یک مسیر برای رفتن از (الف) به (ب) به همراه مسیر دیگر برای رفتن از (ب) به (پ) یک مسیر برای رفتن از (الف) به (پ)

عبارات و کلمات کلیدی: جبرهای گروپویدی، گروپوید، نظریه نمایش، جبر فوریه.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوربای ولی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۶/۰۸

نوع مقاله: پژوهشی

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129385.1444>

^۱Erlangen program ^۲H. Brandt (1886-1954)

حساب می‌شود؛ (۳) همیشه می‌توانید مسیر را وارونه طی کنید و این کار را نادیده بگیرید، به این معنی که، اگر از (الف) به (ب) رفتید همیشه یک مسیر برگشت از (ب) به (الف) دارید و اگر آنرا طی کنید دقیقا مثل این است که شما در (الف) مانده‌اید و مسیر برگشت یک مسیر برگشت دقیقا همان مسیر است. شکل ۱ نمونه‌ای از این تمثیل است (توضیحات بیشتر در بخش بعد آمده است).

جدول ۱. ساختارهای شبیه به گروه

کلی بودن عمل	شرکت پذیری	همانی	وارون پذیری	جابه جایی
نیم گروپوید	لازم نیست	لازم است	لازم نیست	لازم نیست
رسته کوچک	لازم نیست	لازم است	لازم نیست	لازم نیست
گروپوید	لازم نیست	لازم است	لازم است	لازم نیست
ماگما	لازم است	لازم نیست	لازم نیست	لازم نیست
شبه گروه	لازم است	لازم نیست	لازم است	لازم نیست
ماگمای یکدار	لازم است	لازم نیست	لازم نیست	لازم نیست
طوقه	لازم است	لازم نیست	لازم است	لازم نیست
نیم گروه	لازم است	لازم نیست	لازم نیست	لازم نیست
نیم گروه وارون	لازم است	لازم نیست	لازم است	لازم نیست
تکوار	لازم است	لازم است	لازم نیست	لازم نیست
تکوار جابه جایی	لازم است	لازم است	لازم نیست	لازم است
گروه	لازم است	لازم است	لازم است	لازم نیست
گروه آبلی	لازم است	لازم است	لازم است	لازم است

گروپویدها را اولین بار هاینریش برانت ریاضیدان آلمانی، در ۱۹۲۶ طی مقاله‌ای درباره ترکیب صورت‌های درجه دوم چهارمتغیری معرفی کرد و به این نام نامید [۲]. تعریف برانت حاصل سیزده سال تحقیق درباره تعمیم روش ترکیب صورت‌های درجه دوم دومتغیری منسوب به گاوس به صورت‌های چهارمتغیری بود؛ پس گروپوید میراثی از گاوس کبیر است. برانت گروپویدها را برای تعمیم حساب ایدال‌های حلقه اعداد صحیح جبری به حالت ناآبلی نیز به کار برد.

تقریباً در همان زمان، لووی^۳ مفهوم مشابه «گروه‌های ترکیبی» را برای توصیف یکرختی‌های بین گسترش‌های مزدوج میدان‌ها به کار برد. ایده‌های او را بر^۴ در مقاله‌ای درباره نظریه کلاسیک گالوا به سال ۱۹۲۸ گسترش داد.

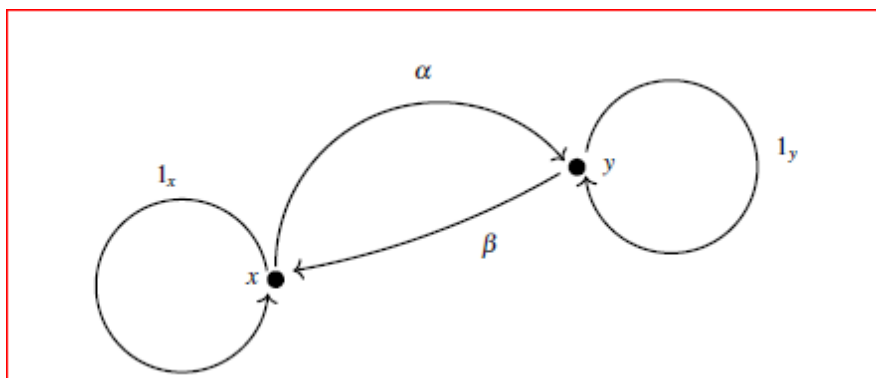
رفته رفته مفهوم گروپوید به واسطه تحقیقاتی که در نظریه ایدال‌های حلقه‌های ناجابه جایی به ویژه به دست آسانو^۵ انجام گرفت جابجاده‌تر شد. براون در [۴] نقل می‌کند که آیلنبرگ و مک‌لین در تعریف رسته در [۱۱] از تعریف گروپوید برانت الگو گرفته‌اند. جالب این است که آن دو در مقاله معروفشان در سال ۱۹۴۵ درباره رسته‌ها نامی از گروپویدها حتی در مثال‌ها نمی‌برند. اما کاربرد گروپویدها از سال به بعد به واسطه تحقیقات ارسمان^۶، ریاضیدان آلمانی، در حوزه‌های وسیعی از ریاضیات از جمله نظریه کلاف‌های تار، هندسه دیفرانسیل، توپولوژی دیفرانسیل، و نظریه فولیوشن گسترش یافت. در حقیقت، ارسمان به گروپویدها ساختارهای دیگری مثل توپولوژی و دیفرانسیل پذیری را اضافه کرد و آن‌ها را به صورت ابزاری در توپولوژی دیفرانسیل و هندسه به کار برد؛ تحقیقات او پس از مرگش توسط همسرش ویرایش شد و در هفت جلد توسط دو ناشر مختلف به چاپ رسید [۱۰].

همچنین، گروپویدها در کتابی از رایدمایستر^۷ به سال ۱۹۳۲ درباره توپولوژی در مبحث بررسی یکرختی‌های خانواده‌ای از ساختارها به کار گرفته شده‌اند. مفهوم گروپوید بنیادی^۸ فضای توپولوژیک در سال‌های شناخته شده بود و بنابر گفته براون به نظر

³A. Loewy ⁴R. Baer ⁵K. Asano ⁶C. Ehresmann ⁷K. Reidemeister ⁸fundamental groupoid



(ب) هاینریش
برانت



(آ) مثالی از یک گروپوید

شکل ۱

می‌رسد اولین بار این اصطلاح در [۱۴] به کار رفته است. هیگینز [۱۸] و براون [۳] نیز با توجه به مفهوم کلاسیک فضاهای پوششی به صرافت کاربرد مفهوم گروپوید و گروپوید بنیادی در توپولوژی جبری شدند و با استفاده از نمایش‌های گروپویدها اثبات‌های جبری را جایگزین بعضی اثبات‌های توپولوژیکی تعدادی از قضیه‌های کلاسیک کردند. در هندسه جبری نیز گروتندیک به‌طور گسترده‌ای از گروپویدها استفاده کرده است [۱۵]. او در جایی گفته است:

فکر استفاده اصولی از گروپویدها را، گرچه امروز مسلم به نظر می‌رسد، باید پیشرفت مفهومی مهمی به حساب بیاوریم که در حوزه‌های مختلف ریاضیات پخش شد. خود من در تحقیقات هندسه جبری از گروپوید استفاده‌های زیادی کرده‌ام؛ اولین موردش نظریه گذر به خارج قسمت توسط یک رابطه پیش‌هم‌ارزی است که من را به مفهوم عصب^۹ یک رسته راهنمون شد و آخرین موردش تحقیقاتم درباره قله تایشمولر بود که در آن کار با گروپوید تایشمولر امری اجتناب‌ناپذیر است.

در آنالیز هم مکی از گروپویدها تحت عنوان گروه‌های مجازی^{۱۰} در مطالعه عمل‌های ارگودیک گروه‌ها استفاده کرده است [۲۱]. او مشاهده کرد که همانند گروه‌ها می‌توان ساختارهای جبری ناجابه‌جایی زیادی برای گروپویدها ساخت؛ این ساختارها نقش اساسی در هندسه ناجابه‌جایی آلن گُن^{۱۱} ایفا می‌کنند. می‌توان روی گروپویدهای توپولوژیک اندازه‌ها را تعریف کرد. چنین کاری را سدا^{۱۲}، یکی از دانشجویان براون، در ۱۹۷۴ انجام داده است. به این ترتیب جبرهای پیچشی مشابه گروه‌های توپولوژیک تعریف می‌شود. هرچند به نقل از رنو^{۱۳} جبرهای پیچشی قدمتی به اندازه جبرهای عملگری فون نویمان دارند؛ برای اطلاعات بیشتر به [۳۹، ۳۳] مراجعه کنید. پرادن نظریه لی را که قبلاً برای گروه‌های دیفرانسیل‌پذیر تعریف شده بود به گروپویدهای دیفرانسیل‌پذیر گسترش داد و گروپویدهای لی را تعریف کرد [۲۵]. خواننده علاقه‌مند به مطالعه نقش گروپویدهای لی و جبرویدهای لی در هندسه دیفرانسیل را به [۲۲] ارجاع می‌دهیم. نظریه گروپویدهای لی در ۵۰ سال اخیر گسترش زیادی پیدا کرده است و نقش اساسی در مطالعه هندسه پواسون دارد.

^۹nerve of a category ^{۱۰}virtual groups ^{۱۱}Alain Connes ^{۱۲}A. K. Seda ^{۱۳}J. Renault

Two 4x4 grids are shown, each containing the first 15 natural numbers. The left grid has the numbers 1 through 15 arranged in a 4x4 grid, with the bottom-right cell empty. The right grid has the numbers 1 through 15 arranged in a 4x4 grid, with the bottom-right cell empty.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

شکل ۲. معمای ۱۵

گروپوئیدها حتی در ترکیبیات هم ظاهر می‌شوند. معمای ۱۵ نمونه‌ای از مسائل مطرح در ترکیبیات مرتبط با گروپوئیدها است [۱۹]. احتمالا خواننده با مکعب روبیک آشنایی دارد. در مکعب روبیک برای اینکه از یک وضعیت به وضعیتی دیگر برسیم دنباله‌ای از اعمال از جمله دوران دادن بعضی از وجه‌های مکعب را باید انجام دهیم. اگر هر دنباله از این اعمال را یک انتقال بنامیم مجموعه تمام این انتقال‌ها تشکیل گروه می‌دهند. درواقع اگر هیچ کاری روی مکعب انجام ندهیم آنرا انتقال همانی می‌نامیم؛ هر دو انتقالی را که اثر یکسان داشته باشد مساوی هم می‌گیریم؛ هر انتقال به‌طور وارونه قابل انجام است و مهم‌تر اینکه دو انتقال دلخواه را می‌توان پشت سر هم انجام داد و انتقالی جدید به دست آورد. پس از دید نظریه گروه‌ها، مجموعه تمام انتقال‌های مکعب روبیک یک گروه است. تعداد اعضای گروه انتقال‌های مکعب روبیک برابر $43,252,003,274,489,856,000$ است. از دید نظریه گروه‌ها، حل کردن مکعب روبیک پیدا کردن انتقالی (که لزوما یکتا نیست) از بین تمام انتقال‌ها است که شما را به وضعیت مورد نظر برساند. اما در معمای ۱۵ وضعیت متفاوت است. در این مسئله یک مربع ۱۶ خانه‌ای مطابق شکل ۲ با شانزده خانه داریم که اعداد ۱ تا ۱۵ در آن‌ها نوشته شده است و یکی از خانه‌ها خالی است. هر خانه می‌تواند به نزدیک‌ترین خانه به شرط خالی بودن آن خانه انتقال پیدا کند. حالا سوال این است که آیا می‌توان این مربع را به وضعیت نشان‌داده در سمت راست شکل ۲ درآورد؟ در اینجا برخلاف مکعب روبیک هر تغییر وضعیت با جابه‌جا کردن خانه خالی رخ می‌دهد. هر دنباله از این جابه‌جایی‌ها را یک انتقال می‌نامیم. در هر وضعیت اگر حرکتی انجام ندهیم آنرا انتقال همانی برای آن وضعیت در نظر می‌گیریم. پس واضح است که هر انتقال دارای وارون است. همچنین دو انتقال را در صورتی می‌توان پشت سر هم انجام داد که خانه خالی در کنار خانه‌ای قرار بگیرد که انتقال دوم قرار است روی آن انجام شود. پس مجموعه تمام انتقال‌های ممکن در معمای ۱۵ تشکیل یک گروپوئید می‌دهد و این گروپوئید $168,332,348,591,361,617,000$ عضوی است. برای توضیحات بیشتر به [۲۰] مراجعه کنید.

