ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۶، شماره ۱ (۱۴۰۰)، صص. ۶۵-۴۹
© ۱۴۰۰ دانشگاه اصفهان
http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

تعمیم قضیه گردان برای تعداد دلخواهی از توابع زیرخطی و کاربرد آن در بهینه‌سازی نیمه‌نامتناهی محدب

نادر کنزی* و علی صادقیه

چکیده. در این مقاله، ابتدا تعمیمی از قضیه گردان که مناسب تعداد نامتناهی تابع زیرخطی باشد را بیان خواهیم نمود. سپس، از قضیه‌ی فوق در اثبات شرط لازم بهینگی از نوع فریز-جان برای مسائل نیمه‌نامتناهی محدب استفاده خواهیم کرد. در نهایت، یک صلاحیت قیدی [۱] و یک شرط لازم بهینگی از نوع کاروش-کان-تاکر برای مسائل فوق را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

۱. مقدمه

قضیه‌ی گردان [۱] در ریاضیات، به دسته‌ای از قضایایی تعلق دارد که تحت عنوان قضایای جایگزینی [۲] شناخته می‌شوند. این قضیه‌ها در شکل کلاسیک خود در مورد وجود جواب نامعادلات خطی می‌باشند. اولین قضیه‌ی جایگزینی توسط ریاضیدان مجارستانی به نام فارکاش [۳] به اثبات رسید، و بعد از آنکه کان [۴] و تاکر [۵] آن را برای اثبات شرط لازم بهینگی [۶] در مسائل بهینه‌سازی مقید [۷] به کار گرفتند، اهمیت آن بیش از پیش خودنمایی نمود. پس از آن، بیان و اثبات قضیه‌های متعدد جایگزینی، یکی از مباحث مهم در تئوری بهینه‌سازی گشت و این موضوع باعث شد که قضایای جایگزینی زیادی به اثبات برسند؛ برای مطالعه‌ی انواع قضایای جایگزینی، اثبات آنها، و کاربردهای هر یک می‌توان به منابع [۲، ۱۲] مراجعه کرد.

در قضیه‌های جایگزینی، همانطور که از نامشان مشخص است، دو دستگاه (در اکثر مواقع خطی) شامل تعدادی تساوی و نامساوی معرفی می‌گردند که عدم وجود جواب برای یکی از آنها معادل است با وجود جواب برای دیگری. در واقع، اگر دو دستگاه مورد نظر را با $D_۱(x)$ و $D_۲(x)$ نمایش دهیم، شکل کلی یک قضیه‌ی جایگزینی اینگونه خواهد بود:

$$\exists\, x,\ D_۱(x) \ \Leftrightarrow\ \nexists\, x,\ D_۲(x). \tag{۱.۱}$$

همانطور که رابطه‌ی (۱.۱) نشان می‌دهد، این نوع قضایا می‌توانند در قضیه‌های وجودی بسیار مفید باشند؛ به این‌صورت که برای اثبات وجود جواب برای سیستم $D_۱(x)$ کافی است نشان داده شود که سیستم $D_۲(x)$ هیچ جوابی ندارد.

عبارات و کلمات کلیدی: قضیه گردان، بهینه‌سازی محدب، مسائل نیمه‌نامتناهی، شرایط لازم بهینگی.
دبیرتخصصی رابط: صغری نوبختیان
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۴/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۶/۲۰
* نویسنده مسئول

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

[1]gordan [2]alternative theorem [3]Farkas [4]Kuhn [5]Tucker [6]necessary optimality condition [7]constraint optimization problem

در قضیه‌ی گردان نیز مانند همه‌ی قضیه‌های جایگزینی دیگر، باید دستگاه‌های $D_۱(x)$ و $D_۲(x)$ به گونه‌ای تعریف شوند که تعادل (۱.۱) برقرار باشد. به منظور فهم ساده‌تر قضیه‌ی گردان، در ابتدا یادآوری می‌کنیم که برای بررسی وجود جواب غیرصفر دستگاه s معادله n مجهول خطی همگن

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + \cdots + a_{۱n}x_n = ۰ \\ a_{۲۱}x_۱ + \cdots + a_{۲n}x_n = ۰ \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{s۱}x_۱ + \cdots + a_{sn}x_n = ۰, \end{cases} \tag{۲.۱}$$

ماتریس ضرایب و بردار مجهول را به شکل زیر تعریف کرده،

$$A_{s\times n} := \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s۱} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \quad , \quad x := \begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tag{۳.۱}$$

و دستگاه (۲.۱) را به شکل $Ax = ۰$ می‌نویسیم که صفر سمت راست، صفر برداری در $\mathbb{R}^s$ است. در روش‌های متعارف گاس [8] و گاس–جردن [9]، تعداد سطرهای مستقل خطی موجود در ماتریس A، که رتبه‌ی [10] A گفته می‌شود نقش مهمی بازی می‌کند. دلیل این امر آن است که به عنوان مثال اگر دو سطر از A وابسته خطی باشند حذف معادله‌ی مرتبط با یکی از آنها از (۲.۱) تاثیری بر تعداد جواب‌های دستگاه نخواهد گذاشت و این دو معادله برابر می‌باشند.

پس از این یادآوری مختصر، به جهت نزدیک شدن به قضیه‌ی گردان، دستگاه نامعادلات اکیدی را در نظر می‌گیریم که از تعویض تساوی‌های موجود در (۲.۱) با علامت کوچکتری ($<$) حاصل می‌شود، و به طور خلاصه می‌توان آن دستگاه را به شکل $Ax < ۰$ نوشت که ماتریس A و بردار x در رابطه‌ی (۳.۱) تعریف شده‌اند. سطر iام از ماتریس A را با a_i نشان می‌دهیم،

$$a_i := (a_{i۱}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n,\ i = ۱, \ldots, s,$$

و دستگاه نامعادلات مورد نظر را به شکل

$$\langle a_i, x\rangle < ۰,\ i = ۱, \ldots, s, \tag{۴.۱}$$

نمایش می‌دهیم که $\langle a_i, x\rangle$ نشان دهنده‌ی ضرب داخلی استاندارد دو بردار a_i و x در $\mathbb{R}^n$ است. تفاوت مهمی که بین دستگاه نامعادلات (۴.۱) و دستگاه معادلات (۲.۱) وجود دارد این است که اگر بردارهای a_i و a_j ضریب غیرصفری از همدیگر باشند، الزاماً نامعادلات $\langle a_i, x\rangle < ۰$ و $\langle a_j, x\rangle < ۰$ معادل نیستند. به عنوان مثال اگر قرار دهیم $a_۱ := (۱, -۱)$ و $a_۲ := (-۲, ۲)$ به وضوح بردارهای $a_۱$ و $a_۲$ وابسته خطی می‌باشند، ولی نه تنها نامعادلات $x_۱ - x_۲ < ۰$ و $-۲x_۱ + ۲x_۲ < ۰$ معادل یکدیگر نیستند، که مجموعه جواب‌های آنها هیچ اشتراکی ندارند. (به اصطلاح، دو نامعادله‌ی ناسازگار هستند.)

به سادگی قابل تحقیق است که اگر دو بردار a_i و a_j ضریب مثبتی از یکدیگر باشند، آنگاه دو نامعادله‌ی $\langle a_i, x\rangle < ۰$ و $\langle a_j, x\rangle < ۰$ در دستگاه (۲.۱) برابر می‌باشند. این موضوع ما را به تعریف زیر راهنمایی می‌کند.

[8] Gauss [9] Gauss-Jordan [10] rank

تعریف ۱.۱. بردارهای غیرصفر $a_1, \ldots, a_s$ را مثبت_مستقل [11] می‌گوییم هرگاه نتوان ضرایب نامنفی $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ که همزمان صفر نیستند را طوری یافت که تساوی $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i = 0$ برقرار باشد. به طور معادل

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i = 0 \ , \ \alpha_i \geq 0 \implies \alpha_i = 0 \ , \ i = 1, \ldots, s.$$

بردارهایی که مثبت_مستقل نباشند را مثبت_وابسته می‌گوییم.

