

روش افراز واحد چندجمله‌ای؛ ابزاری کارآمد در تقریب توابع

داود میرزائی*، محمدرضا احمدی دارانی و سعید وحدتی

چکیده. در این مقاله، تقریب و درونیابی چندجمله‌ای مبتنی بر افراز واحد را بررسی و از آن به عنوان روشی کارآمد برای حل عددی مسائل چندمتغیره استفاده می‌کنیم. نخست تقریب‌های چندجمله‌ای چندمتغیره مطرح و خواص مقیاس‌پذیری آن‌ها را اثبات و برای به‌دست آوردن کران‌های پایداری و همگرایی از آن‌ها استفاده می‌کنیم. برای ارائه یک الگوریتم پایدار، این تقریب‌ها به صورت موضعی روی زیردامنه‌هایی از دامنه اصلی محاسبه و به کمک توابع افراز واحد به هم متصل می‌شوند تا یک تقریب سراسری هموار حاصل شود. در پایان کران خطای تقریب سراسری نیز بر اساس کران‌های خطای تقریب‌های موضعی به‌دست می‌آید. ایده این روش، حل چندین مسئله کوچک پایدار به جای حل یک مسئله بزرگ بدووضع است. از لحاظ محاسباتی چنین رویکردی بسیار کارآمد و قابل استفاده در حوزه وسیعی از کاربردهاست. برای نمونه حل عددی معادلات دیفرانسیل را به کمک این تقریب مورد بررسی قرار می‌دهیم. در تقریب با این روش از شبکه‌بندی ناحیه (همانند روش‌های المان متناهی و حجم متناهی) اجتناب و به جای آن کمیت مجهول بر حسب نقاط پراکنده نوشته می‌شود. از این‌رو این روش را می‌توان یک روش بدون شبکه نیز به حساب آورد.

۱. مقدمه

مسئله «درونیابی چندجمله‌ای» یک بعدی عبارت است از یافتن یک چندجمله‌ای حداکثر درجه $N - 1$ که از N نقطه متمایز عبور کند. این مسئله خوش تعریف است چون طبق قضیه اساسی جبر هر چندجمله‌ای غیرصفر از درجه $N - 1$ حداکثر $N - 1$ ریشه دارد. بنابراین اگر دو چندجمله‌ای از درجه $N - 1$ داشته باشیم که هر دو از آن N نقطه متمایز عبور کنند (یعنی در آن نقاط یکسان باشند)، لزوماً با هم یکی هستند. از طرفی مسئله درونیابی بسیار پرکاربرد است و در غالب مسائل محاسباتی بروز پیدا می‌کند. حالتی که تعداد نقاط بیشتر از N باشد و درجه چندجمله‌ای کمتر از N در نظر گرفته شود (در صورت وجود جواب) به مسئله «تقریب چندجمله‌ای» مشهور است. قاعدتاً این تقریب از بخشی یا تمام نقاط عبور نخواهد کرد، اما به گونه‌ای به‌دست می‌آید که با متر مناسبی از نزدیکی اکثر نقاط عبور کرده باشد. در شکل ۱ در سمت راست چندجمله‌ای درونیاب درجه ۵ که از ۶ نقطه متمایز عبور کرده است نمایش داده شده و در سمت چپ چندجمله‌ای تقریب درجه ۳ روی همان نقاط به وسیله تقریب کمترین مربعات (که در ادامه معرفی خواهد شد) ترسیم شده است.

معمولاً در کتاب‌های آنالیز و محاسبات عددی در مورد درونیابی و تقریب یک متغیره مبتنی بر چندجمله‌ای‌ها بحث می‌شود. تاکنون در کتاب‌ها و سرفصل‌های فارسی توجه کمتری به حالت‌های چندمتغیره شده است، که بعضاً دارای پیچیدگی‌های خاصی اند و با تعمیم سراسری حالت یک متغیره حاصل نمی‌شوند. یکی از اهداف این مقاله برطرف کردن این کاستی در منابع فارسی است،