گروپویدها در فیزیک هم کاربردهایی دارند. به ذکر این گفته مشهور آلن کن اکتفا می‌کنیم که: هاینبرگ مکانیک کوانتومی را از طریق بررسی گروپوید گذارهای کوانتوم کشف کرد و نه گروه تقارن‌ها. خواهیم دید که مجموعه‌ها، گروه‌ها، و رابطه‌های هم‌ارزی حالت‌های خاصی از گروپویدند و واضح است این مفاهیم کاربردهای فراوانی در همه علوم دارند. علاوه بر اینها شاید مثال‌های دیگری به غیر از این‌ها هم بتوان برای گروپویدها برشمرد که ما از آن خبر نداریم. در صفحه اینترنتی [۵] مطالب فراوانی درباره گروپویدها و کاربردهای آن‌ها آمده است. مقاله [۳۷] نیز اطلاعات مفیدی در مورد گروپویدها در اختیار خواننده قرار می‌دهد. البته تا حدودی درست است که گروپوید جزء مفاهیم اساسی فرهنگ رایج ریاضیات نبوده است ولی به نظر می‌رسد این وضع در حال تغییر است.

مطالب این مقاله به صورت زیر خواهد آمد. پس از این بخش مقدمه، در بخش دوم گروپویدها را از دو دیدگاه جبری و نظریه رسته‌ها تعریف می‌کنیم و مثال‌های متنوعی برای هر دو تعریف عرضه می‌کنیم. در بخش سه گروپویدهای توپولوژیکی و موضعا فشرده را تعریف و بررسی می‌کنیم. در بخش چهارم به معرفی گروپویدهای اندازه‌دار و نظریه نمایش آن‌ها می‌پردازیم. فضاهای تابعی متنوعی روی گروپویدهای اندازه‌دار مثل C^* -جبر، جبر فوریه، و جبر فوریه-اشیتیلتس گروپویدی را در بخش پنج معرفی می‌کنیم. و در پایان، در فصل شش قضیه‌ای جدید درباره نمایش‌های گروپویدهای اندازه‌دار اثبات می‌کنیم که تعمیم قضیه‌ای کلاسیک درباره

نمایش‌های گروه‌های موضعا فشرده است؛ این نتیجه ارتباط نمایش‌های تحویل‌ناپذیر با نوع خاصی از توابع معین مثبت را مشخص می‌کند.

۲. گروپوید: تعریف‌ها و مثال‌ها

در این بخش دو رویکرد متفاوت در تعریف گروپویدها را می‌آوریم و مثال‌های زیادی برای هریک عرضه خواهیم کرد. به دو روش می‌توان گروپوید را تعریف کرد: یکی جبری و دیگری از دیدگاه نظریه رسته‌ها. ابتدا تعریف جبری را که طبیعی‌تر به نظر می‌رسد می‌آوریم.

تعریف ۱.۲. گروپوید یک مجموعه مانند G است به همراه یک زیرمجموعه از $G \times G$ به نام مجموعه زوج‌های ترکیب‌پذیر (که با G^2 نشان می‌دهیم) و یک عمل ضرب $(x, y) \mapsto xy$ از G^2 به G و یک نگاشت وارون $x \mapsto x^{-1}$ از G به G که دارای ویژگی‌های زیر است:

- (۱) برای هر $x \in G$ ، $(x^{-1})^{-1} = x$ ؛
- (۲) برای هر $x, y, z \in G$ ، اگر $(x, y), (y, z) \in G^2$ ، آنگاه $(x, yz) \in G^2$ و $(xy)z = x(yz)$ ؛
- (۳) همواره برای هر $x \in G$ داریم $(x^{-1}, x) \in G^2$ و $(x, x^{-1}) \in G^2$ و $(zx)x^{-1} = z$ ، $x^{-1}(xy) = y$ برای هر $(x, y), (z, x) \in G^2$.

ویژگی (۲) در تعریف بالا بیان می‌کند که خاصیت شرکت‌پذیری عمل ضرب، به شرطی که ضرب‌های مربوط تعریف شده باشند، برقرار است. دو نگاشت مهم $\alpha, \beta : G \rightarrow G$ با استفاده از اعمال ضرب و وارون تعریف شده در گروپویدها به صورت $\alpha(x) = x^{-1}x$ ، $\beta(x) = xx^{-1}$ تعریف می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که $\alpha(x) = \beta(x^{-1})$ برای هر $x \in G$. همچنین $\alpha(xy) = \alpha(y)$ و $\beta(xy) = \beta(x)$ برای هر $(x, y) \in G^2$. با استفاده از ویژگی‌های اعمال ضرب و وارون می‌توان نشان داد که $(x, y) \in G^2$ اگر و فقط اگر $\beta(y) = \alpha(x)$ بنابراین

$$G^2 = \{(x, y) \in G \times G : \beta(y) = \alpha(x)\}.$$

همچنین می‌توان نشان داد که اگر $(x, y) \in G^2$ آنگاه $(x^{-1}, y^{-1}) \in G^2$ و $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. تصویر مجموعه G تحت نگاشت‌های α و β را که با هم برابرند با $G^\circ = \alpha(G) = \beta(G)$ نشان می‌دهند و به آن فضای یکانی G می‌گویند؛ زیرا $x\alpha(x) = x$ و $\beta(x)x = x$ برای هر $x \in G$. نگاشت‌های α و β گروپوید G را روی G° به صورت کلافی از زیرمجموعه‌های G تبدیل می‌کند؛ دراصل اگر برای هر $u, v \in G^\circ$ تعریف کنیم

$$G^u = \beta^{-1}(\{u\}) = \{x \in G : \beta(x) = u\}, \quad G_v = \alpha^{-1}(\{v\}) = \{x \in G : \alpha(x) = v\}$$

آنگاه $G = \bigcup_{u \in G^\circ} G^u = \bigcup_{v \in G^\circ} G_v$. همچنین اگر تعریف کنیم $G_v^u = G^u \cap G_v$ ، به سادگی می‌توان نشان داد برای $u \in G^\circ$ مجموعه G_v^u گروه است و عضو همانی آن u است. گروه G_v^u را گروه ایزوتروپی یا یکرندی^{۱۴} u می‌نامند. برانت در [۲] فرض اضافی ناتهی بودن G_v^u را برای هر $u, v \in G^\circ$ در تعریف اولیه گروپوید قرار داده بود، یعنی برای هر $u, v \in G^\circ$ فرض کرده بود $x \in G$ موجود باشد که $\alpha(x) = v$ و $\beta(x) = u$ ، امروزه چنین گروپویدهایی متعددی نامیده می‌شوند. اجتماع تمام گروه‌های ایزوتروپی G یعنی $\bigcup_{u \in G^\circ} G_v^u$ را کلاف گروه‌های ایزوتروپی G می‌نامند. اگر G اجتماعی از زیرگروه‌های ایزوتروپی خود باشد، G را کلافی از گروه‌ها می‌نامند. این مورد ساده‌ترین مثال از گروپویدها است البته به غیر از گروه که به وضوح گروپوید است. رابطه هم‌ارزی مهمی روی G° به صورت $u \sim v$ اگر و فقط اگر $G_v^u \neq \emptyset$ تعریف می‌شود؛ به بیان دیگر

$$u \sim v \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad x \in G \text{ موجود باشد که } \alpha(x) = v \text{ و } \beta(x) = u.$$

^{۱۴}isotropy

رده هم‌ارزی u را با $[u]$ و فضای رده‌های هم‌ارزی این رابطه را با G°/G نشان می‌دهند. زیرمجموعه H از گروپوئید G را زیرگروپوئید از G می‌نامند هرگاه برای هر $x \in H$ ، $x^{-1} \in H$ و برای هر زوج ترکیب‌پذیر $(x, y) \in G^2 \cap (H \times H)$ عضو xy در H باشد. به‌عنوان مثال اگر $U \subseteq G^\circ$ و قرار دهیم $G|_U := \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(U)$ در این صورت $G|_U$ زیرگروپوئیدی از G است که فضای یکانی آن مجموعه U است.

نگاشت $\varphi: G \rightarrow H$ بین دو گروپوئید G و H را یک هم‌ریختی می‌نامند هرگاه برای هر $(x, y) \in G^2$ ، $(\varphi(x), \varphi(y)) \in H^2$ و $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ می‌توان نشان داد $\varphi(G^\circ) \subseteq H^\circ$ و $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$. هم‌ریختی یک‌به‌یک و پوشا را یک‌ریختی می‌نامند. مفهوم‌های زیرگروپوئید نرمال و گروپوئیدهای خارج قسمتی و قضیه‌های یک‌ریختی مشابه حالت گروه‌ها برای گروپوئیدها بررسی شده است [۱].

قبل از اینکه تعریف دوم گروپوئید را که مبتنی بر مفهوم رسته است بیاوریم بهتر است تعریف رسته^{۱۵} را یادآوری کنیم. رسته $\mathcal{C}$ از یک خانواده از اشیاء که با $\text{Ob}(\mathcal{C})$ نشان داده می‌شود تشکیل شده است به‌طوری‌که برای هر $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ یک خانواده از ریختارها^{۱۶}، $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ، به همراه یک قانون ترکیب بین ریختارها وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) اگر $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ و $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ آنگاه $fg \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ ؛

(۲) ترکیب بین ریختارها شرکت‌پذیر است، یعنی اگر $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ، $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ و $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$ آنگاه $(fg)h = f(gh)$

(۳) برای هر $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ یک عنصر همانی ϵ_A در $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ موجود است به‌طوری‌که $\epsilon_A f = f = f \epsilon_B$ برای هر $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

تعریف ۲.۲. وقتی $\mathcal{C}$ رسته‌ای باشد که در آن هر ریخت و وارون‌پذیر است آن را گروپوئید می‌نامیم. وارون‌پذیری ریختارها به این معنی است که اگر $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ و $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ آنگاه ریختاری مثل $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ موجود باشد به‌طوری‌که $fg = \epsilon_A$ و $gf = \epsilon_B$ ؛ ریختار g را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

قبلاً گفتیم گروپوئیدها بیست سالی قبل از اینکه آیلنبرگ و مک‌لین نظریه رسته‌ها را عرضه کنند تعریف شده بودند؛ با این حال آیلنبرگ و مک‌لین اشاره‌ای به گروپوئیدها حتی به‌عنوان مثالی از رسته نمی‌کنند. به هر صورت همین که نظریه رسته‌ها در نیمه قرن بیستم مورد اقبال ریاضیدانان قرار گرفت علاقه به گروپوئیدها نیز بیشتر شد. بنابر تعریف ۲.۲، در گروپوئیدی مثل G مجموعه $\text{Ob}(G)$ همان G° است و اعضای G را به‌منزله ریختارها در نظر می‌گیریم. بنابراین برای $u, v \in G^\circ$ اگر $G_v^u \neq \emptyset$ ، هر $x \in G_v^u$ یک ریختار از u به v است؛ یعنی $\text{Mor}_G(u, v) = G_v^u$. برای درک بهتر این موضوع هر $x \in G$ را با یک پیکان $\alpha(x) \xrightarrow{x} \beta(x)$ نشان می‌دهیم پس $\alpha(x) = x^{-1}x$ و $\beta(x) = xx^{-1}$ اعضای G° اند و $x \in G_{\alpha(x)}^{\beta(x)}$. با این دید اگر $(x, y) \in G^2$ آنگاه xy به‌صورت زیر تعبیر می‌شود:

$$\beta(x) \xrightarrow{x} \alpha(x) = \beta(y) \xrightarrow{y} \alpha(y)$$

xy

توجه کنید که $\beta(xy) = \beta(x)$ و $\alpha(xy) = \alpha(y)$ ، پس $xy \in \text{Mor}_G(\beta(x), \alpha(y))$ به شرطی که $(x, y) \in G^2$. در ادامه مثال‌های متنوعی از گروپوئیدها بیان می‌کنیم.