حال توجه می‌کنیم که اگر $a_1, \ldots, a_s$ مثبت_وابسته باشند، دستگاه

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s = 0 \\ \alpha_1 \geq 0 \\ \vdots \\ \alpha_s \geq 0 \end{cases} \tag{۵.۱}$$

بر حسب مجهول‌های $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$، جواب غیرصفری چون $\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_s$ دارد. فرض کنیم $\hat{\alpha}_r$ مخالف صفر باشد. پس

$$\sum_{i=1,\ i\neq r}^{s} \hat{\alpha}_i a_i = -\hat{\alpha}_r a_r,$$

و اگر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ به گونه‌ای باشد که نامعادلات $\langle a_i, x\rangle < 0$ برای هر $i \neq r$ برقرار باشد، داریم $\langle a_r, x\rangle > 0$، و این یعنی دستگاه نامعادلات (۴.۱) هیچ جوابی ندارد. پس نشان دادیم که:

گزاره ۲.۱. *اگر دستگاه (۵.۱) جواب غیرصفر داشته باشد، دستگاه (۴.۱) جوابی ندارد.*

دیده می‌شود که گزاره‌ی ۲.۱ به شکل قسمتی از یک قضیه‌ی جایگزینی است، که اگر برعکس آن نیز ثابت شود، به یک قضیه‌ی جایگزینی تبدیل خواهد شد. اثبات عکس گزاره‌ی ۲.۱ بر قضیه‌ای استوار است که به قضیه‌ی جداسازی [12] معروف می‌باشد و بیان آن در این مختصر نمی‌گنجد.

در نهایت، قضیه‌ی جایگزینی گردان به شکل زیر قابل بیان و اثبات می‌باشد:

قضیه ۳.۱. [۲] *اگر $\{a_1, \ldots, a_s\}$ یک زیرمجموعه‌ی متناهی دلخواه از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه یک و تنها یکی از دو گزاره زیر صادق خواهند بود:*

آ) حداقل یک $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد که در نامساوی‌های اکید زیر صدق کند:

$$\langle a_1, x\rangle < 0, \ldots, \langle a_s, x\rangle < 0.$$

ب) اعداد حقیقی غیر منفی α_i، برای $i = 1, \ldots, s$، موجودند که همزمان صفر نیستند و

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i = 0.$$

برای مطالعه‌ی اثبات، تاریخچه، صورت‌های معادل، و کاربردهای متعدد قضیه گردان می‌توان به منابع [۲، ۶] مراجعه نمود.

در رابطه با قضیه گردان، تذکر سه نکته را لازم می‌دانیم.

[11] positive-independent [12] separation theorem

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

- اول آنکه مجموعه $\{a_i \ : \ i=1,\ldots,s\}$، یک زیر مجموعه‌ی متناهی از $\mathbb{R}^n$ فرض شده است. در واقع اگر زیر مجموعه‌ی نامتناهی $\{a_i \ : \ i\in I\}$ از $\mathbb{R}^n$ را، به ازای یک مجموعه اندیس نامتناهی I، در نظر بگیریم، شکل کلاسیک قضیه گردان برقرار نخواهد بود. البته در [۴]، شکلی از قضیه گردان ارایه گشته که مناسب برای مجموعه‌های نامتناهی است.
- دوم اینکه نامساوی‌های اکید قضیه گردان، برای توابع خطی $\varphi_i(x)=\langle a_i,x\rangle$ در نظر گرفته شده‌اند. منابعی از جمله [۱۷]، φ_iها را زیرخطی [13] فرض کرده‌اند و به اثبات شکل کلی‌تری از قضیه گردان پرداخته‌اند.
- سوم اینکه یکی از مهمترین کاربردهای قضیه گردان، به‌دست آوردن شرط لازم بهینگی [14] فریز_جان [15]، برای مسئله بهینه‌سازی

$$\min\ u(x),\ s.t.\ v_i(x)\leq 0\ ,\ i\in\{1,\ldots,s\};\ x\in\mathbb{R}^n,$$

می‌باشد که u و v_iها توابع مشتق‌پذیری از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ هستند (برای مشاهده جزییات به [۲] مراجعه شود).

اولین هدف مقاله حاضر تعمیم دادن قضیه گردان است به‌طوری‌که شروط ذکر شده در نکات اول و دوم، همزمان در آن لحاظ شده باشند. یعنی، سیستم $\{\varphi_r(x)<0 \ : \ r\in\mathfrak{A}\}$ را در نظر می‌گیریم که توابع $\varphi_r:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ زیرخطی بوده و $\mathfrak{A}$ یک مجموعه‌ی اندیس دلخواه است. حتی از این هم فراتر رفته و سیستم کلی‌تری را در نظر می‌گیریم که علاوه بر نامساوی‌های اکید فوق، شامل نامساوی‌های غیراکید و شمول هندسی نیز هستند. به عبارت دیگر، سیستم مورد نظر ما در این مقاله به شکل زیر خواهد بود:

$$(\Upsilon):\begin{cases}\varphi_r(x)<0, & \forall r\in\mathfrak{A},\\ \psi_i(x)\leq 0, & \forall i\in\mathfrak{B},\\ x\in\mathfrak{D}, & \end{cases}$$

که مجموعه‌های اندیس $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دلخواه، توابع φ_r و ψ_i به ازای هر $r\in\mathfrak{A}$ و $i\in\mathfrak{B}$ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ زیرخطی، و $\mathfrak{D}$ زیرمجموعه‌ای دلخواه از $\mathbb{R}^n$ است.

سپس، بر مبنای نکته سوم، قضیه گردان به‌دست آمده را در جهت اثبات شرط لازم بهینگی فریز_جان برای مسئله بهینه‌سازی نیمه‌متناهی [16] زیر به کار خواهیم گرفت:

$$\begin{aligned}&(P):\ \min f(x)\\ &s.t.\ g_i(x)\leq 0,\ i\in I,\\ &x\in Q,\end{aligned}$$

که در آن، توابع $f,g_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ محدب [17] و غیرمشتق‌پذیر هستند، I یک مجموعه اندیس دلخواه و Q یک زیر مجموعه‌ی محدب از $\mathbb{R}^n$ است. در نهایت به اثبات شرط لازم بهینگی کاروش_کان_تاکر [18] برای مسئله (P) پرداخته، و حکم جدید خود را با احکام موجود مشابه مقایسه خواهیم نمود.

لازم به تذکر است که مسئله (P) را از آن جهت نیمه_نامتناهی می‌گوییم که تعداد قیدهایش نامتناهی بوده و بُعد فضایی که متغیرها در آن قرار دارند متناهی است. طیف وسیع کاربردها و تنوع و زیبایی روش‌های تئوری و عددی مرتبط با مسائل نیمه_نامتناهی باعث شده‌اند که بسیاری از محققان، مطالعه روی آنها را موضوع اصلی تحقیقات خود قرار دهند و در۵۰ سال اخیر تعداد قابل توجهی کتاب و مقاله در مورد آنها به چاپ برسانند. البته، اکثر مقالات چاپ شده تا قبل از سال ۲۰۰۹، توابع f و g_iها را خطی یا مشتق‌پذیر در نظر گرفته بودند (مقاله مروری [۱۵] و کتاب [۴] را برای یک مطالعه اجمالی پیشنهاد می‌دهیم)؛ مقالات انگشت‌شماری هم توابع را غیرمشتق‌پذیر و محدب در نظر گرفته و قید فشردگی را روی مجموعه اندیس I فرض کرده بودند (برای نمونه مراجعه شود به [۱۳، ۱۴]).