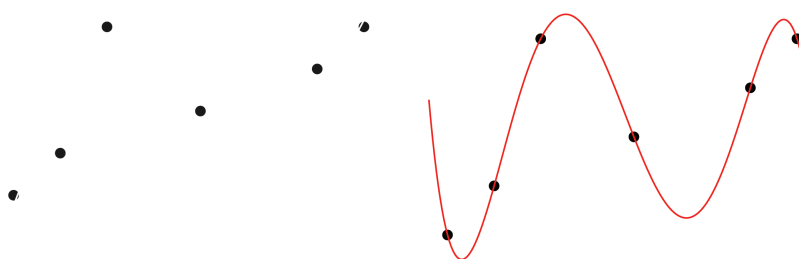
عبارات و کلمات کلیدی: روش‌های بدون شبکه، تقریب، تقریب موضعی، روش افراز واحد، تقریب چندجمله‌ای، تقریب گویا
دبیرتخصصی رابط: صغری نوبختیان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۰۱

نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127648.1417>



شکل ۱: درونیاب درجه ۵ (سمت راست)، تقریب کمترین مربعات درجه ۳ (سمت چپ).

گرچه به مطالب فنی‌تر نیز خواهیم پرداخت تا بتوان از آن به عنوان مرجعی برای انجام پاره‌ای از پژوهش‌های مبتنی بر تقریب‌های چندمتغیره نیز استفاده کرد.

تقریب توابع روی مجموعه متناهی از نقاط یکی از ابزارهای پرکاربرد در علوم و مهندسی است و در آن افزایش کارایی الگوریتم‌های تقریبی از دیدگاه‌ها دقت، پایداری و کاهش هزینه‌های محاسباتی مد نظر است. از یک دیدگاه می‌توان مسائل تقریب و درونیابی را به دو حالت «محمل سراسری» و «محمل فشرده» (یا محمل موضعی) تقسیم‌بندی کرد. در حالت سراسری، محمل پایه‌های تقریب شامل کل ناحیه محاسباتی است؛ همانند درونیابی چندجمله‌ای که در آن فضای تقریب فضای چندجمله‌ای‌های تا درجه مشخصی است و می‌دانیم که هر پایه برای این فضا (مثلاً پایه تک جمله‌ای‌ها، پایه لاگرانژ یا پایه نیوتن) دارای محمل سراسری روی کل بازه درونیابی است. تقریب و درونیابی سراسری در حالت یک بعدی و روی نقاط مشخص (مانند ریشه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد) منجر به دقت طیفی برای توابع (بسیار) هموار می‌شود و الگوریتم‌های مناسبی هم برای محاسبه آن وجود دارد ([۱۷] را ببینید).

با وجود این، استفاده از نقاط پراکنده در دامنه، گسترش مسئله به ابعاد بالاتر، کاهش همواری تابع و لزوم کار با دامنه‌های چندبعدی دلخواه، منجر به از دست رفتن همه آن ویژگی‌های خوب خواهد شد. استفاده از تقریب‌های محمل فشرده به جای حالت سراسری یک روش مؤثر برای برطرف کردن برخی از این ضعف‌ها است. پایه‌های محمل فشرده در تقریب باعث ایجاد ماتریس‌های تنک و معمولاً خوش‌وضع و الگوریتم‌های محاسباتی پایدار و سریع می‌شوند. برای نمونه، روش تقریب با اسپلاین‌ها ابزاری شناخته شده است که در این زمینه توسعه یافته است. فضای اسپلاین‌ها یک فضای تقریب محمل فشرده (مثلاً با پایه B -اسپلاین) است که برخی از ویژگی‌های چندجمله‌ای‌ها را نیز دارد. به همین علت کاربرد وسیعی در علوم محاسباتی و مهندسی برای تقریب توابع، حل عددی معادلات دیفرانسیل و دیگر کاربردها مانند طراحی گرافیکی داشته است. برای اطلاع بیشتر از ویژگی‌های این روش تقریب به [۲۰، ۱۶، ۳] مراجعه نمایید. با این حال تعمیم اسپلاین‌ها به ابعاد بالاتر دارای پیچیدگی‌های خاص خود است و به همین دلیل اسپلاین‌ها کمتر در تقریب‌های چندمتغیره مورد استفاده قرار گرفته‌اند. البته از یک دیدگاه برخی از توابع پایه‌ای شعاعی^۱ را می‌توان تعمیم خاصی از اسپلاین‌ها در نظر گرفت که برای تقریب‌های چندمتغیره استفاده می‌شوند؛ از آن جمله می‌توان به توابع اسپلاین صفحه باریک^۲ اشاره کرد. با این حال ویژگی‌های این توابع در برخی موارد متفاوت از اسپلاین‌های شناخته شده یک بعدی است. برای مثال توابع اسپلاین صفحه باریک دارای محمل فشرده نیستند. برای جزئیات بیشتر در این موضوع به [۱۹، ۵] مراجعه کنید.