هر گروه یک گروپوئید است. به‌وضوح هر گروه G یک گروپوئید است که فضای یکانی آن مجموعه تک‌عضوی $G^\circ = \{e\}$ است (e عضو همانی G است). به‌طور کلی اگر $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ یک خانواده دوبه‌دو مجزا از گروه‌ها باشد، در این صورت $G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ یک ساختار گروپوئیدی دارد. دراصل، $G^2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G_\lambda \times G_\lambda)$. پس برای $a, b \in G$ وقتی تعریف

¹⁵category ¹⁶morphisms

می‌شود که هر دوی a و b در یک گروه قرار گیرند. وارون هر عضو G ، برابر وارون آن در گروهی است که به آن تعلق دارد. این گروپوید را کلافی از گروه‌ها می‌نامند و داریم $G^\circ = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ که در آن e_λ عضو همانی گروه G_λ است.

گروپویدهای انتقال. فرض کنید گروه S از طرف راست روی فضای U عمل کند و تصویر نقطه $u \in U$ تحت $s \in S$ را با $u.s$ نشان دهیم، در این صورت $G = U \times S$ یک ساختار گروپویدی به صورت زیر می‌پذیرد. زوج $((u, s), (v, t))$ ترکیب‌پذیر است هرگاه $v = u.s$ و ضرب این زوج به صورت $(u, s)(u.s, t) = (u, st)$ تعریف می‌شود. همچنین وارون اعضا به صورت $(u, s)^{-1} = (u.s, s^{-1})$ تعریف می‌شود. با این ضرب و وارون نگاشت‌های α و β به صورت $\alpha((u, s)) = (u.s, e)$ و $\beta((u, s)) = (u, e)$ درمی‌آیند که در اینجا e عنصر همانی گروه S است. فضای یکانی‌های این گروپوید به صورت $G^\circ = \{(u, e) : u \in U\}$ است که می‌توان آن را با U یکی گرفت و داریم $G^u = \{u\} \times S$ برای هر $u \in U$. این گروپوید را گروپوید انتقال می‌نامند.

نمودار رابطه‌های هم‌ارزی. اگر $\sim$ رابطه هم‌ارزی روی مجموعه U و R نمودار این رابطه باشد، یعنی $R = \{(x, y) \in U \times U : x \sim y\}$ ، در این صورت R یک ساختار گروپویدی می‌پذیرد. زوج $((x, y), (z, w))$ ترکیب‌پذیر است هرگاه $y = z$ و ضرب این زوج به صورت $(x, y)(y, w) = (x, w)$ و وارون به صورت $(x, y)^{-1} = (y, x)$ تعریف می‌شود. فضای یکانی R قطر $U \times U$ یعنی $R^\circ = \{(x, x) : x \in U\}$ است. اگر $R = U \times U$ ، در این صورت R را گروپوید بدیهی روی U می‌نامند. پس با هر رابطه هم‌ارزی روی هر مجموعه دلخواه می‌توان یک گروپوید ساخت.

گروپوید نگاشت‌های دوسویی جزئی. فرض کنید X و U دو مجموعه و $p : X \rightarrow U$ نگاشتی پوشا باشد، و برای هر $u \in U$ مجموعه $\{u\}^{-1}p$ را با X_u نشان دهیم، در این صورت

$$\text{Iso}(X, p, U) = \{(v, \varphi, u) : \varphi : X_u \rightarrow X_v \text{ و } u, v \in U\}$$

گروپوید است. زوج $((v_1, \varphi_1, u_1), (v_2, \varphi_2, u_2))$ را ترکیب‌پذیر می‌گوییم در صورتی که $v_2 = u_1$ و در این حالت ضرب به صورت $(v_1, \varphi_1, u_1)(u_1, \varphi_2, u_2) = (v_1, \varphi_1 \circ \varphi_2, u_2)$ تعریف می‌شود. همچنین وارون به صورت $(v, \varphi, u)^{-1} = (u, \varphi^{-1}, v)$ تعریف می‌شود. قضیه کیلی^{۱۷} در مورد گروپویدها بیان می‌کند که هر گروپوید یکرخت با یک زیرگروپوید $\text{Iso}(X, p, U)$ است به‌ازای مجموعه‌های مناسب X و U . [۲۳].

گروپوید بنیادی. گروه بنیادی یا گروه پوانکاره فضای توپولوژیکی مثل X شناخته شده است. در تعریف گروه بنیادی تمرکز روی مسیرهای بسته در فضای X است؛ در صورتی که در گروپوید بنیادی تمامی مسیرهای موجود در X در نظر گرفته می‌شوند. در واقع اگر X فضای توپولوژیک باشد، رابطه هم‌توپ بودن بین مسیرهای واقع در X با نقطه شروع و پایان یکسان، یک رابطه هم‌ارزی است. گروپوید بنیادی مربوط به X که با $G = \Pi_1(X)$ نشان داده می‌شود یک گروپوید است که اگر از دید رسته‌ها نگاه کنیم داریم $\text{Ob}(G) = X$ و برای هر $x, y \in X$ مجموعه $V_G(x, y)$ کلاس‌های هم‌ارزی مسیرهای X از 0 به 1 است با شرط $\gamma(0) = x$ و $\gamma(1) = y$. اگر $\gamma \in V_G(x, y)$ و $\eta \in V_G(z, w)$ ، در این صورت $(\gamma, \eta) \in G^2$ به شرطی که $z = y$. همچنین $\gamma\eta \in V_G(x, w)$ از به هم چسباندن دو مسیر γ و η و پارامترسازی مجدد این مسیر در صورت نیاز با دامنه $[0, 1]$ به دست می‌آید. همچنین اگر $\gamma \in V_G(x, y)$ آنگاه $\gamma^{-1} \in \text{Mor}_G(y, x)$ به صورت $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ تعریف می‌شود.

براون نقل می‌کند که در طی نگارش کتاب [۳] درباره توپولوژی به مسئله‌ای از وان کامپن که در ۱۹۳۳ مطرح کرده است برخورد می‌کند. آن مسئله تعیین گروه بنیادی $\Pi(X, x)$ بر اساس اطلاعات U, V و W است به شرطی که فضای X اجتماعی از دو مجموعه باز U و V باشد و $W = U \cap V$. چون U, V و W لزوماً همبند نیستند براون مجبور می‌شود به جای در نظر گرفتن یک نقطه پایه $x \in X$ ، یک مجموعه مانند A از نقاط X را که شامل یک نقطه از هر مولفه همبندی W است در نظر بگیرد. او با استفاده از مفهوم گروپوید بنیادی حالت کلی‌تر مسئله وان کامپن را برای گروپوید بنیادی ثابت می‌کند و حالت گروه را از آن نتیجه می‌گیرد.

¹⁷Cayley
۳۳

خواننده علاقه‌مند می‌تواند در مقاله [۶] قضیه وان کامپن را برای گروپوئیدهای بنیادی مطالعه کند. به نظر می‌رسد فاکس [۱۴] اولین کسی است که اصطلاح «گروپوئید بنیادی» را به کار برده است.

نیم گروه‌های وارون در نقش گروپوئید. نیم گروه مجموعه‌ای مثل S به همراه یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر است. حالا اگر برای هر $s \in S$ عضو یکتای $t \in S$ موجود باشد که $sts = s, tst = t$ (در این حالت معمولاً می‌نویسند $t = s^*$) آنگاه S را یک نیم گروه وارون^{۱۸} می‌نامند. مجموعه اعضای خودتوان S را با $E(S)$ نشان می‌دهند و از تمام اعضای ss^* که $s \in S$ تشکیل شده است. $E(S)$ اهمیت ویژه‌ای در مطالعه نیم گروه‌های وارون دارد.

اکنون می‌توان هر نیم گروه وارون S را به صورت گروپوئید G_S در نظر گرفت. از نظر مجموعه‌ای، $G_S = S$ و مجموعه زوج‌های ترکیب‌پذیر یعنی G_S° ، برابر مجموعه $\{(s, t) \in S \times S : s^*s = tt^*\}$ است و ضرب همان ضرب نیم گروه S است. به سادگی می‌توان بررسی کرد و دید که G_S یک گروپوئید با فضای یکانی $E(S)$ است [۲۶].

گروپوئید طولپایی‌های جزئی. اگر H فضای هیلبرت باشد منظور از یک عملگر تصویر^{۱۹} روی H ، یک تبدیل خطی $P : H \rightarrow H$ است که $P^2 = P$. عملگر خطی و کراندار $T : H \rightarrow H$ را طولپای جزئی^{۲۰} می‌نامیم هرگاه TT^* عملگر تصویر باشد که در آن T^* الحاق عملگر T است. به وضوح T طولپایی جزئی است اگر و فقط اگر T^* چنین باشد. از دید هندسی T طولپایی جزئی است اگر و فقط اگر روی $\ker(T)^\perp$ ، فضای متعامد هسته T ، طولپایی باشد. لازم است تذکر دهیم که $\ker(T)^\perp$ برابر برد T^*T است و به فضای اولیه T موسوم است و به علاوه برد TT^* فضای نهایی T نامیده می‌شود. بنابراین هر طولپایی جزئی را می‌توان طولپایی از فضای اولیه به فضای نهایی‌اش در نظر گرفت. می‌توان نشان داد $TT^*T = T$ و $TT^*T^* = T^*$ و بنابراین مجموعه تمام طولپایی‌ها جزئی روی یک فضای هیلبرت یک نیم گروه وارون است و همان طور که در مثال بالا گفتیم، یک گروپوئید است و در این حالت فضای یکانی آن فضای عملگرهای تصویرند.

گروپوئیدهای اصلی و متعدی. گروپوئید G را اصلی^{۲۱} می‌نامند هرگاه نگاشت $x \mapsto (\beta, \alpha) : G \rightarrow G^\circ \times G^\circ$ یک به یک باشد و G را متعدی^{۲۲} می‌نامند هرگاه این نگاشت پوشا باشد. می‌توان نشان داد که G متعدی است اگر و فقط اگر رابطه هم‌ارزی تعریف شده روی G° فقط دارای یک رده هم‌ارزی باشد.

در گروپوئید انتقال $G = U \times S$ مثال^۲ می‌توان نشان داد G یک گروپوئید اصلی است اگر و فقط اگر S به صورت آزاد روی U عمل کند؛ یعنی برای هر $u, v \in U$ ، عضو $s \in S$ موجود باشد که $u.s = v$.

نمودار رابطه‌های هم‌ارزی که در مثال^۲ گفته شد هم گروپوئید اصلی است. همچنین اگر G یک گروپوئید اصلی باشد آنگاه نگاشت $x \mapsto (\beta(x), \alpha(x)) : G \rightarrow G^\circ \times G^\circ$ گروپوئید G را با نمودار رابطه هم‌ارزی که قبلاً روی G° تعریف کردیم، به طور جبری یکرخت می‌کند. توجه کنید که هر گروپوئید اجتماع مجزایی از زیرگروپوئیدهای متعدی خودش است. در واقع اگر $[u]$ رده هم‌ارزی $u \in G^\circ$ در رابطه هم‌ارزی تعریف شده روی G° باشد و مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی این رابطه هم‌ارزی را با G°/G نشان دهیم، در این صورت می‌توان نشان داد $G^{[u]} := \alpha^{-1}([u]) = \beta^{-1}([u])$ یک زیرگروپوئید متعدی از G است. به علاوه اگر $[u] \neq [v]$ آنگاه زیرگروپوئیدهای متناظر مجزا هستند و لذا $G = \bigcup_{[u] \in G^\circ/G} G^{[u]}$.

لازم است توجه دهیم که در هر گروپوئید متعدی همه گروه‌های یکرندی G_u^u ، $u \in G^\circ$ با هم یکرخت‌اند. ثابت شده است که هر گروپوئید متعدی یکرخت با حاصل ضرب دکارتی یک گروپوئید بدیهی (نمودار بزرگترین رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه) و یک گروه است. در واقع $G \simeq G_u^u \times (G^\circ \times G^\circ)$ که در آن G_u^u گروه یکرندی در G° است و $G^\circ \times G^\circ$ گروپوئید بدیهی روی G° است [۲۳].

¹⁸inverse semigroup ¹⁹projection ²⁰partial isometry ²¹principal ²²transitive

در پایان این بخش اجازه دهید نکته‌ای را بیان کنیم. اگر G گروپوید باشد، آن وقت G^2 مجموعه زوج‌های ترکیب‌پذیر یک ساختار گروپویدی می‌پذیرد. مجموعه زوج‌های ترکیب‌پذیر G^2 به صورت

$$(G^2)^2 = \{((x, y), (z, w)) \in G^2 \times G^2 : z = xy\}$$

و ضرب به صورت $(x, y)(xy, w) = (x, yw)$ و وارون به صورت $(x, y)^{-1} = (xy, y^{-1})$ تعریف می‌شود.