---

[13] sublinear [14] necessary optimality condition [15] Fritz-John [16] semi-infinite optimization problem [17] convex [18] Karush-Kuhn-Tucker

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

مقاله [۱۱] اولین اثری است که مسئله (P) را با توابع ناهموار [۱۹] (یعنی غیرمحدب و غیرمشتق‌پذیر) مورد مطالعه قرار داده و احکامی بر حسب زیرمشتق کلارک [۲۰] [۱] را شامل است. سپس، در منابع [۷، ۸، ۹، ۱۰] مسئله نیمه‌ـ‌نامتناهی (P) را در شرایط مختلف و تحت زیرمشتق‌های مختلف، مورد بررسی قرار داده و به اثبات شرایط لازم فریز‌ـ‌جان و کاروش‌ـ‌کان‌ـ‌تاکر، شرایط کافی بهینگی [۲۱]، احکام دوگانی [۲۲] و خطی‌سازی [۲۳] مسئله پرداخته‌اند. البته، نویسندگان دیگری نیز در این مسیر به احکام ارزشمندی دست یافته‌اند که اکثر آن‌ها را می‌توان در فهرست منابع مقالات بالا مشاهده کرد.

اکثر منابع ذکر شده، برای اثبات شرایط لازم بهینگی، شرایط اضافه‌ای را بر مسئله (P) تحمیل کرده‌اند که غالباً از نوع فشردگی I بوده است. طبق آخرین اطلاعات ما کامل‌ترین و قوی‌ترین مقاله‌ای که مسئله (P) را به شکل چندهدفه با توابع محدب غیرمشتق‌پذیر و مجموعه اندیس دلخواه در نظر گرفته، منبع [۳] می‌باشد. در منبع فوق، شرایط لازم را فقط از نوع کاروش‌ـ‌کان‌ـ‌تاکر در نظر گرفته و هیچگونه حکمی در مورد شرایط فریز‌ـ‌جان ارائه نشده است. مقاله حاضر اولین کاری است که به بیان شرایط فریز‌ـ‌جان و تعمیم قضیه گردان، بدون تحمیل هیچ قیدی روی مجموعه‌ی اندیس I می‌پردازد.

بخش‌های آینده‌ی این مقاله به شکل زیر تنظیم گشته‌اند. در بخش ؟؟ به بیان تعاریف و احکام، و معرفی نمادها و قراردادهایی خواهیم پرداخت که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت. بخش ۳ به تعمیم قضیه گردان اختصاص داشته و شکل‌های مختلفی از آن را ارائه خواهد داد. در نهایت، در بخش ۴ به تنظیم و بیان شرایط لازمی از نوع فریز‌ـ‌جان و کاروش‌ـ‌کان‌ـ‌تاکر برای مسئله (P) خواهیم پرداخت که توسط قضایای بخش ۳ اثبات می‌شوند. در واقع می‌توان بخش ۴ را به عنوان کاربردی از احکام موجود در بخش ۳ در نظر گرفت.

۲. علائم و تعاریف

sec۱ در این فصل به بیان تعاریف و احکامی از آنالیز محدب می‌پردازیم که در فصل‌های بعد استفاده خواهند شد. قابل ذکر است که مطالب این فصل از منابع [۱، ۲، ۶، ۱۷] برگزیده شده‌اند و خواننده‌ی علاقمند می‌تواند جزئیات و اثباتها را در آن منابع بیابد.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. بستار و درون A را به ترتیب با $\overline{A}$ و $int(A)$ نشان می‌دهیم. همچنین، کوچکترین مخروط محدب شامل A را با $cone(A)$، و اشتراک مجموعه‌های محدب شامل A، که غلاف محدب[۲۴] A نامیده می‌شود، را با $conv(A)$ نمایش می‌دهیم. از علامت A^p برای نمایش مخروط قطبی[۲۵] A استفاده می‌کنیم،

$$A^p := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, a\rangle \leq 0, \ \forall a \in A\}.$$

توجه می‌کنیم که قضیه دوقطبی [۲۶] [۲، ۶] نشان می‌دهد که $(A^p)^p = \overline{cone}(A)$، که در آن $\overline{cone}(A)$ نشان‌دهنده‌ی مخروط محدب بسته‌ی تولید شده توسط A می‌باشد.

در منبع [۱۷] نشان داده شده است که اگر $\mathcal{M}$ و $\mathcal{H}$ دو مخروط در $\mathbb{R}^n$ باشند، داریم $(\mathcal{M} \cap \mathcal{H})^p = \mathcal{M}^p + \mathcal{H}^p$.

اگر $\{C_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ گردایه‌ای دلخواه از زیرمجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^n$ باشد، اثبات رابطه زیر ساده است ([۲] را ببینید)

$$conv\Big(\bigcup_{\alpha\in\Delta} C_\alpha\Big) = \bigcup\Big\{\sum_{\alpha\in\Delta_*} q_\alpha C_\alpha \ : \ \Delta_* \subseteq \Delta, \ |\Delta_*| < \infty, \ q_\alpha \in [0, +\infty[, \ \forall \alpha \in \Delta_*\Big\}.$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که:

$$a \in conv\Big(\bigcup_{\alpha\in\Delta} C_\alpha\Big) \Leftrightarrow \exists \Delta_* \subseteq \Delta, \ |\Delta_*| < \infty; \ a \in conv\Big(\bigcup_{\alpha\in\Delta_*} C_\alpha\Big) \qquad (۱.۲)$$

[19]nonsmooth [20]clarke subdifferential [21]sufficient optimality condition [22]duality results [23]linearization [24]convex hull [25]polar cone [26]bipolar theorem

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

فرض کنیم C یک زیرمجموعه‌ی محدب از $\mathbb{R}^n$ باشد، و $x_\circ \in \overline{C}$. مخروط نرمال[۲۷] C در $x_\circ$، که با علامت $N(C,x_\circ)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$N(C,x_\circ) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, c-x_\circ\rangle \leq \circ, \ \forall c \in C\}.$$

اگر $\circ \in \overline{C}$، آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که $N(C,\circ) = C^p$.

مخروط مماس[۲۸] بر C در $x_\circ$، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$K(C,x_\circ) := (N(C,x_\circ))^p.$$

می‌توان نشان داد که $K(C,x_\circ)$ شامل بردارهایی چون h در $\mathbb{R}^n$ است که متناسب با آنها، دنباله‌ای از اعداد مثبت $t_r \downarrow \circ$ و دنباله‌ای از بردارهای h_r در $\mathbb{R}^n$ موجودند به‌طوری‌که $h_r \longrightarrow h$ و رابطه‌ی $x_\circ + t_r h_r \in C$ برای هر $r \in \mathbb{N}$ برقرار باشد.

به سادگی می‌توان نشان داد که $K(C,x_\circ)$ و $N(C,x_\circ)$مخروط‌های محدب و بسته‌ای در $\mathbb{R}^n$ می‌باشند و رابطه‌ی $N(C,x_\circ) = (K(C,x_\circ))^p$ همواره برقرار است.