یک روش کارآمد برای ساختن تقریب‌های محمل فشرده، استفاده از توابع «افراز واحد» (PU)^۳ است. ایده این روش، ساختن تقریب‌های موضعی در سراسر دامنه و سپس اتصال آن‌ها به وسیله توابع افراز واحد برای ساختن یک تقریب سراسری هموار است. بنابراین در عمل کافی است به جای حل یک مسئله سراسری بزرگ (و احیاناً بدوضع)، تعدادی مسئله موضعی کوچک (و احتمالاً خوش‌وضع) حل کنیم. چنین رویکردی از لحاظ پایداری و هزینه محاسباتی بسیار کارآمد خواهد بود.

^۱radial basis functions (RBF) ^۲thin plate spline (TPS) ^۳partition of unity

از دیدگاه تاریخی، توابع افراز واحد را نخستین بار شپارد در سال ۱۹۶۸ در [۱۵] استفاده کرده است. در آن زمان داندل شپارد دانشجوی کارشناسی در دانشگاه هاروارد بود که از این تقریب برای بازیابی رویه‌ها استفاده کرد. با این حال توابعی مشابه (نه لزوماً یکسان) در رگرسیون چندمتغیره وجود دارند که دارای قدمت بیشتری هستند. کاربردی از توابع افراز واحد در روش المان متناهی^۴ برای حل معادلات دیفرانسیل را ملینک و بابوشکا در [۱۰] ارائه کردند و اهمیت این توابع را دوچندان کرد. اولین استفاده از این توابع در تقریب‌های پایه‌ای شعاعی در [۱۸] ارائه شد و پس از آن در [۱۹] برای پیاده‌سازی سریع این تقریب‌ها مورد تحلیل قرار گرفت. ترکیب جالبی از توابع افراز واحد و روش حجم متناهی^۵ در [۸] ارائه شده است که نشان می‌دهد با این دیدگاه می‌توان روش حجم متناهی را به صورت یک روش بدون شبکه^۶ پیاده‌سازی کرد. برای مشاهده کاربردهای دیگر بخصوص در حل معادلات دیفرانسیل جزئی مراجع [۲، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۴] را مشاهده کنید.

در این مقاله ابتدا درونیابی و تقریب چندمتغیره در بخش ۳ مطرح می‌شود و سپس خواص مقیاس‌پذیری این تقریب‌ها برای محاسبه تقریب تابع و مشتقات آن در بخش ۴ مورد واکاوی قرار می‌گیرند. کران‌های پایداری و خطا به کمک خاصیت مقیاس‌پذیری اثبات می‌شوند. در بخش‌های ۵ و ۶ برای به دست آوردن یک الگوریتم کارآمد، تقریب و درونیابی چندجمله‌ای را به صورت موضعی روی یک پوشش باز به کار می‌گیریم و به کمک توابع افراز واحد یک تقریب سراسری روی کل دامنه به دست می‌آوریم. واضح است که از این تقریب سراسری می‌توان در حل معادلات دیفرانسیل نیز بهره گرفت. در بخش ۷ به این مهم پرداخته شده است. کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل منجر به ماتریس‌های نهایی تنک (و خوش وضع) خواهد شد. در بخش ۸ نتایج عددی متنوعی برای درونیابی و تقریب یک و چند متغیره به همراه مثال‌هایی از حل معادلات دیفرانسیل ارائه خواهیم داد. در انتها یک روش درونیابی گویای افراز واحد را در بخش ۹ مطرح و مثال‌هایی ارائه خواهیم کرد. نتیجه اساسی این مقاله این است که روش افراز واحد چندجمله‌ای را می‌توان به عنوان یک ابزار کارآمد در تقریب توابع، حل عددی معادلات دیفرانسیل و دیگر مسائل مرتبط در آنالیز عددی و محاسبات علمی به کار گرفت.