۳. گروپویدهای توپولوژیک و موضعا فشرده

اکنون اجازه دهید به گروپویدها قدری توپولوژی اضافه کنیم و ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. به یاد داشته باشید که گروه توپولوژیک گروهی است به همراه یک توپولوژی که نگاشت‌های ضرب و وارون نسبت به آن توپولوژی پیوسته‌اند. همچنین منظور از گروه توپولوژیک موضعا فشرده گروه توپولوژیکی است که توپولوژی آن موضعا فشرده و هاسدورف است. خواننده علاقه‌مند به آنالیز هارمونیک روی گروه‌های موضعا فشرده را به کتاب [۱۳] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. یک گروپوید توپولوژیکی، گروپویدی است به همراه یک توپولوژی که عمل ضرب از G^2 به G و عمل وارون از G به G پیوسته باشد. در اینجا G^2 با توپولوژی ارثی از توپولوژی حاصل ضربی روی $G \times G$ در نظر گرفته می‌شود.

همچنین اگر فرض کنیم G° با توپولوژی نسبی G ، هاسدورف باشد (این شرط بنابر تعریف گروپویدهای موضعا فشرده که در ادامه خواهد آمد برقرار است)، آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد $\Delta = \{(u, u) : u \in G^\circ\}$ زیرمجموعه‌ای بسته از $G^\circ \times G^\circ$ است و با توجه به پیوستگی نگاشت $(\alpha, \beta) : G \times G \rightarrow G^\circ \times G^\circ$ با تعریف $(x, y) \mapsto (\alpha(x), \beta(y))$ ، نتیجه می‌شود که $G^2 = (\alpha, \beta)^{-1}(\Delta)$ زیرمجموعه بسته‌ای از $G \times G$ است. بنابراین خیلی از ویژگی‌های توپولوژیکی گروپوید G به گروپوید G^2 انتقال می‌یابد.

گروپویدهای توپولوژیک که در آنالیز مطالعه می‌شوند موضعا فشرده‌اند. مشکلی که در این وجود دارد این است که برخی گروپویدهای موضعا فشرده‌ای که در عمل ظاهر می‌شوند معمولاً غیرهاسدورف‌اند. مثالی از این گروپویدها در ضمیمه سوم کتاب [۲۶] آمده است و معرفی این مثال خارج از اهداف این مقاله است (در آنجا نگاشت‌های انتگرالی روی گروپویدهای موضعا فشرده معرفی می‌شود و ثابت می‌شود که اگر گروپویدی هاسدورف باشد این نگاشت‌ها پیوسته‌اند. سپس ثابت می‌شود در گروپوید GS معرفی شده در تعریف ۲ مربوط به نیم‌گروه وارون S در [۲۷]، این نگاشت‌ها پیوسته نیستند و لذا این گروپوید هاسدورف نیست). از آنجا که در تعریف گروپوید موضعا فشرده که در ادامه خواهد آمد به اندازه کافی ویژگی‌هایی شبیه به هاسدورف بودن را داریم و می‌توان با استفاده از آن‌ها احکامی را که برای گروپویدهای موضعا فشرده هاسدورف برقرار است برای گروپویدهای غیرهاسدورف هم ثابت کرد، بنابراین در تعریف گروپوید موضعا فشرده شرط هاسدورف بودن را قرار نمی‌دهیم. ولی برخی نویسندگان از جمله جان رنو در رساله دکتری خود [۳۱] که یکی از مراجع مهم در نظریه گروپویدها است در تعریف گروپوید موضعا فشرده شرط هاسدورف بودن را قرار داده است. تعریف زیر را از کتاب [۲۶] می‌آوریم.

تعریف ۲.۳. گروپوید موضعا فشرده گروپویدی توپولوژیک است که در شرایط زیر صدق کند:

- (الف) فضای یکانی G یعنی G° با توپولوژی نسبی حاصل از G موضعا فشرده و هاسدورف باشد؛
- (ب) یک خانواده شمارا مثل C از زیرمجموعه‌های فشرده و هاسدورف از G موجود باشد که خانواده درون اعضای C یک پایه برای توپولوژی G تشکیل دهند؛
- (پ) هر G^u زیرمجموعه‌ای موضعا فشرده و هاسدورف با توپولوژی نسبی حاصل از G باشد؛
- (ت) فضای G یک سیستم هار چپ داشته باشد.

در اینجا منظور از یک سیستم هار چپ عبارت است از یک خانواده مثل $\lambda = \{\lambda^u\}_{u \in G^\circ}$ که در آن هر λ^u یک اندازه بولر مثبت روی فضای هاسدورف موضعا فشرده G^u است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) محمول هر λ^u برابر کل مجموعه G^u است؛

(۲) برای هر $g \in C_c(G)$ ، تابع g° با تعریف $g^\circ(u) = \int_{G^u} g(z) d\lambda^u(z)$ روی G° متعلق به $C_c(G^\circ)$ ، توابع پیوسته با محمول فشرده روی G° ، باشد؛

(۳) برای هر $f \in C_c(G)$ و هر $x \in G$ ،

$$\int_{G^{\alpha(x)}} f(xz) d\lambda^{\alpha(x)}(z) = \int_{G^{\beta(x)}} f(y) d\lambda^{\beta(x)}(y).$$

توجه کنید که ضرب موجود در انتگرال سمت چپ تعریف شده است زیرا $z \in G^{\alpha(x)}$ و لذا $\beta(z) = \alpha(x)$ ؛ پس $(x, z) \in G^\circ$.

توجه داشته باشید که اگر برای هر $u \in G^\circ$ روی زیرمجموعه‌های بورل G_u تعریف کنیم $\lambda_u(E) = \lambda^u(E^{-1})$ ، آنگاه $\{\lambda_u\}_{u \in G^\circ}$ یک سیستم هار راست تعریف می‌کند.

مهم‌ترین ابزاری که برای مطالعه آنالیز روی گروه توپولوژیک موضعا فشرده G ساخته شده است، اندازه مثبت رادونی مثل μ روی G است که برای هر $x \in G$ و هر زیرمجموعه بورل E از G ، $\mu(xE) = \mu(E)$ ، این اندازه را آلفرد هار در سال ۱۹۳۳ تعریف کرد و آن را اندازه هار چپ می‌نامند. وجود و یگانگی اندازه هار چپ روی گروه‌های موضعا فشرده را اولین بار آندره وی با استفاده از اصل انتخاب در [۳۶] ثابت کرد. پس از آن آثری کارتان اثبات او را بدون استفاده از اصل انتخاب بازنویسی کرد [۷]. با استفاده از اندازه هار روی گروه‌های موضعا فشرده فضاهای تابعی مهمی روی این گروه‌ها می‌توان ساخت. همچنین با داشتن این اندازه می‌توان نظریه نمایش گروه‌های متناهی را به گروه‌های موضعا فشرده تعمیم داد. فون نویمان با استفاده از اندازه هار مسئله پنجم هیلبرت را در مورد گروه‌های توپولوژیک فشرده اثبات کرد.

برخلاف گروه‌های موضعا فشرده نمی‌توان از ویژگی‌های (الف)، (ب) و (پ) تعریف ۲.۳ وجود سیستم هار چپ را نتیجه گرفت. سدا در [۲۴] مثالی از یک گروپوئید توپولوژیک ذکر می‌کند که در ویژگی‌های (الف)، (ب) و (پ) تعریف ۲.۳ صدق می‌کند اما ویژگی (ت) را ندارد؛ یعنی سیستم هار چپ ندارد. همچنین سیستم هار برای گروپوئیدهای موضعا فشرده لزوماً یکتا نیست، به مثال زیر که از کتاب [۲۶] آورده‌ایم توجه کنید.

مثال ۳.۳. فرض کنید X یک فضای موضعا فشرده، شمارش‌پذیر نوع دوم و هاسدورف باشد. اگر G را بزرگ‌ترین رابطه هم‌ارزی روی X در نظر بگیریم؛ یعنی $G = X \times X$ ، آن‌وقت G با ساختار معرفی شده در مثال ۲ یک گروپوئید است و $G^\circ = \{(x, x) : x \in X\}$ و می‌توان آن را با X یکی گرفت. فضای G با توپولوژی حاصل ضربی در سه ویژگی اول تعریف گروپوئید موضعا فشرده صدق می‌کند. برای ساختن یک سیستم هار چپ روی G ، فرض کنید μ اندازه بورل مثبت منظمی روی X باشد. برای هر $u \in X$ اندازه $\lambda^u = \delta_u \times \mu$ را روی $G^u = \{u\} \times X$ در نظر بگیرید که در آن δ_u اندازه دیراک در u است. اکنون برای هر زیرمجموعه بورل A از X ، تعریف کنید $\lambda^u(\{u\} \times A) = \mu(A)$. به سادگی می‌توان بررسی کرد که $\{\lambda^u\}_{u \in X}$ یک سیستم هار چپ روی G است که توسط μ ساخته می‌شود. از آنجا که در حالت کلی اندازه‌های مختلف μ روی فضای موضعا فشرده X موجود است و مثلاً می‌توان دو اندازه دو به دو منفرد نسبت به هم مثل μ_1 و μ_2 را در نظر گرفت، بنابراین سیستم هار چپ ساخته شده توسط μ یکتا نیست.

این تعریف از سیستم هار چپ که گاهی به آن سیستم هار چپ پیوسته هم گفته می‌شود منسوب به وستمن [۳۸] است.

۴. گروپوئیدهای اندازه‌دار و نمایش‌های یکانی آن‌ها

دیدیم در تعریف گروپوئید موضعا فشرده G وجود هیچ اندازه‌ای روی G فرض گرفته نشده است. حال اگر روی G° یک اندازه وجود داشته باشد، با استفاده از آن و سیستم هار می‌توان یک اندازه روی G ساخت. وجود یک اندازه روی G ابزاری برای معرفی نظریه نمایش روی گروپوئیدها و ساختن فضاهای تابعی روی آن‌ها به دست می‌دهد. در این بخش به مطالعه این گروپوئیدها می‌پردازیم.

تبصره ۱.۴. اگر G گروپویدی موضعا فشرده باشد و μ اندازه احتمال روی G° باشد آنگاه μ و سیستم هار $\{\lambda^u\}_{u \in G^\circ}$ دو اندازه منظم بول مثبت ν و ν^{-1} روی زیرمجموعه‌های بول G به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\nu(E) = \int_{G^\circ} \lambda^u(E \cap G^u) d\mu(u), \quad \nu^{-1}(E) = \nu(E^{-1}).$$

توجه کنید که با استفاده از این اندازه‌ها می‌توان فضاهای $L^p(G, \nu)$ را تعریف کرد.

اندازه μ را شبه‌پایا ^{۲۳} می‌نامند اگر $\nu \sim \nu^{-1}$ ؛ یعنی هریک نسبت به دیگری پیوسته مطلق باشد. اگر μ شبه‌پایا باشد مشتق رادون-نیکودیم ν نسبت به ν^{-1} را با $D_\mu = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ نشان می‌دهند و آنرا تابع پیمانه‌ای μ می‌نامند. در حالتی که G گروه موضعا فشرده با اندازه هار چپ λ و $\mu = \delta_e$ اندازه دیراک در عضو همانی G باشد آن وقت $\nu = \lambda$ و $D_{\delta_e} = \Delta$ همان تابع پیمانه‌ای G است و $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ یک همریختی گروهی پیوسته است.

در حالت گروپویدهای موضعا فشرده شبه چینی نتایجی برقرار است. پیتز هان در [۱۶] ثابت کرده است که اگر μ اندازه‌ای شبه‌پایا روی G° باشد، $D_\mu(x^{-1}) = D_\mu(x)^{-1}$ همه‌جا به جز روی یک مجموعه ν -پوچ روی G برقرار است و $D_\mu(xy) = D_\mu(x)D_\mu(y)$ همه‌جا به جز روی یک مجموعه ν^2 -پوچ روی G^2 برقرار است که در اینجا اندازه ν^2 روی G^2 به صورت

$$\nu^2 = \int_{G^\circ} \int_{G^u} \int_{G_u} d\lambda_u(x) d\lambda^u(y) d\mu(u)$$

تعریف می‌شود. آلن پترسون در کتابش [۲۶] اشاره کرده است که با استفاده از [۲۹، قضیه ۲۰.۳] و نکته‌ای که پاول مولی درباره تعریف تابع پیمانه‌ای در [۲۳] آورده است می‌توان نشان داد که D_μ یک همریختی بول روی G است؛ یعنی $D(x^{-1}) = D(x)^{-1}$ برای هر $x \in G$ و $D_\mu(xy) = D_\mu(x)D_\mu(y)$ برای هر $(x, y) \in G^2$. اگر تعریف کنیم $d\nu_\circ = D_\mu^{-1} d\nu$ ، آنگاه $\nu_\circ$ اندازه‌ای روی G تعریف می‌کند که برای هر زیرمجموعه بول E از G ، $\nu_\circ(E) = \nu_\circ(E^{-1})$ ، مجموعه تمام اندازه‌های شبه‌پایا روی G° را با $\mathcal{Q}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴. اگر G یک گروپوید موضعا فشرده به همراه سیستم هار چپ λ و اندازه شبه‌پایا μ به مفهوم تبصره ۱.۴ باشد، در این صورت (G, λ, μ) را یک «گروپوید اندازه‌دار» ^{۲۴} می‌نامند.