نگاشت مجموعه‑مقدار $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ را در نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ نیمه پیوسته بالایی می‌گوییم اگر برای هر دنباله $\{x_r\}$ همگرا به $x_\circ$ و هر دنباله$\{y_r\} \subseteq \mathbb{R}^m$ که $y_r \in F(x_r)$، بتوان زیردنباله‌ی همگرای $\{y_{r_l}\}$ را از $\{y_r\}$ به گونه‌ای یافت که

$$\lim_{l\to\infty} y_{r_l} = y_\circ \in F(x_\circ).$$

لازم به یادآوری است که تابع ϑ را زیرخطی می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\vartheta(\alpha x) = \alpha\vartheta(x) \ , \ \vartheta(x+y) \leq \vartheta(x) + \vartheta(y).$$

همچنین ϑ را محدب می‌گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in [\circ, ۱]$ داشته باشیم

$$\vartheta(\alpha x + (۱-\alpha)y) \leq \alpha\vartheta(x) + (۱-\alpha)\vartheta(y).$$

فرض کنیم ϑ یک تابع محدب باشد و $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. مشتق جهتی ϑ در نقطه $\hat{x}$ در جهت بردار $d \in \mathbb{R}^n$ چنین تعریف می‌شود:

$$\vartheta'(\hat{x};d) := \lim_{t\to\circ} \frac{\vartheta(\hat{x}+td) - \vartheta(\hat{x})}{t}.$$

همچنین، زیردیفرانسیل (زیرمشتق) [۲۹] ϑ در $\hat{x}$ توسط تساوی زیر تعریف می‌شود:

$$\partial\vartheta(\hat{x}) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \ : \ \vartheta'(\hat{x};d) \geq \langle \xi, d\rangle, \ \forall d \in \mathbb{R}^n\}.$$

ثابت می‌شود که زیرمشتق یک تابع محدب در یک نقطه درونی دامنه‌اش، یک مجموعه ناتهی، محدب و فشرده است. به سادگی می توان نشان داد که نگاشت مجموعه‑مقدار $x \longmapsto \partial\vartheta(x)$ نیمه پیوسته بالایی است و تابع $d \to \vartheta'(\hat{x};d)$ محدب است. تساوی‌های مهم زیر را به سادگی می‌توان ثابت کرد [۶]:

$$\partial\vartheta(\hat{x}) = \partial\vartheta'(\hat{x};\cdot)(\circ),$$
$$\vartheta'(\hat{x};d) = \max\{\langle \xi, d\rangle \ : \ \xi \in \partial\vartheta(\hat{x})\}.$$

قضیه ۱.۲. *فرض کنیم که $\hat{x} \in C$ یک نقطه کمینه‌ی[۳۰] تابع محدب $\vartheta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ روی مجموعه محدب $C \subseteq \mathbb{R}^n$ باشد. آنگاه*

$$\circ \in \partial\vartheta(\hat{x}) + N(C,\hat{x}).$$

[27]normal cone [28]tangent cone [29]subdifferential [30]minimizer

قضیه ۲.۲. قضیه مقدار میانی: *فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}^n$ و ϑ یک تابع محدب از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه می‌توان نقطه‌ای مثل $u \in \mathbb{R}^n$ واقع بر پاره خط واصل x و y یافت به گونه‌ای که*

$$\vartheta(y) - \vartheta(x) \in \langle \partial\vartheta(u), y - x \rangle,$$

که $\langle \partial\vartheta(u), y - x \rangle$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\langle \partial\vartheta(u), y - x \rangle := \big\{ \langle \xi, y - x \rangle \ : \ \xi \in \partial\vartheta(u) \big\}.$$

در آخر متذکر می‌شویم که اگر $\vartheta_۱$ و $\vartheta_۲$ دو تابع محدب باشند و $\hat{x}$ نقطه‌ای باشد که در درون اشتراک دامنه‌های آن‌ها قرار دارد، آنگاه تساوی زیر برای تمام اعداد نامنفی $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ برقرار است:

$$\partial(\alpha_۱\vartheta_۱ + \alpha_۲\vartheta_۲)(\hat{x}) = \alpha_۱\partial\vartheta_۱(\hat{x}) + \alpha_۲\partial\vartheta_۲(\hat{x}).$$

۳. تعمیم قضیه گردان

در این فصل، مجموعه‌های اندیس $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را دلخواه فرض کرده، و زیرمجموعه‌ی محدب $\mathfrak{D}$ از $\mathbb{R}^n$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که در شرط $۰ \in \mathfrak{D}$ صدق کند. همچنین، فرض می‌کنیم که توابع $\varphi_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\psi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، به ازای هر $(r, i) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$، زیرخطی باشند. در ادامه این فصل، این فرض‌ها پابرجا خواهند بود و آن‌ها را تکرار نخواهیم کرد.

در ابتدا، دو تعریف زیر را از [۴] یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. سیستم (Υ) را سازگار[۳۱] می‌گوییم اگر مجموعه‌ی موجه[۳۲] آن ناتهی باشد؛ یعنی حداقل یک $x \in \mathbb{R}^n$ موجود باشد که در تمام شروط آن صدق کند.

تعریف ۲.۳. سیستم (Υ) را فشرده‌پذیر[۳۳] می‌گوییم اگر از سازگاری تمام زیرسیستم‌های متناهی آن، سازگاری (Υ) نتیجه شود.

بدیهی است که هر سیستم سازگار، فشرده‌پذیر نیز هست. سیستم

$$\begin{cases} v_q(x) := q + x \leq ۰, \quad q \in \mathbb{N}, \\ \qquad\qquad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

نشان می‌دهد که لزومی ندارد تا عکس گزاره‌ی فوق صحیح باشد.

قضیه‌ی زیر، یک شرط کافی برای سازگار بودن سیستم‌های شامل توابع زیرخطی، تحت شرط فشرده‌پذیری ارائه می‌دهد.

قضیه ۳.۳. *فرض کنیم که سیستم (Υ) فشرده‌پذیر باشد. اگر به ازای تمام مجموعه‌های متناهی $\mathfrak{A}^*$ و $\mathfrak{B}^*$ که $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$، و برای تمام اسکالرهای نامنفی α_r و β_i، که $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، بتوانیم از شمول*

$$۰ \in \sum_{r \in \mathfrak{A}^*} \alpha_r \partial\varphi_r(۰) + \sum_{i \in \mathfrak{B}^*} \beta_r \partial\psi_i(۰) + N(\mathfrak{D}, ۰),$$

نتیجه بگیریم که تمام α_rها و β_iها برابر صفر هستند (یعنی $\alpha_r = \beta_i = ۰$، به ازای هر $i \in \mathfrak{B}^*$ و $r \in \mathfrak{A}^*$)، آنگاه سیستم (Υ) سازگار می‌باشد.

[31]consistent [32]feasible set [33]compactable

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

اثبات. ابتدا، ادعا می‌کنیم که برای تمام مجموعه‌های اندیس متناهی $\mathfrak{A}^*$ و $\mathfrak{B}^*$ که $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$، و برای تمام اسکالرهای نامنفی α_r و β_i، که $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، از نامساوی

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r(u) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i(u) \geq ۰, \ \forall u \in \mathfrak{D}, \tag{۱.۳}$$

نتیجه می‌شود که تمام α_rها و β_iها برابر صفر هستند.

به منظور اثبات ادعای فوق، فرض می‌کنیم که مجموعه‌های متناهی $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$، و اسکالرهای نامنفی α_r و β_i، که $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، موجود باشند که در (۱.۳) صدق می‌کنند. از زیرخطی بودن تابع φ_r نتیجه می‌گیریم که

$$\varphi_r(۰) = \varphi_r(۰ \cdot u) = ۰ \cdot \varphi_r(u) = ۰,$$

به طور مشابه دیده می‌شود که $\psi_i(۰) = ۰$. در نتیجه،

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r(۰) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i(۰) = ۰.$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی اخیر با (۱.۳)، خواهیم دید که

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r(u) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i(u) \geq \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r(۰) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i(۰), \ \forall u \in \mathfrak{D},$$

نامساوی اخیر و فرض $۰ \in \mathfrak{D}$ نشان می‌دهند که $u_۰ := ۰$ یک نقطه کمینه برای تابع محدب

$$\vartheta(x) := \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r(x) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i(x),$$

روی $\mathfrak{D}$ است. در نتیجه، با استفاده از قضیه ۳.۱ ، شمول زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} ۰ \in \partial\vartheta(۰) + N(\mathfrak{D}, ۰) &= \partial\Big(\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i\Big)(۰) + N(\mathfrak{D}, ۰) \\ &= \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\partial\varphi_r(۰) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\partial\psi_i(۰) + N(\mathfrak{D}, ۰), \end{aligned}$$

پس، فرض قضیه ایجاب می‌کند که برای هر $r \in \mathfrak{A}^*$ و هر $i \in \mathfrak{B}^*$ داشته باشیم $\alpha_r = \beta_i = ۰$. لذا ادعای بیان شده به اثبات رسید.