تصور غالب افراد از روش‌های بدون شبکه، روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی است. خواهیم دید که روش ارائه شده در این مقاله یک روش بدون شبکه محمل فشرده صرفاً مبتنی بر چندجمله‌ای‌ها است. در تقریب با این روش از شبکه‌بندی ناحیه (همانند روش‌های المان متناهی و حجم متناهی) اجتناب و به جای آن کمیت مجهول بر حسب نقاط پراکنده نوشته می‌شود.

۲. نمادگذاری

نخست نمادهایی را که در این مقاله استفاده خواهیم کرد معرفی می‌کنیم. برای $d \geq 1$ ، علامت $\mathbb{R}^d$ نمایش فضای اقلیدسی d بعدی حقیقی است. اعضای $\mathbb{R}^d$ را با حروف برجسته مانند $x, y, z, \dots$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم $x = (x_1, \dots, x_d)$. در حالت یک بعدی و دو بعدی برای سادگی به ترتیب از نمادهای $x = x$ و $x = (x, y)$ نیز استفاده می‌کنیم. برای نمایش بردارها از حروف برجسته مانند $a, u, p, \dots$ استفاده می‌کنیم و حروف بزرگ مانند $A, P, \dots$ را برای نمایش ماتریس‌ها به کار می‌بریم. ناحیه Ω را زیرمجموعه‌ای باز و کران‌دار از فضای $\mathbb{R}^d$ با مرز $\partial\Omega$ (یا Γ) و مجموعه

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \Omega$$

را مجموعه‌ای از نقاط متمایز در Ω در نظر می‌گیریم. همچنین در فضای $\mathbb{R}^d$ گوی باز به مرکز $x \in \Omega$ با شعاع $\delta > 0$ را با نماد $B(x; \delta)$ نشان می‌دهیم. نماد $|X|$ نشان دهنده تعداد اعضای این مجموعه است. دو کمیت مرتبط با کیفیت توزیع نقاط در دامنه Ω را تعریف می‌کنیم. فاصله تراکم^۷ نقاط X به صورت

$$h = h_{X, \Omega} = \max_{x \in \Omega} \min_{x_k \in X} \|x - x_k\|_2,$$

^۴finite element method ^۵finite volume method ^۶meshless method ^۷fill distance

تعریف می‌شود و بیانگر شعاع بزرگ‌ترین گویی است که می‌توان در Ω جای داد به گونه‌ای که هیچ نقطه‌ای از X درون آن گوی قرار نگیرد. به عبارت دیگر، h شعاع بزرگ‌ترین حفره خالی در درون Ω است. در حالت یک بعدی، یعنی وقتی نقاط در یک بازه روی خط حقیقی قرار دارند، h نصف ماکسیمم فاصله بین نقاط متوالی است. فاصله تراکم را می‌توان معیاری برای بررسی چگالی نقاط در ناحیه Ω در نظر گرفت. فاصله تفکیک^۸ نقاط X به صورت

$$q_X = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|_2$$

تعریف می‌شود. اگر حول همه نقاط X ، گویی به شعاع q_X بزنیم، هیچ اشتراکی بین گوی‌ها وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر، q_X میزان جداشدگی نقاط X از یکدیگر را نشان می‌دهد. واضح است که همواره داریم $q_X \leq h_{X,\Omega}$. اگر دنباله‌ای از مجموعه نقاط $X_1, X_2, \dots$ داشته باشیم به گونه‌ای که عدد ثابت $c_{qu} > 1$ وجود داشته باشد که برای هر k