اکنون ابزارهای لازم برای تعریف نمایش‌های یکانی گروپویدهای اندازه‌دار و به دنبال آن معرفی ساختارهای تابعی مربوط مثل C^* -جبر گروپویدی را داریم.

یادآوری می‌کنیم که اگر G یک گروه موضعا فشرده باشد و H یک فضای هیلبرت باشد عملگر T روی H را یکانی می‌نامیم هرگاه $I = T^*T = TT^*$ که در آن I عملگر همانی است. مجموعه تمام عملگرهای یکانی روی H را با $U(H)$ نشان می‌دهند و با عمل ترکیب گروه است. یک نمایش یکانی از G روی H یک همریختی گروهی $\pi : G \rightarrow U(H)$ است که $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1}$ و برای هر $u, v \in H$ نگاشت $\pi_{u,v} : x \mapsto \langle \pi(x)u, v \rangle$ پیوسته است. نشان داده شده است که نمایش‌های یکانی G با نمایش‌های ناتباهیده ^{۲۵} $L^1(G)$ متناظر است: بدین معنی که هر نمایش یکانی π از G روی H یک نمایش ناتباهیده π_L از $L^1(G)$ روی H القا می‌کند به این صورت که $\pi_L(f) : H \rightarrow H$ برای هر $f \in L^1(G)$ با فرمول

$$\langle \pi_L(f)u, v \rangle = \int_G f(x) \langle \pi(x)u, v \rangle d\lambda(x)$$

تعریف می‌شود و برعکس هر نمایش ناتباهیده از $L^1(G)$ از یک نمایش یکانی روی G به دست می‌آید. در این تناظر نمایش‌های تحویل‌ناپذیر به هم مربوط می‌شوند [۱۳].

²³quasi-invariant ²⁴measured groupoid ²⁵nondegenerate

ناتابیده بودن یک نمایش از $L^1(G)$ روی یک فضای هیلبرت به این معنی است که فضای تولیدشده توسط $\pi_L(f)$ که در آن $f \in L^1(G)$ و $\xi \in \mathcal{H}$ در $\mathcal{H}$ چگال است. نمایش های یکانی ابزاری برای ساختن C^* -جبر، جبر فوریه و جبر فوریه-اشتیلیس گروه G اند که در ادامه این ساختارها را برای گروپویدهای اندازه دار تعریف خواهیم کرد. برای معرفی نمایش یکانی گروپویدها احتیاج به مفهوم کلاف فضاهای هیلبرت داریم. نظریه کلاف فضاهای هیلبرت در [۹] به صورت زیر تعریف شده است که در [۲۶] هم به کار گرفته شده است.

تعریف ۲.۴. یک کلاف از فضاهای هیلبرت با سه تایی $(X, \{H_u\}_{u \in X}, \mu)$ تعریف می شود که در آن X فضای هاسدورف موضعا فشرده شمارش پذیر نوع دوم، μ یک اندازه احتمال روی X و برای هر $u \in X$ مجموعه H_u فضای هیلبرت است. منظور از یک بخش $\mathcal{B}$ از این کلاف، تابعی مثل $X \rightarrow \bigcup_{u \in X} H_u : \xi \mapsto \xi(u) \in H_u$ داریم $u \in X$ که برای هر $u \in X$ داریم $\xi(u) \in H_u$.

یک زیرفضای خطی از این بخش ها مثل S موجود است که اعضای آن را بخش های اندازه پذیر می نامند و در ویژگی های خاصی صدق می کند [۲۶]. مهم ترین ویژگی اعضای S این است که برای هر $\xi \in S$ تابع $\|\xi(u)\|$ تابعی $u \mapsto \|\xi(u)\|$ تابعی μ -اندازه پذیر روی X است و همچنین برای هر $\xi, \eta \in S$ تابع $\langle \xi(u), \eta(u) \rangle$ تابعی $u \mapsto \langle \xi(u), \eta(u) \rangle$ تابعی μ -اندازه پذیر است که نرم و ضرب داخلی ظاهر شده در سمت راست در فضای هیلبرت H_u است.

به هر کلاف از فضاهای هیلبرت، فضای $L^2(X, \{H_u\}, \mu)$ از کلاس های هم ارزی بخش های اندازه پذیر ξ وابسته می شود که در آن $\|\xi(u)\|^2 \rightarrow u$ انتگرال پذیر است. این فضا با ضرب داخلی و نرم القایی

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_X \langle \xi(u), \eta(u) \rangle d\mu(u), \quad \|\xi\|_2 = \left(\int_X \|\xi(u)\|^2 d\mu(u) \right)^{\frac{1}{2}}$$

فضای هیلبرت است.

اکنون آماده هستیم تا تعریف نمایش یکانی را طبق [۳۱] از جان رنو بیاوریم.

تعریف ۳.۴. اگر (G, λ, μ) یک گروپوید اندازه دار و $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ یک کلاف از فضاهای هیلبرت باشد، منظور از یک نمایش یکانی برای G روی این کلاف، یک نگاشت L روی G است که به هر $x \in G$ عملگر یکانی $L(x) \in B(H_{\alpha(x)}, H_{\beta(x)})$ را با شرایط زیر نسبت می دهد:

- (۱) برای هر $u \in G^\circ$ ، $L(u)$ عملگر همانی روی H_u است؛
- (۲) برای ν^2 -تقریبا همه $(x, y) \in G^2$ ، $L(xy) = L(x)L(y)$ ؛
- (۳) برای ν -تقریبا همه $x \in G$ ، $L(x^{-1}) = L(x)^{-1}$ ؛
- (۴) برای هر $\xi, \eta \in L^2(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ ، $x \mapsto \langle L(x)\xi(\alpha(x)), \eta(\beta(x)) \rangle$ تابعی ν -اندازه پذیر باشد.

توجه کنید که ضرب داخلی استفاده شده در (۴) تعریف شده است زیرا $L(x)\xi(\alpha(x)) \in H_{\beta(x)}$. همچنین μ اندازه ای شبه پایا روی G° با اندازه های ساخته شده ν ، ν^{-1} و ν_* است.

اجازه دهید اشاره ای کنیم به نمایش منظم چپ روی گروه های موضعا فشرده. در این نمایش G را به صورت عملگرهای یکانی روی $L^2(G, \lambda)$ نمایش می دهند. در واقع، $L : G \rightarrow B(L^2(G))$ به صورت $x \mapsto L(x)$ تعریف می شود که در آن عملگر $L(x) : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ به تابع $f \in L^2(G)$ تابع $L_x f$ در $L^2(G)$ با فرمول $L_x f(y) = f(x^{-1}y)$ را نسبت می دهد. جان رنو در [۳۱] نظریه نمایش گروپویدهای اندازه دار را بسیار موشکافانه بررسی کرده است. او برای تعریف نمایش منظم چپ روی گروپوید اندازه دار G ابتدا $H_u = L^2(G^u, \lambda^u)$ را برای هر $u \in G^2$ ، در نظر گرفته است و سپس نشان داده است که $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ یک کلاف از فضاهای هیلبرت به مفهوم گفته شده در ۲.۴ است و $L_{\text{red}}(x)$ را برای $x \in G$ به صورت

است و آن را نمایش منظم چپ نامیده است. $L_{\text{red}}(x) : H_{\alpha(x)} \rightarrow H_{\beta(x)}$ با فرمول $L_{\text{red}}(x)(h)(z) = h(x^{-1}z)$ تعریف کرده و نشان داده است که این نمایش یکانی از G است.

تعریف ۴.۴ ([۲۱]). فرض کنید μ یک اندازه شبه پایا روی G° و ν اندازه ساخته شده توسط سیستم هار λ و μ باشد. زیر مجموعه A از G° را تقریباً پایا می‌نامیم به شرطی که $\alpha(x) \in A$ اگر و فقط اگر $\beta(x) \in A$ برای ν -تقریباً همه $x \in G$. اکنون اندازه μ را ارگودیک ν می‌نامیم اگر هر زیرمجموعه تقریباً پایا از G° پوچ یا همپوچ (یعنی با متمم پوچ) باشد.

در ادامه از مفهوم زیرکلاف‌های هیلبرت که در [۹، صفحه ۱۷۳] آمده است استفاده می‌کنیم.

تعریف ۵.۴. فرض کنید μ یک اندازه شبه پایا روی G° و L نمایشی از G روی کلاف فضاهای هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ باشد. زیرکلاف $(G^\circ, \{M_u\}, \mu)$ را پایای نابديهی می‌نامیم هرگاه

$$(۱) \text{ برای } \nu\text{-تقریباً همه } x \in G, L(x)M_{\alpha(x)} \subseteq M_{\beta(x)},$$

$$(۲) \mu\{u : M_u \neq 0\} > 0 \text{ و } \mu\{u : M_u \neq H_u\} > 0.$$

تبصره ۲.۴ ([۹]). وقتی $(G^\circ, \{M_u\}, \mu)$ زیرکلافی از $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ باشد، بخش

$$P : G^\circ \rightarrow \bigcup_{u \in G^\circ} B(H_u), \quad u \mapsto P(u) \in B(H_u)$$

که در آن $P(u)$ تصویر روی M_u است، یک بخش اندازه‌پذیر کراندار از عملگرهای تصویر است و $L^\infty(G^\circ, \{M_u\}, \mu)$ زیرفضای بسته‌ای از $L^\infty(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ است که در اینجا $P = \int^\oplus P(u) d\mu(u)$ عمگر تصویر روی این زیرفضا است.

تعریف ۶.۴. اگر G یک گروپوئید موضعا فشرده با سیستم هار λ باشد و $\mu \in \mathcal{Q}$. نمایش L از G روی کلاف هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ را تحویل‌ناپذیر می‌نامند هرگاه به مفهوم تعریف ۵.۴ زیرکلاف پایای نابديهی نداشته باشد، در غیر این صورت آن را تحویل‌پذیر می‌نامند.

مفهوم تحویل‌ناپذیری یا تحویل‌پذیری نمایش‌های C^* -جبرها روی فضاهای هیلبرت به داشتن یا نداشتن زیرفضای پایای بسته ارتباط دارد.

تبصره ۳.۴. اگر μ ارگودیک نباشد آنگاه زیرمجموعه تقریباً پایای E از G° موجود است به طوری که $\mu(E) > 0$ و $\mu(E^c) > 0$. اکنون اگر L یک نمایش از G روی کلاف فضاهای هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ باشد آنگاه $(G^\circ, \{M_u\}, \mu)$ که در آن

$$M_u = \begin{cases} H_u & \text{اگر } u \in E \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

یک زیرکلاف از $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ است و به وضوح تحت L پایا است. بنابراین وقتی صحبت از نمایش‌های تحویل‌ناپذیر می‌کنیم اندازه μ ارگودیک است. همچنین وقتی μ ارگودیک است زیرکلاف $(G^\circ, \{M_u\}, \mu)$ از $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ نابديهی است اگر و فقط اگر $\mu\{u : 0 \neq M_u \neq H_u\} > 0$.