حال، فرض می‌کنیم که سیستم (Υ) سازگار نباشد. با توجه به فشرده‌پذیر بودن (Υ)، می‌توان زیرمجموعه‌های متناهی $\mathfrak{A}^*$ و $\mathfrak{B}^*$ از $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که دستگاه زیر جواب نداشته باشد،

$$\begin{cases} \varphi_r(x) < ۰, & \forall r \in \mathfrak{A}^*, \\ \psi_i(x) \leq ۰, & \forall i \in \mathfrak{B}^*, \\ x \in \mathfrak{D}. \end{cases}$$

بنابراین با استفاده ااز [۱۷، قضیه ۲.۲۱]، اسکالرهای نامنفی α_r و β_i، که $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که همگی با هم صفر نباشند و

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r(u) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i(u) \geq ۰, \ \forall u \in \mathfrak{D}.$$

این امر، ادعای ثابت شده را نقض می‌کند، و این تناقض اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

قضیه‌ی زیر، یک شرط لازم برای سازگار بودن (Υ) بیان می‌کند.

قضیه ۴.۳. *فرض کنیم سیستم (Υ) سازگار باشد. آنگاه برای تمام مجموعه‌های اندیس متناهی $\mathfrak{A}^*$ و $\mathfrak{B}^*$ که $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$، و برای تمام اسکالرهای نامنفی α_r و β_i، که $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، از شمول*

$$\circ \in \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r \partial\varphi_r(\circ) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i \partial\psi_i(\circ) + N(\mathfrak{D}, \circ),$$

نتیجه می‌شود $\alpha_r = \circ$، برای هر $r \in \mathfrak{A}^*$.

اثبات. مشابه با اثبات قضیه قبل، برهان خود را با یک ادعا آغاز می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که برای تمام مجموعه‌های اندیس متناهی $\mathfrak{A}^*$ و $\mathfrak{B}^*$ که $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$، و برای تمام اسکالرهای نامنفی α_rو β_i، که $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، از نامساوی

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r \varphi_r(u) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i \psi_i(u) \geq \circ, \ \forall u \in \mathfrak{D}. \tag{۲.۳}$$

نتیجه می‌گیریم $\alpha_r = \circ$، برای هر $r \in \mathfrak{A}^*$.

اگر ادعای فوق نادرست باشد، زیرمجموعه‌های متناهی $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$، و اسکالرهای نامنفی α_r و β_i، با $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، موجودند که در (۲.۳) صدق کنند و حداقل برای یک اندیس $r_\circ \in \mathfrak{A}^*$ داشته باشیم $\alpha_{r_\circ} \neq \circ$.

چون سیستم (Υ) سازگار است، پس حداقل یک $\nu \in \mathfrak{D}$ وجود دارد که در (Υ) صدق کند. در نتیجه، با توجه به نامنفی بودن ضرایب α_r وβ_i و اکید مثبت بودن $\alpha_{r_\circ}$، داریم

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r \varphi_r(\nu) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i \psi_i(\nu) < \circ,$$

که با (۲.۳) در تناقض است. ازاین رو نتیجه می‌شود که $\alpha_r = \circ$ برای هر $r \in \mathfrak{A}^*$، و ادعا صحیح است.

حال حکم قضیه را با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنیم که زیرمجموعه‌های متناهی $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$، و اسکالرهای نامنفی α_r و β_i، که $r \in \mathfrak{A}^*$ و $i \in \mathfrak{B}^*$، موجود باشند که برای حداقل یک اندیس $r_\circ \in \mathfrak{A}^*$ داشته باشیم $\alpha_{r_\circ} \neq \circ$ و

$$\circ \in \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r \partial\varphi_r(\circ) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i \partial\psi_i(\circ) + N(\mathfrak{D}, \circ).$$

بنابراین، بردارهای $a_r \in \partial\varphi_r(\circ)$، $b_i \in \partial\psi_i(\circ)$ و $d \in N(\mathfrak{D}, \circ)$ به گونه‌ای موجودند که

$$d + \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r a_r + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i b_i = \circ. \tag{۳.۳}$$

چون φ_r برای هر$r \in \mathfrak{A}^*$ یک تابع زیر خطی است، داریم:

$$\varphi_r(w) \geq \varphi_r(w) - \varphi_r(\circ) \geq \langle a_r, w\rangle, \ \forall w \in \mathbb{R}^n, \tag{۴.۳}$$

که نامساوی اخیر با توجه به تعریف زیرمشتق نوشته شده است. به طور مشابه داریم:

$$\psi_i(w) \geq \langle b_i, w\rangle, \ \forall w \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathfrak{B}^*.$$

از رابطه اخیر، (۴.۳)، و نامنفی بودن ضرایب α_r و β_i، نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r \varphi_r(w) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i \psi_i(w) \geq \Big\langle \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r a_r + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i b_i, w \Big\rangle. \tag{۵.۳}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

از طرف دیگر، چون $d \in N(\mathfrak{D}, \circ)$، برای هر $w \in \mathfrak{D}$ داریم $\langle d, w\rangle \leq \circ$، پس، از نامساوی (۵.۳) و تساوی (۳.۳) نتیجه می‌شود که برای هر w در $\mathfrak{D}$ داریم:

$$\sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r\varphi_r(w) + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i\psi_i(w) \geq \left\langle \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r a_r + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i b_i, w\right\rangle + \langle d, w\rangle$$
$$= \left\langle \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r a_r + \sum_{i\in\mathfrak{B}^*} \beta_i b_i + d, w\right\rangle.$$

از آنجاییکه رابطه‌ی اخیر با ادعای ثابت شده در تناقض است، پس فرض خلف باطل، و اثبات کامل است. $\square$

با توجه به قضایای ۳.۳ و ۴.۳، می‌توانیم اولین شکل قضیه گردان را برای تعداد دلخواهی تابع زیر خطی، به صورت زیر تنظیم کنیم.

نتیجه ۵.۳. *فرض کنیم سیستم $\chi := \{\varphi_r(x) < \circ,\ r \in \mathfrak{A},\ x \in \mathfrak{D}\}$ فشرده‌پذیر باشد. آنگاه، گزاره‌های زیر معادل هستند.*

آ) حداقل یک $x \in \mathfrak{D}$ موجود است به‌گونه‌ای‌که $\varphi_r(x) < \circ$ برای هر $r \in \mathfrak{A}$ (یعنی سیستم χ سازگار است).

ب) به ازای هر زیرمجموعه متناهی $\mathfrak{A}^*$ از مجموعه اندیس $\mathfrak{A}$ و به ازای تمام اسکالرهای نامنفی α_r که $r \in \mathfrak{A}^*$ داریم:

$$\circ \in \sum_{r\in\mathfrak{A}^*} \alpha_r \partial\varphi_r(\circ) + N(\mathfrak{D}, \circ) \implies \alpha_r = \circ,\ \forall r \in \mathfrak{A}^*.$$

برای تنظیم شکل‌های دیگری از قضیه گردان، به بررسی گزاره (ب) از نتیجه ۵.۳ نیازمند خواهیم بود.

قضیه ۶.۳. *فرض کنیم $\{\Omega_\text{۱}, \ldots, \Omega_s\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^n$، و مخروط $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ داده شده باشد. آنگاه،*

$$\left[\forall \alpha_r \geq \circ,\ \circ \in \sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r\Omega_r + \Gamma,\ \Leftrightarrow\ \alpha_r = \circ\right] \Leftrightarrow \circ \notin conv\Big(\bigcup_{r=\text{۱}}^{s} \Omega_r\Big) + \Gamma.$$

اثبات. کافی است که تعادل زیر را ثابت کنیم،

$$\left[\exists(\alpha_\text{۱}, \ldots, \alpha_s) \geq \circ,\ \circ \in \sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r\Omega_r + \Gamma\right] \Leftrightarrow \circ \in conv\Big(\bigcup_{r=\text{۱}}^{s} \Omega_r\Big) + \Gamma,$$

که علامت $(\alpha_\text{۱}, \ldots, \alpha_s) \geq \circ$ یعنی تک تک α_rها غیرمنفی بوده، و همگی همزمان صفر نیستند.