$$h_{X_k,\Omega} \leq c_{qu} q_{X_k},$$

آنگاه می‌گوییم $\{X_k\}$ یک دنباله شبه‌یکنواخت^۹ از نقاط است. شبه‌یکنواختی نقاط به این معناست که فاصله تراکم و فاصله تفکیک هم مرتبه‌اند. اگر Ω و X مشخص باشند از نماد ساده‌تر h به جای $h_{X,\Omega}$ برای فاصله تراکم استفاده می‌کنیم. معمولاً کران‌های خطا به صورت تابعی از فاصله تراکم، مثلاً $F(h)$ ، بیان می‌شوند. اگر برای یک ثابت C و مقدار مثبت m (نه لزوماً طبیعی) داشته باشیم $F(h) = Ch^m$ ، گوییم خطا از مرتبه جبری و مرتبه آن برابر با m است. خطاهای از مرتبه نمایی به صورت $F(h) = \exp(-C/h^k)$ و یا $F(h) = \exp(-C|\log h|/h^k)$ برای یک ثابت مثبت C و عدد حقیقی نامنفی k به دست می‌آیند که مورد بحث ما در این مقاله نیستند.

برای نمایش چنداندیشه‌ها از نمادهای یونانی $\alpha, \beta, \dots$ استفاده می‌کنیم. برای چنداندیشه $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ به صورت $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ تعریف می‌شود و $\alpha! = \alpha_1! \times \dots \times \alpha_d!$. همچنین برای $x \in \mathbb{R}^d$ داریم $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$.

فضای چندجمله‌ای‌های d -متغیره از درجه حداکثر m با نماد $\mathbb{P}_m^d$ و بُعد این فضا با $Q = Q(m, d)$ نشان داده می‌شود. واضح است که $Q(m, d) = \binom{m+d}{m}$. فرض می‌کنیم $\{p_1, p_2, \dots, p_Q\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_m^d$ است. گاهی هم پایه تک‌جمله‌ای $\{x^\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$ را برای این فضا به کار می‌بریم.

نماد $C(\Omega)$ برای فضای توابع پیوسته روی Ω به کار می‌رود، و با توجه به اینکه Ω باز است نماد $C^m(\Omega)$ برای توابعی که دارای مشتقات مرتبه m پیوسته روی Ω باشند استفاده می‌شود. برای تابع $f \in C^m(\Omega)$ مشتق مرتبه α با نماد $D^\alpha f$ نمایش داده می‌شود و برای $|\alpha| \leq m$ داریم

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

۳. درونیابی و تقریب کمترین مربعات چندجمله‌ای

فرض کنید یافتن درونیاب چندجمله‌ای برای تابع (حداقل) پیوسته $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ در فضای $\mathbb{P}_m^d$ روی نقاط $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \Omega$ با شرط $N = Q = \dim \mathbb{P}_m^d$ مورد نظر باشد. از این‌رو به دنبال تابع $s \in \mathbb{P}_m^d$ هستیم به گونه‌ای که

$$s(x_k) = u(x_k) \quad (k = 1, \dots, N).$$

^۸separation distance ^۹quasi-uniform

با نوشتن درونیاب برحسب اعضای پایه به صورت

$$(1) \quad s(x) = \sum_{j=1}^N c_j p_j(x) = p(x)^T c,$$

و اعمال شرایط درونیابی، بردار ضرایب c با حل دستگاه معادلات خطی

$$Pc = u$$

به شرطی که P یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، به دست می‌آید. با توجه به اینکه هیچ فضایی با بعد متناهی از چندجمله‌ای‌ها (یا هر زیرفضایی با بعد متناهی از توابع پیوسته) در ابعاد بالاتر از یک تشکیل فضای هار^{۱۰} نمی‌دهد، بنابراین وارون‌پذیری P برای $d \geq 2$ به توزیع نقاط درونیابی X وابسته است. از این رو فرض می‌کنیم نقاط درونیابی به گونه‌ای در دامنه Ω پراکنده شده باشد که این ماتریس وارون‌پذیر باشد. اصطلاحاً می‌گوییم X یک مجموعه $\mathbb{P}_m^d$ -یکتاهل‌کننده^{۱۱} باشد.