۱.۴. C^* -جبر گروپویدی. برای گروه موضعا فشرده G ، اگر $\Sigma(G)$ را خانواده کلاس‌های هم‌ارزی نمایش‌های یکانی G در نظر بگیریم هر نمایش $\pi \in \Sigma(G)$ از G به گروه عملگرهای یکانی روی فضای هیلبرت H_π یک نمایش از $L^1(G)$ روی H_π به صورت

$$\langle \pi(f)v, w \rangle = \int_G f(x) \langle \pi(x)v, w \rangle d\lambda(x)$$

تعریف می‌کند (توجه کنید که طبق قضیه نمایش ریس هر عضو فضای هیلبرت یک تابع خطی کراندار روی آن فضای هیلبرت است که توسط ضرب داخلی تعریف می‌شود). روی $L^1(G)$ نرم $\|\cdot\|_{C^*} = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \in \Sigma(G)\}$ را تعریف می‌کنند؛ $L^1(G)$ با این نرم کامل نیست. کامل شده $L^1(G)$ با این نرم را C^* -جبر گروه G می‌نامند و با $C^*(G)$ نشان می‌دهند. برای گروپوید موضعا فشرده G فضای توابع مختلط با محمل فشرده روی G را با $C_c(G)$ نشان می‌دهند. پیتز هان در [۱۷] روی این فضا نرم $\|\cdot\|_I$ را به صورت $\|f\|_I = \max\{\|f\|_{I,r}, \|f\|_{I,l}\}$ تعریف کرده است، که در آن

$$\|f\|_{I,r} = \sup \left\{ \int_{G^u} |f(t)| d\lambda^u(t) : u \in G^\circ \right\}, \quad \|f\|_{I,l} = \sup \left\{ \int_{G_u} |f(t)| d\lambda_u(t) : u \in G^\circ \right\}.$$

جان رنو نشان داده است که $C_c(G)$ با نرم $\|\cdot\|_I$ و ضرب و برگشت^{۲۸} زیر، یک $*$ -جبر نرم‌دار جدایی‌پذیر است و نگاشت برگشت $f \mapsto f^*$ یک طولپایی است:

$$f * g(x) = \int_{G^{\beta(x)}} f(y)g(y^{-1}x) d\lambda^{\beta(x)}(y), \quad f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}.$$

با توجه به تعریف سگال [۲۵]، هر زیرجبر از عملگرهای کراندار روی هر فضای هیلبرت که نسبت به نرم و الحاق عملگرها بسته باشد C^* -جبر است. بنابراین اگر نمایش‌های I -نرم پیوسته $*$ -جبر نرم‌دار $C_c(G)$ را بشناسیم می‌توانیم با این نمایش‌ها یک C^* -جبر جدایی‌پذیر تولید کنیم. جان رنو این کار را در [۲۱] انجام داده است که در ادامه بیان می‌کنیم. برای هر نمایش یکانی L از گروپوید اندازه‌دار G روی یک کلاف از فضاهای هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ تعریف می‌کنیم $\pi_L : C_c(G) \rightarrow B(\mathcal{H})$ و $\mathcal{H} = L^2(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ را به صورت

$$\langle \pi_L(f)\xi, \eta \rangle = \int_G f(x) \langle L(x)(\xi(\alpha(x))), \eta(\beta(x)) \rangle d\nu_\circ(x)$$

تعریف می‌کنیم. در [۲۱] ثابت شده است که π_L یک نمایش ناتاباهیده از $C_c(G)$ روی $\mathcal{H}$ است. همچنین $\pi_L(f^*) = \pi_L(f)^*$ است. و $\|\pi_L\| \leq 1$ و لذا $\xi, \eta \in \mathcal{H}, f \in C_c(G)$ برای هر $\langle \pi_L(f)\xi, \eta \rangle \leq \|f\|_I \|\xi\|_2 \|\eta\|_2$ است، یعنی نشان داده شده است که برای گروپوید اندازه‌دار G هر نمایش از $C_c(G)$ روی یک فضای هیلبرت H به صورت π_L است که در آن L یک نمایش یکانی از G روی یک کلاف از فضاهای هیلبرت است. در تناظر $L \rightarrow \pi_L$ هم‌ارز بودن و تحویل‌ناپذیری نمایش‌ها حفظ می‌شود.

اکنون که با نمایش‌های یکانی گروپویدهای اندازه‌دار آشنا شدیم اگر برای هر $f \in C_c(G)$ تعریف کنیم

$$\|f\|_{C^*} = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \text{ یک نمایش یکانی کراندار است}\}$$

این یک C^* -نرم است و کامل شده $C_c(G)$ با این نرم را C^* -جبر گروپوید G می‌گویند و بنابر [۲۶]، قضیه ۱.۱.۳ [۱۰] نظریه نمایش G و $C^*(G)$ با تناظر توضیح داده‌شده در بالا یکی هستند. مولی و ویلیامز در [۲۴] ثابت کردند که $C^*(G)$ یکریخت با $K(H)$ ، فضای عملگرهای فشرده روی یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H ، است. در حالت خاص در [۲۳] ثابت شده است که اگر $G = X \times X$

²⁸involution

گروپوید مثال ۲ به همراه سیستم هار مثال ۳.۳ توسط اندازه μ باشد آنگاه $C^*(G)$ یکرخت با C^* -جبر عملگرهای فشرده روی $L^2(X, \mu)$ است.

۲.۴. جبر فوریه و فوریه-اشتیلیس. ایماارد در [۱۲] برای گروه موضعا فشرده G جبرهای باناخ جابه‌جایی $A(G)$ و $B(G)$ را تعریف کرد که به ترتیب به جبر فوریه و فوریه-اشتیلیس موسوم‌اند. گفتیم که هر نمایش یکانی π از G روی فضای هیلبرت H_π ، یک نمایش π از $L^1(G)$ روی H_π القا می‌کند. برای هر $v, w \in H_\pi$ قرار دهید $\pi_{v,w}(x) = \langle \pi(x)v, w \rangle$ ، اینها توابعی مختلط و پیوسته روی G اند و به آن‌ها ضرایب نمایش π روی فضای H_π می‌گویند. در حالتی که H_π از بعد متناهی n است هر $\pi(x)$ یک ماتریس $n \times n$ وارون‌پذیر است که درایه‌های آن $\langle \pi(x)e_i, e_j \rangle$ است که در اینجا e_i ها یک پایه استاندارد است. مجموعه

$$B(G) = \{\pi_{v,w} : v, w \in H_\pi \text{ و } \pi \text{ یک نمایش یکانی است}\}$$

با جمع و ضرب نقطه‌ای تشکیل یک جبر از توابع پیوسته روی G می‌دهد. توابع $\pi_{v,w}$ روی $L^1(G)$ به صورت

$$\pi_{v,w}(f) = \int_G f(x) \pi_{v,w}(x) d\lambda(x)$$

گسترش می‌یابند. روی $B(G)$ نرم

$$\|\pi_{v,w}\| = \sup\{|\pi_{v,w}(f)| : f \in L^1(G), \|f\|_{C^*} \leq 1\}$$

تعریف می‌شود و $B(G)$ با این نرم جبر باناخ می‌شود. بستار زیرفضای تولیدشده توسط مجموعه اعضایی از $B(G)$ بامحمل فشرده را با $A(G)$ نشان می‌دهند. ثابت شده است که $A(G)$ ایدالی از $B(G)$ است و $A(G) = B(G)$ اگر و فقط اگر G فشرده باشد. در حالتی که G گروهی آبلی باشد $A(G) \cong L^1(\hat{G})$ و $B(G) \cong M(\hat{G})$ ، که در آن $\hat{G}$ گروه دوگان G و $M(\hat{G})$ جبر اندازه‌های رادون بولر مثبت روی $\hat{G}$ است. اطلاعات بیشتر درباره گروه دوگان گروه موضعا فشرده در [۱۳] آمده است.

اگر $A(G_1) \cong A(G_2)$ آنگاه G_1 و G_2 یکرخت‌اند، همین نتیجه برای $B(G)$ هم برقرار است. ناگفته نماند که هر عضو از $B(G)$ یک ترکیب خطی متناهی از توابع معین مثبت پیوسته و هر تابع معین مثبت و پیوسته به شکل اعضای $B(G)$ است. پس از نگاه دیگری می‌توان گفت $B(G)$ مجموعه تمام ترکیب‌های خطی متناهی با ضرایب مختلط از توابع معین مثبت پیوسته روی G است. منظور از تابع معین مثبت، تابع مختلطی مثل ϕ روی G است که $\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \phi(x_j^{-1} x_i) \geq 0$ که در اینجا $n \in \mathbb{N}$ ، $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ و $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$.

اخیرا نظریه جبرهای فوریه و فوریه-اشتیلیس روی گروپویدها از دو مسیر مختلف و تقریبا همزمان گسترش داده شده است. از یک طرف جان رنو در [۳۲] این جبرها را با استفاده از نمایش‌های یکانی ساخته است و لذا فرض کرده است که گروپوید G اندازه‌دار باشد. در این حالت این نظریه تعمیمی از حالت گروهی است. جان رنو نمایش‌های یکانی را روی کلافهای اندازه‌پذیر فضاهای هیلبرت در نظر گرفته است. از طرف دیگر آرنل رمزی و والت در [۳۰] این جبرها را برای گروپوید موضعا فشرده G بدون در نظر گرفتن اندازه شبه‌پایا روی G° ساخته‌اند. در این حالت G اندازه‌دار نیست و لذا نمایش‌های یکانی روی آن به صورتی که گفتیم قابل تعریف نیست. آن‌ها یک ساختار بولر روی G در نظر گرفتند و $B(G)$ را فضای برداری تولیدشده توسط توابع معین مثبت بولر و کراندار روی G تعریف کرده‌اند. مقاله رمزی و والت در زمان انجام کار جان رنو به طور غیررسمی منتشر شده بود و جان رنو از آن اطلاع داشته است و در مقاله خود نیز اشاره می‌کند که نظریه او در خصوص این جبرها با نظریه رمزی و والت کمی همپوشانی دارد. آلن پترسون هم پس از جان رنو و رمزی و والت در [۲۸] مشابه با جان رنو نوع دیگری از این جبرها را تعریف می‌کند با این تفاوت که نمایش‌های یکانی که در نظر می‌گیرد روی کلاف پیوسته‌ای از فضاهای هیلبرت‌اند. پترسون نرم تعریف‌شده روی $B(G)$ توسط جان رنو و رمزی-والت را به ترتیب با $\|\cdot\|_{cb}$ و $\|\cdot\|$ نشان می‌دهد و $B(G)$ تعریف‌شده توسط خود را با این دو نرم در نظر می‌گیرد و مشابه با رویکرد جان رنو ثابت می‌کند $(B(G), \|\cdot\|)$ جبر باناخ است. او ثابت می‌کند روی $B(G)$ ، $\|\cdot\|_{cb} \leq \|\cdot\|$ و

$(B(G), \|\cdot\|_{cb})$ کامل نیست و لذا این دو نرم معادل نیستند. لازم است توجه دهیم که این دو نرم زمانی که G گروه موضعا فشرده است یکسان‌اند. در ادامه این جبرها را برای گروپوئیدهای اندازه‌دار معرفی می‌کنیم.

۳.۴. جبرهای فوریه و فوریه-اشتیلیس روی گروپوئیدهای اندازه‌دار. در این قسمت (G, λ, μ) یک گروپوئید اندازه‌دار با سیستم هار $\lambda = \{\lambda^u\}_{u \in G^\circ}$ و اندازه شبه‌پایای μ روی G° است. برای $1 \leq p \leq \infty$ ، $L^p(G)$ همان $L^p(G, \nu)$ است که در آن ν اندازه ساخته‌شده توسط سیستم هار λ و اندازه μ همانند تبصره ۱.۴ است. قضیه زیر در [۳۰] اثبات شده است.

قضیه ۷.۴ ([۳۰]). اگر (G, λ, μ) یک گروپوئید اندازه‌دار باشد، شرایط زیر برای تابع $\phi \in L^\infty(G)$ معادل‌اند:

(۱) برای هر عدد صحیح مثبت n و هر $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ نامساوی $\sum_{i,j} c_j \bar{c}_i \phi(x_i^{-1} x_j) \geq 0$ تقریباً همه $u \in G^\circ$ و λ^u - تقریباً همه $x_1, x_2, \dots, x_n \in G^u$ برقرار است.

(۲) برای هر $f \in C_c(G)$ نامساوی $\int \int \phi(x_i^{-1} x_j) f(x_j) \overline{f(x_i)} d\lambda^u(x_i) d\lambda^u(x_j) \geq 0$ تقریباً همه $u \in G^\circ$ ها برقرار است.

(۳) یک کلاف اندازه‌پذیر از فضاهای هیلبرت مثل $\mathcal{H} = \{H_u\}_{u \in G^\circ}$ و یک بخش اندازه‌پذیر مثل ξ در $L^\infty(G^\circ, \mathcal{H})$ موجود است به طوری که $\phi(x) = \langle \xi, \xi \rangle(x) := \langle \xi(\beta(x)), L(x)\xi(\alpha(x)) \rangle$ که در آن L نمایشی یکانی از G روی $\mathcal{H}$ است.