تحقیق استنتاج "$\Leftarrow$" واضح است، زیرا طبق (۱.۲)، از $\circ \in conv\big(\bigcup_{r=\text{۱}}^{s} \Omega_r\big)$ نتیجه می‌شود که اعداد نامنفی $\alpha_\text{۱}, \ldots, \alpha_s$ به گونه‌ای موجودند که $\circ \in \sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r\Omega_r$ و $\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r = \text{۱}$، که تساوی اخیر ایجاب می‌کند که $(\alpha_\text{۱}, \ldots, \alpha_s) \geq \circ$.

برای اثبات استنتاج "$\Rightarrow$" از شرط $(\alpha_\text{۱}, \ldots, \alpha_s) \geq \circ$ می‌فهمیم که $\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r > \circ$. پس، از $\circ \in \sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r\Omega_r + \Gamma$ نتیجه می‌گیریم،

$$\circ \in \frac{\text{۱}}{\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r}\left(\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r\Omega_r + \Gamma\right) = \sum_{r=\text{۱}}^{s} \frac{\alpha_r}{\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r}\Omega_r + \frac{\text{۱}}{\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r}\Gamma \subseteq conv\Big(\bigcup_{r=\text{۱}}^{s} \Omega_r\Big) + \Gamma,$$

که شمول آخر با توجه به روابط $\frac{\text{۱}}{\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r}\Gamma \subseteq \Gamma$ (چون Γ مخروط است) و $\sum_{r=\text{۱}}^{s} \frac{\alpha_r}{\sum_{r=\text{۱}}^{s} \alpha_r} = \text{۱}$ به دست می‌آید. $\square$

حال آماده‌ایم تا شکل متعارف‌تری از قضیه گردان را ارائه دهیم که از نظر تئوری بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

قضیه ۷.۳. *فرض کنیم که سیستم χ، تعریف شده در نتیجه ۵.۳، فشرده پذیر باشد. آنگاه χ سازگار است اگر و تنها اگر*

$$\circ \notin conv\Big(\bigcup_{r\in\mathfrak{A}} \partial\varphi_r(\circ)\Big) + N(\mathfrak{D},\circ).$$

اثبات. χ سازگار است اگر و تنها اگر قسمت (ب) از نتیجه ۵.۳ برقرار باشد، و آن نیز، طبق قضیه ۶.۳، معادل است با این که برای هر زیرمجموعه متناهی $\mathfrak{A}^*$ از $\mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$\circ \notin conv\Big(\bigcup_{r\in\mathfrak{A}^*} \partial\varphi_r(\circ)\Big) + N(\mathfrak{D},\circ),$$

که این نیز، طبق رابطه (۱.۲)، معادل است با

$$\circ \notin conv\Big(\bigcup_{r\in\mathfrak{A}} \partial\varphi_r(\circ)\Big) + N(\mathfrak{D},\circ).$$

□

اگر قرار دهیم $\mathfrak{D}=\mathbb{R}^n$ و $\varphi_r(x)=\langle\alpha_r,x\rangle$، آنگاه حکم زیر را می‌توان به عنوان نتیجه‌ی بلافصل قضیه ۷.۳ در نظر گرفت.

نتیجه ۸.۳. *فرض کنیم سیستم $\Pi := \{\langle\alpha_r,x\rangle < \circ,\ r\in\mathfrak{A}\}$ فشرده‌پذیر باشد. آنگاه Π ناسازگار است اگر وتنها اگر $\circ \in conv\big(\{\alpha_r :\ r\in\mathfrak{A}\}\big)$.*

تذکر: چون هر سیستم متناهی‌ای، فشرده‌پذیر است، پس با انتخاب $|\mathfrak{A}|<\infty$، نتیجه ۸.۳ به قضیه کلاسیک گردان تبدیل می‌شود.

نکته: لازم به توضیح است که طبق آخرین اطلاعات ما، متداول‌ترین تعمیم قضیه گردان برای تعداد نامتناهی تابع خطی، [۴، قضیه ۲.۳] می‌باشد. حکم فوق نیز مانند نتیجه ۸.۳ است با این تفاوت که به جای فرض فشرده پذیری Π، بسته بودن $conv\big(\{\alpha_r :\ r\in\mathfrak{A}\}\big)$ را فرض کرده است. چون بسته بودن $conv\big(\{\alpha_r :\ r\in\mathfrak{A}\}\big)$ و فشرده‌پذیر بودن Π از یکدیگر مستقل می‌باشند و هیچ‌یک نمی‌تواند دیگری را نتیجه دهد، پس هیچ‌کدام از این دو حکم (نتیجه ۸.۳ در بالا، و [۴، قضیه ۲.۳]) قویتر از دیگری نبوده، و دو حکم موازی را در تعمیم قضیه گردان بیان می‌نمایند.

۴. شرایط لازم بهینگی

در این فصل به ارائه‌ی شرایط لازم مرتبه اول بهینگی برای مسئله نیمه‌نامتناهی محدب (P) خواهیم پرداخت. در ابتدا متذکر می‌شویم که با فرض

$$S := \big\{x\in\mathbb{R}^n :\ g_i(x)\le\circ,\ \forall i\in I\big\}\neq\emptyset,$$

مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های موجه[۳۴] (P) به شکل $S\cap Q$ می‌باشد. برای هر $x_\circ\in S\cap Q$، فرض کنیم $I(x_\circ)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه اندیس‌های فعال در $x_\circ$ باشد، یعنی

$$I(x_\circ) := \{i\in I\ :\ g_i(x_\circ)=\circ\}.$$

لازم به تذکر است که اگر I یک مجموعه نامتناهی باشد، مجموعه‌ی $I(x_\circ)$ می‌تواند تهی، متناهی یا نامتناهی باشد. از آنجاییکه درستی احکام زیر در حالت $I(x_\circ)=\emptyset$،به سادگی قابل تحقیق هستند، لذا همواره فرض خواهیم کرد که $I(x_\circ)\neq\emptyset$.

لم ۱.۴. *فرض کنیم که $x_\circ$ یک جواب بهینه برای مسئله (P) باشد. آنگاه*

$$\big\{d\in\mathbb{R}^n\ :\ f'(x_\circ;d)<\circ\big\}\cap K(S\cap Q,x_\circ)=\emptyset.$$

[34] feasible solutions

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

اثبات. برای اثبات حکم، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم که بردار $d \in \mathbb{R}^n$ در اشتراک بالا قرار داشته باشد. آنگاه، دنباله‌های $t_k \downarrow \circ$ و $d_k \to d$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_\circ + t_k d_k \in S \cap Q$. با استفاده از قضیه مقدار میانی، برای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌توان یک u_k در خط واصل $x_\circ$ و $x_\circ + t_k d_k$، و یک $\xi_k \in \partial f(u_k)$ یافت به‌طوری‌که:

$$f(x_\circ + t_k d_k) - f(x_\circ) = t_k \langle \xi_k, d_k \rangle. \tag{۱.۴}$$

چون $u_k \to x_\circ$ و نگاشت مجموعه‌ـمقدار $x \longmapsto \partial f(x)$ نیم‌پیوسته بالایی است، پس یک زیر دنباله‌ی همگرا از $\{\xi_k\}$، مانند $\{\xi_{k_m}\}$، وجود دارد که $\xi_{k_m} \to \xi$ و $\xi \in \partial f(x_\circ)$. در نتیجه، از تعریف $\partial f(x_\circ)$ رابطه زیر برقرار است:

$$\langle \xi, d \rangle \leq f'(x_\circ; d) < \circ. \tag{۲.۴}$$

از طرف دیگر، از شمول $x_\circ + t_k d_k \in S \cap Q$ و مینیمم بودن نقطه‌ی $x_\circ$ برای (P)، نتیجه می‌شود که

$$f(x_\circ + t_k d_k) - f(x_\circ) \geq \circ.$$

از اینجا و (۱.۴)، داریم $\langle \xi, d \rangle \geq \circ$، که با (۲.۴) در تناقض است. لذا اثبات کامل است. □