تعریف ۱.۳. گوئیم $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ برای $N \geq \dim \mathbb{P}_m^d$ یک مجموعه $\mathbb{P}_m^d$ -یکتاهل‌کننده است اگر تنها عضوی از $\mathbb{P}_m^d$ که روی X صفر است، تابع ثابت صفر باشد.

برای مثال، فضای چندجمله‌ای‌های خطی روی $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید. بُعد این فضا برابر با ۳ و مجموعه $\{1, x, y\}$ پایه‌ای برای آن است. درونیابی روی سه نقطه در این فضا دارای جواب یکتا است به شرطی که سه نقطه روی یک خط نباشند، زیرا از سه نقطه روی یک خط بی‌نهایت صفحه (درونیاب خطی) می‌گذرد. برای جزئیات بیشتر در مورد فضاهای هار و مجموعه‌های یکتاهل‌کننده به فصل هفتم [۲۰] مراجعه کنید.

واضح است که فرض یکتاهل‌کنندگی روی X ، معادل با وارون‌پذیری ماتریس P و یکتایی درونیاب است. لازم است یادآوری کنیم که غالباً شرط یکتاهل‌کنندگی برای مجموعه‌های دلخواه یا تصادفی از نقاط به شرطی که $N \geq Q$ به جز در حالت‌های بسیار نادر از چیدمان نقاط، برقرار است.

به فرمول درونیابی (۱) بر می‌گردیم. تابع درونیاب را می‌توان به شکل لاگرانژی

$$(2) \quad s(x) = \sum_{j=1}^N \ell_j(x) u(x_j) = \ell^T(x) u,$$

نیز نوشت که در آن $\ell^T(x) = p^T(x) P^{-1}$. مشتقات u معمولاً با مشتقات s تقریب زده می‌شوند، یعنی

$$D^\alpha s(x) = \sum_{j=1}^N D^\alpha \ell_j(x) u(x_j) = D^\alpha \ell^T(x) u \quad (|\alpha| \leq m),$$

که در آن $D^\alpha \ell^T(x) = D^\alpha p^T(x) P^{-1}$. در حالت یک بعدی، به‌ویژه برای درونیابی سراسری، معمولاً از تشکیل ماتریس واندرموند P و وارون آن اجتناب می‌شود و به جای آن از دستورهای دیگر درونیابی همانند دستور لاگرانژ، نیوتن یا گرانیگاهی استفاده می‌شود. به‌ویژه دستور گرانیگاهی دارای خواص پایداری بسیار بهتری نسبت به بقیه روش‌هاست. اما در ابعاد بالاتر از یک و روی نقاط پراکنده، از ماتریس واندرموند گریزی نیست و بهتر است از تقریب‌های چندجمله‌ای موضعی یا محمل فشرده به جای تقریب‌های سراسری استفاده کرد. برای پایداری کردن الگوریتم در حضور ماتریس‌های واندرموند از یک ایده مقیاس‌سازی استفاده خواهیم کرد. بخش ۴ را ببینید.

¹⁰Haar space ¹¹unisolvant

برای یافتن تقریب کمترین مربعات $s \in \mathbb{P}_m^d$ برای تابع پیوسته u روی نقاط $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ با $N \geq Q$ ، نخست ضرب داخلی گسسته زیر را تعریف می‌کنیم

$$\langle u, v \rangle_X := \sum_{k=1}^N u(x_k) v(x_k) = \mathbf{u}^T \mathbf{v} \quad (u, v \in C(\Omega)).$$

نرم القا شده با این ضرب داخلی را با نماد $\|\cdot\|_X$ نمایش می‌دهیم. حال برای تابع مفروض $u \in C(\Omega)$ تقریب $s = \sum_{j=1}^Q c_j p_j \in \mathbb{P}_m^d$ را به گونه‌ای می‌یابیم که $\|u - s\|_X$ روی $\mathbb{P}_m^d$ مینیمم شود. طبق قضیه تصویر ([۲۰، قضیه ۱۴.۳]) باید داشته باشیم

$$\langle u - s, p_\ell \rangle_X = 0 \quad (\ell = 1, \dots, Q)$$

که این هم معادل است با

$$\sum_{j=1}^Q c_j \langle p_j, p_\ell \rangle_X = \langle u, p_\ell \rangle_X \quad (\ell = 1, \dots, Q).$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی، معادلات بالا را می‌توان به شکل دستگاه نرمال

$$P^T P \mathbf{c} = P^T \mathbf{u}$$

نوشت.