اعضای $L^\infty(G)$ را که در یکی و لذا تمام شرایط قضیه بالا صدق کند تابعی از نوع مثبت می‌نامند و مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی آن‌ها را با $P(G)$ نشان می‌دهند. توجه کنید که دو تابع را هم‌ارز می‌گیرند هرگاه تقریباً همه‌جا برابر باشند.

ثابت می‌شود مجموعه توابع از نوع مثبت نسبت به جمع و ضرب نقطه‌ای بسته است. جان رنو ثابت می‌کند $\phi \in L^\infty(G)$ ترکیب خطی از اعضای $P(G)$ است اگر و فقط اگر یک نمایش یکانی از G روی یک کلاف اندازه‌پذیر از فضاهای هیلبرت $\mathcal{H} = \{H_u\}_{u \in G^\circ}$ و دو بخش $\xi, \eta \in L^\infty(G^\circ, \mathcal{H})$ موجود باشد به طوری که

$$\phi(x) = \langle \xi, \eta \rangle(x) := \langle \xi(\beta(x)), L(x)\eta(\alpha(x)) \rangle$$

او چنین عضوی از $L^\infty(G)$ را یک ضریب یکانی اساساً کراندار می‌نامد و مجموعه تمام ضرایب یکانی و اساساً کراندار را با $B(G)$ نشان می‌دهد. $B(G)$ زیرفضایی خطی از $L^\infty(G)$ است و نسبت به ضرب نقطه‌ای و برگشت $\phi^*(x) = \overline{\phi(x^{-1})}$ بسته است؛ یعنی یک $*$ -جبر جابه‌جایی است. چون در اینجا ضرایب نمایش‌های یکانی در نظر گرفته شده است بنابراین اگر $\phi = \langle \xi, \eta \rangle$ آنگاه $\phi^* = \langle \eta, \xi \rangle$. او روی $B(G)$ نرم $\|\phi\|_{B(G)} = \inf \|\xi\|_\infty \|\eta\|_\infty$ (اینفیمم روی تمام نمایش‌های $\phi = \langle \xi, \eta \rangle$ گرفته می‌شود) را تعریف و ثابت می‌کند $B(G)$ با این نرم فضای باناخ و لذا جبر باباخ جابه‌جایی و برگشت‌دار است و آنرا جبر فوریه-اشتیلیس گروپوئید اندازه‌دار G می‌نامد.

نکته جالب این است که اگر (X, μ) فضای اندازه و $G = X \times X$ گروپوئید بدیهی مثال ۲ باشد، آنگاه $B(G)$ با فضای توابع هیلبرتی که گروتندیک معرفی کرده است یکسان می‌شود. در واقع $\phi \in L^\infty(X \times X, \mu \times \mu)$ متعلق به $B(G)$ است اگر و فقط اگر فضای هیلبرت H که در اینجا $L^2(X, \mu)$ خواهد بود، و دو تابع اندازه‌پذیر $\xi, \eta : X \rightarrow H$ موجود باشد به طوری که تقریباً برای هر $(x, y) \in X \times X$ داشته باشیم $\phi(x, y) = \langle \xi(x), \eta(y) \rangle$ [۳۲].

و اما جبر فوریه گروپوئیدی: برای گروپوئید اندازه‌دار (G, λ, μ) بستار فضای خطی تولیدشده توسط ضرایب نمایش یکانی منظم چپ در $B(G)$ را جبر فوریه G می‌نامند و با $A(G)$ نشان می‌دهند. توجه کنید که در نمایش منظم چپ برای هر $u \in G^2$ تعریف می‌کنند $H_u = L^2(G^u, \lambda^u)$ ، حالا $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ یک کلاف از فضاهای هیلبرت است و $L_{\text{red}}(x)$ را برای $x \in G$ به صورت

$$L_{\text{red}}(x) : H_{\alpha(x)} \rightarrow H_{\beta(x)}, \quad L_{\text{red}}(x)(h)(z) = h(x^{-1}z)$$

تعریف می‌کند. بنابر [۳۲] $A(G)$ ایدالی بسته از $B(G)$ است که نسبت به برگشت $\phi \mapsto \phi^*$ نیز بسته است. خواننده را برای مطالعه بیشتر این جبرها به [۳۲] ارجاع می‌دهیم.

۵. توابع معین مثبت و نمایش‌های تحویل‌ناپذیر

در این بخش پایانی به توابع معین مثبت و ارتباط آن‌ها با نمایش‌های یکانی می‌پردازیم و نتیجه جدیدی مشابه حالت گروه‌های موضعا فشرده اثبات می‌کنیم. به بیان دقیق‌تر، اگر G گروهی موضعا فشرده باشد، یک تابع خطی مثبت با نرم یک روی $C^*(G)$ را یک حالت ν می‌نامند و فضای تمام حالت‌ها روی $C^*(G)$ را با $\Sigma(C^*(G))$ نشان می‌دهند. در نظریه نمایش‌های یکانی گروه‌های موضعا فشرده رابطه‌ای بین نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر و نقاط فرین $\Sigma(C^*(G))$ وجود دارد [۱۳]. در این بخش همین ارتباط را برای گروپوئیدهای اندازه‌دار به دست می‌آوریم.

در قضیه ۷.۴ دیدیم که هر تابع معین مثبت به صورت ضربی از یک نمایش یکانی است و همچنین ضربایی از نمایش‌های یکانی که به صورت $x \mapsto \langle \xi(\beta(x)), L(x)\xi(\alpha(x)) \rangle$ اند نیز توابع معین مثبت‌اند. در این بخش ابتدا مشخص می‌کنیم نمایش‌های یکانی تحویل‌ناپذیر با کدام توابع معین مثبت ارتباط دارند و سپس ارتباط آن‌ها را با نقاط فرین $\Sigma(C^*(G))$ به دست می‌آوریم.

مجموعه تمام اندازه‌های شبه‌پایا روی G° را با $\mathcal{Q}$ نشان می‌دهیم. برای اندازه شبه‌پایا μ مجموعه توابعی در $L^\infty(G, \nu)$ صادق در قضیه ۷.۴ را با $P^\mu(G)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $P(G) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{Q}} P^\mu(G)$. برای هر $\mu \in \mathcal{Q}$ و هر نمایش یکانی L از G روی کلاف هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ مجموعه تمام توابع مختلط p که به صورت $p(x) = \langle \xi(\beta(x)), L(x)\xi(\alpha(x)) \rangle$ است با شرط $\|\xi\| = 1$ و $\xi \in L^2(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ را با $P_\mu(G)$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $P_\mu(G) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{Q}} P^\mu(G)$. به سادگی دیده می‌شود که $P^\mu(G) \subseteq P^\mu(G)$.

تعریف ۱.۵. دو تابع p_1 و p_2 از $P(G)$ را هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $p_1 \sim p_2$ اگر $p_1 \in P^{\mu_1}(G)$ و $p_2 \in P^{\mu_2}(G)$ که در آن $\mu_1 \sim \mu_2$ و برای ν -تقریبا همه $x \in G$ داریم $p_1(x) = p_2(x)\rho(d(x))\rho(r(x))$ و در اینجا ν اندازه ساخته شده توسط λ و μ_1 است و ρ^2 مشتق رادون-نیکودیم μ_2 به نسبت به μ_1 است: $\rho^2(u) = \frac{d\mu_2(u)}{d\mu_1(u)}$.

به سادگی می‌توان نشان داد رابطه بالا هم‌ارزی است.

تبصره ۱.۵. فرض کنید $p(x) = \langle \xi(\beta(x)), L(x)\xi(\alpha(x)) \rangle$ عضوی از $P(G)$ باشد که در آن L نمایش یکانی از G روی کلاف فضاهای هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ است و $\xi \in L^2(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$. اگر برای $f \in C^*(G)$ ، تعریف کنیم $\phi_p(f) = \int_G f(x)p(x)d\nu_\circ(x)$ آنگاه می‌توان نشان داد ϕ_p تابعی خطی و مثبت روی $C^*(G)$ تعریف می‌کند و اگر $p \in P^\mu(G)$ آنگاه $\phi_p \in \Sigma(C^*(G))$. در لم زیر عکس این مطلب را بیان می‌کنیم. لازم است یادآوری کنیم که می‌توان نشان داد $\phi_p = \phi_{p'}$ اگر و فقط اگر $p \sim p'$.

لم ۲.۵. فرض کنید ϕ تابعی خطی مثبت با نرم یک روی $C^*(G)$ باشد، در این صورت $\mu \in \mathcal{Q}$ بی‌بی و $p \in P^\mu(G)$ بی‌بی موجود است به طوری که $\phi(f) = \phi_p(f)$ به ازای هر $f \in C^*(G)$.

اثبات. با استفاده از روش معروف گلفاند-نایمارک-سیگل [۸] با شروع از تابع خطی مثبتی مثل ϕ می‌توان یک نمایش یکانی π_ϕ از $C^*(G)$ روی فضای هیلبرت H_ϕ ساخت. در این صورت یک بردار دوری مثل $\xi_\phi \in H_\phi$ موجود است به طوری که برای هر $f \in C^*(G)$ داریم $\phi(f) = \langle \pi_\phi(f)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle$. از آنجا که نمایش‌های $C^*(G)$ توسط نمایش‌های G القا می‌شوند [۳۱]، لذا $\mu \in \mathcal{Q}$ و یک نمایش یکانی L از G روی کلافی از فضاهای هیلبرت مثل $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ موجود است به طوری که (π_ϕ, H_ϕ) هم‌ارز یکانی با نمایش القایی $(\pi_L, L^2(G^\circ, \{H_u\}, \mu))$ است.

²⁹state

حالا فرض کنیم $T : L^1(G^\circ, \{H_u\}, \mu) \rightarrow H_\phi$ عملگر یکانی است به طوری که $T\pi_L(f) = \pi_\phi(f)T$ برای هر $f \in C^*(G)$ و بخش $\xi \in L^1(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ به گونه‌ای باشد که $T(\xi) = \xi_\phi$ ، در این صورت

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \langle \pi_\phi(f)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \\ &= \langle \pi_\phi(f)T\xi, T\xi \rangle \\ &= \langle T^*\pi_\phi(f)T\xi, \xi \rangle \\ &= \langle \pi_L(f)\xi, \xi \rangle \\ &= \int_G f(x) \langle \xi(\beta(x)), L(x)\xi(\alpha(x)) \rangle d\nu_\circ(x).\end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم $p(x) = \langle \xi(\beta(x)), L(x)\xi(\alpha(x)) \rangle$ ، آنگاه $p \in P^\mu(G)$ و $\phi_p(f) = \phi_p(f)$ برای هر $f \in C^*(G)$. حالا چون $\|\xi_\phi\| = 1$ و T یکانی است لذا $\|\xi\| = 1$ و در نتیجه $p \in P_1^\mu(G)$. $\square$

یادآوری می‌کنیم منظور از یک نقطه فرین ^{۳۰} برای یک مجموعه محدب C در فضایی برداری نقطه‌ای است که نقطه درونی هیچ پاره خط واصل بین دو نقطه از C نباشد. مثلا نقاط ابتدایی و انتهایی فاصله $[a, b]$ تنها نقاط فرین این فاصله‌اند. همچنین به عنوان مثالی دیگر اگر $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ آنگاه مجموعه نقاط فرین C برابر مجموعه نقاط مرزی C است. مجموعه نقاط فرین یک مجموعه‌ای مثل X را با $\text{Ext}(X)$ نشان می‌دهیم. به یاد داشته باشید که مجموعه تابع‌های خطی مثبت با نرم یک روی $C^*(G)$ را با $\Sigma(C^*(G))$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۵. فرض کنید G یک گروپوئید موضعا فشرده با سیستم هار λ باشد و $\mu \in \mathcal{Q}$. اگر $p \in \text{Ext}(P_1^\mu(G))$ آنگاه $\phi_p \in \text{Ext}(\Sigma(C^*(G)))$.