تعریف ۲.۴. می‌گوییم که صلاحیت قیدی آبادی[35]، که با ACQ نشان می‌دهیم، در $x_\circ \in S \cap Q$ برقرار است، هرگاه:

$$\Big(\bigcup_{i \in I(x_\circ)} \partial g_i(x_\circ) \Big)^p \cap K(Q, x_\circ) \subseteq K(S \cap Q, x_\circ).$$

لازم به تذکر است که در حالت $Q = \emptyset$، تعریف بالا بر تعریف ACQ در [۱۳] منطبق خواهد شد. همچنین اگر توابع g_i را در $x_\circ$ مشتق‌پذیر فرض کرده و $Q = \emptyset$ و مجموعه I متناهی باشد، تعریف ۲.۴ به تعریف کلاسیک ACQ در [۲] تبدیل می‌شود. اکنون برای بیان و اثبات شرط لازم بهینگی فریزـجان برای مسئله (P) آماده‌ایم.

قضیه ۳.۴. *فرض کنیم $x_\circ \in S \cap Q$ یک جواب بهینه برای مسئله (P) باشد. همچنین، فرض کنیم سیستم*

$$\begin{cases} f'(x_\circ; v) < \circ, \\ g_i'(x_\circ; v) \leq \circ, \quad i \in I(x_\circ), \\ v \in K(Q, x_\circ), \end{cases}$$

فشرده‌پذیر بوده، و ACQ در $x_\circ$ برقرار باشد آنگاه، تعداد متناهی اندیس $q \geq k \geq ۱$ $i_k \in I(x_\circ)$، و همچنین ضرایب $\alpha \geq \circ$ و $\lambda_{i_k} \geq \circ$ (برای هر $۱ \leq k \leq q$) موجودند که همگی همزمان صفر نیستند و

$$\circ \in \alpha \partial f(x_\circ) + \sum_{k=۱}^{q} \lambda_{i_k} \partial g_{i_k}(x_\circ) + N(Q, x_\circ).$$

اثبات. فرض کنیم که $d \in \left(\cup_{iI(x_\circ)} \partial g_i(x_\circ) \right)^p \cap K(Q, x_\circ)$ به دلخواه انتخاب شده باشد. با توجه به فرض برقرار بودن ACQ در $x_\circ$ و لم ۱.۴، نتیجه می‌گیریم که $f'(x_\circ; d) \geq \circ$.

این بدین معنا است که اگر بردار $d \in \mathbb{R}^n$ در نامساوی‌های $d \in K(Q, x_\circ)$ و

$$g_i'(x_\circ; d) = \max \left\{ \langle \xi_i, d \rangle \ : \ \xi_i \in \partial g_i(x_\circ) \right\} \leq \circ, \ \forall i \in I(x_\circ),$$

[35] abadie constraint qualification

صدق کند، آنگاه داریم $f'(x_\circ;d) \geq \circ$. پس هیچ برداری مثل $v \in \mathbb{R}^n$ وجود ندارد که در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} f'(x_\circ;v) < \circ, \\ g_i'(x_\circ;v) \leq \circ, \quad i \in I(x_\circ), \\ v \in K(Q,x_\circ), \end{cases}$$

و چون سیستم فوق فشرده‌پذیر فرض شده است، با استفاده از قضیه ۳.۳، زیرمجموعه‌ی متناهی $\{i_1,i_2,\ldots,i_q\}$ از $I(x_\circ)$، و اعداد $\alpha \geq \circ$ و $\lambda_{i_k} \geq \circ$ برای $1 \leq k \leq q$ موجودند که همزمان صفر نیستند و

$$\circ \in \alpha\partial f'(x_\circ;\cdot)(\circ) + \sum_{k=1}^{q} \lambda_{i_k} \partial g_{i_k}'(x_\circ;\cdot)(\circ) + N(K(Q,x_\circ),\circ).$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، تساوی $\partial f'(x_\circ;\cdot)(\circ) = \partial f(x_\circ)$، و این واقعیت که

$$N(K(Q,x_\circ),\circ) = (K(Q,x_\circ))^p = N(Q,x_\circ),$$

اثبات حکم کامل می‌باشد. □

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، قضیه ۳.۴ یک شرط لازم از نوع فریز–جان برای بهینه بودن نقطه $x_\circ$ ارائه می‌دهد. از طرف دیگر در برنامه‌ریزی‌های متناهی مشتق‌پذیر، می‌دانیم که هرگاه یک صلاحیت قیدی برقرار باشد، می‌توانیم شرایط لازم از نوع کاروش–کان–تاکر را اثبات کنیم که قویتر از شرایط لازم فریز–جان می‌باشد. به منظور یادآوری قیدهای تعریفی متعدد و نقش آنها در رسیدن به شرایط لازم کاروش–کان–تاکر و مقایسه این شرایط با شرایط لازم فریز–جان، به منبع [۲] مراجعه فرمایید. پس، توقع می‌رود که در اینجا نیز با فرض برقراری ACQ، بتوانیم به شرط کاروش–کان–تاکر برسیم. با بررسی منابع مربوط به برنامه‌ریزی غیرمشتق‌پذیر (چه محدب و چه غیرمحدب) درمی‌یابیم که توقع فوق به حقیقت نمی‌پیوندد. در حقیقت، برای رسیدن به شرط کاروش–کان–تاکر برای مسائل غیرهموار، علاوه بر فرض یک صلاحیت قیدی، نیازمند به شرایط دیگری نیز هستیم که غالبا به شکل بسته بودن مخروط‌های خاصی هستند (برای مطالعه حالت محدب، به [۶] و حالت غیرمحدب، به [۲] مراجعه شود).

قضیه زیر نشان می‌دهد که برای رسیدن به شرط لازم کاروش–کان–تاکر، علاوه بر ACQ، به بسته بودن یک مخروط نیز نیازمند خواهیم بود. لازم به تاکید است که در شرط لازم زیر، ضریب تابع هدف برابر عدد یک می‌باشد، و این امر تاثیر تابع هدف را در شرط فوق تضمین می‌کند.

قضیه ۴.۴. *فرض کنیم $x_\circ \in S \cap Q$ یک جواب بهینه برای مسئله (P) باشد و ACQ در $x_\circ$ برقرار باشد. همچنین فرض کنیم مخروط*

$$cone\Big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)} \partial g_i(x_\circ)\Big)$$

بسته باشد. آنگاه تعداد متناهی اندیس $i_k \in I(x_\circ)$، $1 \leq k \leq q$، و همچنین ضرایب $\lambda_{(i_k)} \geq \circ$ (برای $1 \leq k \leq q$) موجودند که همزمان صفر نیستند و

$$\circ \in \partial f(x_\circ) + \sum_{k=1}^{q} \lambda_{i_k} \partial g_{i_k}(x_\circ) + N(Q,x_\circ).$$

اثبات. با توجه به قضیه ۳.۱ و تعریف مخروط نرمال داریم:

$$\circ \in \partial f(x_\circ) + N(S\cap Q,x_\circ) = \partial f(x_\circ) + (K(S\cap Q,x_\circ))^p,$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

که با استفاده از شرط ACQ در $x_\circ$، عبارت بالا زیرمجموعه‌ای است از

$$\partial f(x_\circ)+\left(\left(\bigcup_{i\in I(x_\circ)}\partial g_i(x_\circ)\right)^p\cap K(Q,x_\circ)\right)^p.$$

در نتیجه، با توجه به تساوی $(\mathcal{M}\cap\mathcal{H})^p=\mathcal{M}^p+\mathcal{H}^p$ از فصل دوم، داریم:

$$\circ\in\partial f(x_\circ)+\left(\left(\bigcup_{i\in I(x_\circ)}\partial g_i(x_\circ)\right)^p\right)^p+\big(K(Q,x_\circ)\big)^p,$$

که با استفاده از قضیه دوقطبی و تعریف مخروط نرمال، به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\circ\in\partial f(x_\circ)+\overline{cone}\left(\bigcup_{iI(x_\circ)}\partial g_i(x_\circ)\right)+N(Q,x_\circ).$$

از رابطه اخیر، شرط بسته بودن $cone\big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)}\partial g_i(x_\circ)\big)$ و رابطه (۱.۲) حکم بدست می‌آید. □

تذکر: بعضی از صلاحیت‌های قیدی، از جمله صلاحیت قیدی اسلیتر [36] [۱۴] و صلاحیت قیدی پایه [۶، ۱۳] به اندازه‌ای قوی هستند که می‌توان از آنها هم یک صلاحیت قیدی ضعیف مانند ACQ، و هم بسته بودن مخروط $cone\big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)}\partial g_i(x_\circ)\big)$ را نتیجه گرفت ([۸، ۹] ملاحظه شود). واضح است که این گونه صلاحیت‌های قیدی، برای رسیدن به شرط لازم کاروش ـ کان ـ تاکر، به تنهایی کفایت می‌کنند.

مثال زیر نشان می‌دهد که شرط بسته بودن $cone\big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)}\partial g_i(x_\circ)\big)$ را نمی‌توان از قضیه ۴.۴ حذف کرد، و صدق کردن ACQ در یک نقطه بهینه برای برقراری شرط کاروش ـ کان ـ تاکر کافی نمی‌باشد.

مثال ۵.۴. مسئله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\min\ f(x):=-x_\text{۱}\\&\quad g_i(x):=\sup_{y\in M_i}\langle x,y\rangle=\sup\{x_\text{۱}y_\text{۱}+x_\text{۲}y_\text{۲}\ :\ y\in M_i\},\ \forall i\in I:=\mathbb{N}\cup\{\circ\}\\&\quad x\in Q:=\mathbb{R}^\text{۲},\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$M_i:=\left\{y\in\mathbb{R}^\text{۲}\ :\ y_\text{۱}^\text{۲}+(y_\text{۲}-\text{۱}-i)^\text{۲}\le(\text{۱}+i)^\text{۲},\ y_\text{۱}\ge\circ,\ y_\text{۲}\ge\circ\right\}.$$

به وضوح، توابع f و g_i محدب بوده و $x_\circ=(\circ,\circ)$ یک جواب بهینه از مسئله است. همچنین با یک محاسبه ساده می‌توان تحقیق کرد که:

$$K(S\cap Q,x_\circ)=K(S,x_\circ)=S=\{x\in\mathbb{R}^\text{۲}\ :\ x_\text{۱}\le\circ,\ x_\text{۲}\le\circ\}.$$

همچنین، چون g_i تابع محملی [37] مخروط محدب بسته‌ی M_i است و تابع f مشتق‌پذیر است، داریم:

$$\begin{aligned}&\partial g_i(x_\circ)=M_i,\\&\partial f(x_\circ)=\big\{\nabla f(x_\circ)\big\}=\{(-\text{۱},\circ)\}.\end{aligned}$$

---

[36] slater [37] support function

در نتیجه،

$$cone\Big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)} \partial g_i(x_\circ)\Big) = \{x\in\mathbb{R}^{۲} \,:\, x_{۱}\geq \circ,\ x_{۲}<\circ\}\cup\{(\circ,\circ)\},$$

$$\Big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)} \partial g_i(x_\circ)\Big)^p = S.$$

پس ACQ برقرار است و $cone\big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)}\partial g_i(x_\circ)\big)$ بسته نیست. روابط زیر به وضوح برقرار می‌باشند:

$$\circ\in\partial f(x_\circ)+\overline{cone}\Big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)} \partial g_i(x_\circ)\Big),$$

$$\circ\notin\partial f(x_\circ)+cone\Big(\bigcup_{i\in I(x_\circ)} \partial g_i(x_\circ)\Big).$$

مراجع

[1] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, (1998).

[2] G. Giorgi, A. Gwirraggio and J. Thierselder, Mathematics of Optimization; Smooth and Nonsmooth Cases, Elsivier, (2004).

[3] M. A. Goberna and N. Kanzi, Optimality conditions in convex multiobjective SIP, *Math. Program. Ser.*, **164** (2017) 167–191.

[4] M. A. Goberna and M. A. Lopez, Linear Semi-Infinite Optimization, Wiley, (1998).

[5] M. Golestani and N. Kanzi. Necessary and sufficient conditions for optimality of nonsmooth semi-infinite programming, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, **41** (2017) 923–929.

[6] H. B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer, Berlin, (1991).

[7] N. Kanzi. Non-Lipschitz semi-infinite optimization problems involving local cone approximation, Iranian Journal of Operations Research, **5** (2014) 1–11.

[8] N. Kanzi, Necessary optimality conditions for nonsmooth semi-infinite programming Problems, *J. Global Optim.*, **49** (2011) 713–725.

[9] N. Kanzi, Constraint qualifications in semi-infinite systems and their applications in nonsmooth semi-infinite problems with mixed constraints, *SIAM J. Optim.*, **24** (2014) 559–572.

[10] N. Kanzi and M. Soleimani-damaneh. Slater CQ, optimality and duality for quasiconvex semi-infinite optimization problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **434** (2016) 638–651.

[11] N. Kanzi and S. Nobakhtian, Optimality conditions for nonsmooth semi-infinite programming, *Optimization*, **59** (2008) 717–727.

[12] S. Lang, *L*inear Algebra, Springer-Verlag, New York, (1987).

[13] W. Li, C. Nahak and I. Singer, Constraint qualifications in semi-infinite systems of convex inequalities, *SIAM J. Optim.*, **11** (2000) 31–52.

[14] M. A. López and E. Vercher, Optimality conditions for nondifferentiable convex semi-infinite programming, *Math. Program.*, **27** (1983) 307–319.

[15] M. A. López and G. Still. Semi-infinite programming, *European J. Oper. Res.*, **180** (2007) 491–518.

[16] O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, (1969).

[17] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, (1970).

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

نادر کنزی
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
nad.kanzi@gmail.com

نادر کنزی عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور است. وی دوره‌های کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضی (گرایش محض) را در دانشگاه شهید بهشتی تهران، و دوره دکتری خود را در رشته ریاضی محض (گرایش آنالیز) در دانشگاه اصفهان گذرانده است.

علی صادقیه
گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی مرکز یزد، یزد، ایران
alijon.sadeghieh@gmail.com

علی صادقیه عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی یزد است. وی دوره‌ی کارشناسی ریاضی (گرایش محض) را در دانشگاه یزد، کارشناسی ارشد را در دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال (گرایش محض)، و دوره دکتری خود را در رشته ریاضی محض در واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی تهران گذرانده است.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449

Extended Gordan Theorem for Arbitrary number of Sub-linear Functions and Its Application in Convex Semi-Infinite Optimization

Nader Kanzi* and Ali Sadeghieh

Abstract: In this paper, the Gordan theorem is extended for infinite number of sub-linear functions, and the Fritz-John necessary optimality condition is obtained for convex semi-infinite optimization problems. Finally, a constraint qualification and a necessary optimality condition in Karush-Kuhn-Tucker type are presented for the consider problems.

Keywords: Gordan Theorem, Convex Optimization, Semi-Infinite Problem, Necessary Optimality Condition.

Nader Kanzi
Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.
Email: nad.kanzi@gmail.com

Ali Sadeghieh
Department of Mathematics, Yazd branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran.
Email: alijon.sadeghieh@gmail.com

Communicated by Soghra Nobakhtian.
Article Type: Research Paper.
Received: 2021/07/22, Accepted: 2021/09/11.
* Corresponding author.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.129707.1449