اثبات. قبلا گفتیم که $\phi_p \in \Sigma(C^*(G))$ و این یعنی اینکه تابع ϕ_p تابعی خطی و مثبت با نرم یک روی $C^*(G)$ است. فرض کنید که $\phi_1, \phi_2 \in \Sigma(C^*(G))$ به گونه‌ای باشد که $\phi_p = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ که در آن $\alpha, \beta \geq 0$ و $\alpha + \beta = 1$. بنابر لم ۲.۵ اندازه‌های $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{Q}$ و $p_1 \in P_1^{\mu_1}(G)$ و $p_2 \in P_1^{\mu_2}(G)$ موجود است به طوری که $\phi_1 = \phi_{p_1}$ و $\phi_2 = \phi_{p_2}$. فرض کنید L_1 و L_2 دو نمایش یکانی از G به ترتیب روی کلاف فضاهای هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu_1)$ و $(G^\circ, \{H'_u\}, \mu_2)$ باشد و

$$p_1(x) = \langle \xi_1(\beta(x)), L_1(x)\xi_1(\alpha(x)) \rangle, \quad p_2(x) = \langle \xi_2(\beta(x)), L_2(x)\xi_2(\alpha(x)) \rangle$$

اگر L را نمایش یکانی مربوط به p در نظر بگیریم که روی کلاف $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ تعریف شده است، با توجه به اینکه $\alpha\phi_{p_1} \leq \phi_p$ و $\beta\phi_{p_2} \leq \phi_p$ و با توجه به ساختار گل‌فاند-نایمارک-سیگل می‌توان π_{L_1} و π_{L_2} را هم‌ارز یکانی با زیرنمایشهایی یکانی از π_L در نظر گرفت. اکنون دو بخش $\eta_1, \eta_2 \in L^1(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ موجود است و اگر تعریف کنیم

$$q_1(x) = \langle \eta_1(\beta(x)), L(x)\eta_1(\alpha(x)) \rangle, \quad q_2(x) = \langle \eta_2(\beta(x)), L(x)\eta_2(\alpha(x)) \rangle$$

آنگاه $\phi_{p_2} = \phi_{q_2}$ و $\phi_{p_1} = \phi_{q_1}$ ، $q_1, q_2 \in P_1^\mu(G)$ ، بنابراین نتیجه می‌شود $\phi_{\alpha q_1 + \beta q_2} = \alpha\phi_{q_1} + \beta\phi_{q_2} = \phi_p$. اما $p, \alpha q_1 + \beta q_2 \in P_1^\mu(G)$ و نگاشت $p \mapsto \phi_p$ از $P_1(G)$ به $\Sigma(C^*(G))$ روی هر $P_1^\mu(G)$ یک‌به‌یک است و بنابراین $p = \alpha q_1 + \beta q_2$. چون p فرین است نتیجه می‌شود $p = q_1 = q_2$ و در نتیجه $\phi_1 = \phi_2 = \phi_p$. $\square$

عکس قضیه بالا برقرار است.

³⁰extreme point

قضیه ۴.۵. فرض کنید $\phi \in \Sigma(C^*(G))$ نقطه فرین $\Sigma(C^*(G))$ باشد، در این صورت $\mu \in \mathcal{Q}$ و نقطه فرینی مثل p از $P_1^\mu(G)$ موجود است به طوری که $\phi = \phi_p$.

اثبات. بنابر لم ۲.۵ تابع $\phi \in \Sigma(C^*(G))$ به شکل ϕ_p است که در آن $p \in P_1^\mu(G)$ و $\mu \in \mathcal{Q}$. فرض کنید $p_1, p_2 \in P_1^\mu(G)$ به گونه‌ای باشد که $p = \alpha p_1 + \beta p_2$ ، $\alpha, \beta \geq 0$ و $\alpha + \beta = 1$. پس $\phi_p = \alpha \phi_{p_1} + \beta \phi_{p_2}$ و بنابر تبصره ۱.۵، $\phi_{p_1}, \phi_{p_2} \in \Sigma(C^*(G))$. از این رو $\phi_p = \phi_{p_1} = \phi_{p_2}$ و با توجه به اینکه $p, p_1, p_2 \in P_1^\mu(G)$ و اینکه نگاشت $p \mapsto \phi_p$ از $P_1(G)$ به $\Sigma(C^*(G))$ روی $P_1^\mu(G)$ یک‌به‌یک است نتیجه می‌شود که $p = p_1 = p_2$. $\square$

نتیجه ۵.۵. فرض کنید G گروپویدی موضعا فشرده با سیستم هار λ و $\mu \in \mathcal{Q}$ یک اندازه ارگودیک باشد. اگر $p \in \text{Ext}(P_1^\mu(G))$ ، آنگاه نمایش L وابسته به p تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنید $p \in \text{Ext}(P_1^\mu(G))$. بنابر قضیه ۳.۵ داریم $\phi_p \in \text{Ext}(\Sigma(C^*(G)))$ و با استفاده از [۸، قضیه ۷.۳۳] ϕ_p یک حالت خالص^{۳۱} روی $C^*(G)$ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که نمایش مربوط به p که به صورت ϕ_L است تحویل‌ناپذیر و در نتیجه L نیز تحویل‌ناپذیر است. $\square$

این مقاله را با نتیجه زیر به پایان می‌بریم.

نتیجه ۶.۵. فرض کنید G گروپویدی موضعا فشرده با سیستم هار λ و $\mu \in \mathcal{Q}$ اندازه‌ای ارگودیک باشد. اگر L نمایشی تحویل‌ناپذیر از G روی کلاف فضاها‌ی هیلبرت $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ و $(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ و $\xi \in L^2(G^\circ, \{H_u\}, \mu)$ با نرم یک باشد در این صورت تابع p با فرمول $p(x) = \langle L(x)\xi(d(x)), \xi(r(x)) \rangle$ یک نقطه فرین $P_1^\mu(G)$ است.

اثبات. از آنجا که L تحویل‌ناپذیر است لذا π_L نیز تحویل‌ناپذیر است و بنابر [۸، قضیه ۶.۳۲] ϕ_p یک حالت خالص روی $C^*(G)$ است و در نتیجه یک نقطه فرین از $\Sigma(C^*(G))$ است. اکنون بنابر قضیه ۴.۵ یک اندازه $\mu' \in \mathcal{Q}$ و یک نقطه فرین q از $P_1^{\mu'}(G)$ موجود است به طوری که $\phi_p = \phi_q$. بنابر تبصره ۱.۵ داریم $p \sim q$ و به سادگی می‌توان نشان داد که $p \in \text{Ext}(P_1^\mu(G))$. $\square$

۶. تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم مراتب تشکر و قدردانی خود را از دکتر سعید مقصودی، دوست و همکار گرامی‌ام، اعلام نمایم. اگر تشویق و ترغیب ایشان برای نوشتن مقاله فارسی نبود، این کار به سرانجام نمی‌رسید و ناگفته نماند که در نگارش مقدمه مقاله نیز نکات بسیار ارزشمندی را متذکر شدند. همچنین از داور محترم مقاله جهت دآوری و ارائه نکات اصلاحی تشکر می‌نمایم.

مراجع

- [1] J. Avila, V. Marin and H. Pinedo, Isomorphism theorems for groupoids and some applications, *Int. J. Math. Math. Sci.*, (2020) 10 pp.
- [2] H. Brandt, Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.*, **96** (1926) 360–366.
- [3] R. Brown, *Topology and Groupoids*, Booksurge, N. Carolina, 2006.
- [4] R. Brown, From groups to groupoids, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **19** (1987) 113–134.
- [5] Ronald Brown's webpage, available at <http://groupoids.org.uk/gpds.htm>.
- [6] R. Brown and A. Razak Salleh, A van Kampen theorem for unions of non-connected spaces, *Archiv. Math.*, **42** (1984) 85–88.
- [7] H. Cartan, Sur la mesure de Haar, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **211** (1940) 759–762.
- [8] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990.

³¹ pure state

- [9] J. Dixmier, *Von Neumann Algebras*, Part II, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981.
- [10] C. Ehresmann, *Oeuvres Complètes et Commentées*, Edited by A. C. Ehresmann from 1980-83 as supplements to the *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*.
- [11] S. Eilenberg and S. MacLane, The general theory of natural equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **58** (1945) 231–294.
- [12] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964) 181–236.
- [13] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
- [14] R. H. Fox, Torus homotopy groups, *Ann. of Math.*, **49** (1948) 471–510.
- [15] A. Grothendieck, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique III : preschemas quotients, *Séminaire Bourbaki*, **6** (1960-61) 99–118.
- [16] P. Hahn, Haar measure for measure groupoids, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **242** (1978) 1–33.
- [17] P. Hahn, The regular representations of measure groupoids, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **242** (1978) 35–72.
- [18] P. J. Higgins, *Categories and Groupoids*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, No. 32. Van Nostrand Reinhold Co., London, 1971.
- [19] A. Ibort and A. Rodriguez-Miguel, *An Introduction to Groups, Groupoids and Their Representations*, CRC Press LLC, Boca Rota, FL, 2019.
- [20] Lievenlb, *The 15-puzzle Groupoid*(1), available at <http://www.neverendingbooks.org/the-15-puzzle-groupoid-1>, accessed (2007) 6–17.
- [21] G. W. Mackey, Ergodic theory and virtual groups, *Math. Ann.*, **166** (1966) 187–207.
- [22] K. C. H. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [23] P. S. Muhly, Coordinates in Operator Algebra, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1997.
- [24] P. S. Muhly and D. P. Williams, Continuous trace groupoid C^* -algebras, *Math. Scand.*, **70** (1992) 127–145.
- [25] J. Pradines, Théories de Lie pour les groupoides différentiables: relations entre propriétés locales et globales, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A*, **263** (1966) 907–910.
- [26] A. L. T. Paterson, *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*, Progress in Mathematics, 170, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [27] A. L. T. Paterson, Inverse semigroups, groupoids and a problem of J. Renault, in *Algebraic Methods in Operator Theory*, R. E. Curto and P. E. T. Jorgensen, eds., Birkhäuser, Boston, (1994) 79–89.
- [28] A. L. T. Paterson, The Fourier algebra for locally compact, *Canad. J. Math.*, **56** (2004) 1259–1289.
- [29] A. Ramsay, Topologies on measured groupoids, *J. Funct. Anal.*, **47** (1982) 314–343.
- [30] R. Ramsay and M. E. Walter, Fourier-Stieltjes algebras of locally compact groupoids, *J. Funct. Anal.*, **148** (1997) 165–314.
- [31] J. Renault, *A Groupoid Approach to C^* -algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 793, Springer, Berlin, 1980.
- [32] J. Renault, The Fourier algebra of a measured groupoid and its multipliers, *J. Funct. Anal.*, **145** (1997) 455–490.
- [33] A. K. Seda, *Topological groupoids, measures and representations*, Ph. D. thesis, University of Wales, Cardiff, 1974.
- [34] A. K. Seda, On the continuity of Haar measure on topological groupoids, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **96** (1986) 115–120.
- [35] S. Segal, *C^* -algebra and W^* -algebra*, Springer, Berlin, 1971.
- [36] A. Weil, *L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*, Hermann, Paris, 1940.
- [37] A. Weinstein, Groupoids: unifying internal and external symmetry. A tour through some examples, *Notices Amer. Math. Soc.*, **43** (1996) 744–752.
- [38] J. J. Westman, Nontransitive groupoid algebras, University of California at Irvine, 1967.
- [39] J. J. Westman, Harmonic analysis on groupoids, *Pacific J. Math.*, **27** (1968) 621–632.
- [40] Wikipedia, Groupoid, available at <https://en.wikipedia.org/wiki/Groupoid>.

حبیب امیری

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

h.amiri@znu.ac.ir

حبیب امیری متولد اسفند ماه ۱۳۵۵ در شهر ازنا است؛ در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه شریف شد. سپس در سال ۱۳۸۶ در دانشگاه اصفهان با دفاع از رساله دکترای خود با عنوان آنالیز هارمونیک روی گروپویدها فارغ التحصیل شد.



Groupoid and Groupoid Algebras

Habib Amiri

Abstract: Groupoid is a structure similar to a group, with more applications in differential geometry, differential equations, algebraic geometry, mathematical analysis, and physics. In this paper, we introduce groupoids from two points of view: algebraic and the category theory. We review the definitions of groupoid C^* – algebra, Fourier algebra and Fourier-Stieltjes algebra. Introducing the theory of unitary representation of groupoids, we extend a classical result in the representation theory of locally compact groups to groupoids.

Keywords: topological groupoid, irreducible representation, positive-definite functions.

Habib Amiri

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

Email: h.amiri@znu.ac.ir

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Research Paper.

Received: 2021/07/03, Accepted: 2021/08/30.