اگر فرض کنیم مجموعه X دارای خاصیت $\mathbb{P}_m^d$ -یکتاهل‌کنندگی است، نتیجه می‌گیریم ستون‌های P مستقل خطی هستند و بنابراین $P^T P$ وارون‌پذیر و مسئله کمترین مربعات دارای جواب یکتا است. در اینجا نیز می‌توان تقریب را به شکل لاگرانژی نوشت. می‌دانیم $s(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{c}$ و از طرفی $\mathbf{u} = (P^T P)^{-1} P^T \mathbf{u}$. بنابراین

$$(3) \quad s(x) = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{u}, \quad \mathbf{a}^T(x) = \mathbf{p}^T(x) (P^T P)^{-1} P^T.$$

با این حال، توابع ساختار^{۱۲} a_k در خاصیت دلتای کرونکر صدق نمی‌کنند. همچنین برای تقریب مشتقات u داریم

$$(4) \quad D^\alpha u(x) \approx D^\alpha s(x) = D^\alpha \mathbf{a}^T(x) \mathbf{u} \quad (|\alpha| \leq m),$$

که در آن $D^\alpha \mathbf{a}^T(x) = D^\alpha \mathbf{p}^T(x) (P^T P)^{-1} P^T$. با افزایش تعداد نقاط درونیایی یا تقریب، جواب مسئله دچار ناپایداری عددی و پدیده رونگه خواهد شد. گرچه در حالت یک بعدی استفاده از ریشه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد به عنوان نقاط تقریب (همانند نقاط چیشف)، و به کارگیری روش‌های پایدار (همانند روش گرانیگاهی) برای محاسبه چندجمله‌ای به‌خوبی این مشکل را بر طرف می‌کند اما چنین رویکردهایی در ابعاد بالاتر از یک، روی دامنه‌های پیچیده و روی نقاط دلخواه و تصادفی قابل پیاده‌سازی نیستند. بنابراین در این مقاله از به کارگیری این تقریب‌ها به صورت سراسری اجتناب کرده و به کمک توابع افراز واحد حالت موضعی این تقریب‌ها را به یک تقریب سراسری هموار تبدیل می‌کنیم. اما پیش از آن به یک ویژگی مهم تقریب‌های چندجمله‌ای می‌پردازیم.

¹² shape functions

۴. مقیاس‌سازی برای رفع ناپایداری

در درونیابی و تقریب چندجمله‌ای اگر از پایه تک‌جمله‌ای

$$(۵) \quad \{x^\alpha\}_{|\alpha| \leq m}$$

استفاده کنیم، دستگاه واندرموند به صورت نمایی^{۱۳} با افزایش m ناپایدار می‌شود. در تقریب‌های چندجمله‌ای محمل فشرده یا موضعی معمولاً m ثابت و نسبتاً کوچک انتخاب می‌شود و همگرایی با کاهش فاصله تراکم (یعنی با کاهش فاصله نقاط؛ h) حاصل می‌گردد. در این حالت نیز ماتریس‌های حاصل با کاهش فاصله تراکم به لحاظ جبری^{۱۴} بدوضع می‌شوند. یک راه مؤثر برای غلبه بر ناپایداری دوم که برای درونیابی و تقریب کمترین مربعات قابل استفاده و قابل تعمیم به ابعاد بالاتر است، انتقال و مقیاس‌بندی نقاط درونیابی یا تقریب است. این روش برای تقریب‌های محمل فشرده بسیار مؤثر است.

قضیه ۱.۴. توابع ساختار در تقریب کمترین مربعات چندجمله‌ای و توابع لاگرانژ در درونیابی چندجمله‌ای، تحت مقیاس پایا هستند.

اثبات. فرض کنید پایه $\{p_1, \dots, p_Q\}$ همان پایه تک‌جمله‌ای (۵) باشد. همچنین فرض کنید هدف ما تقریب روی مجموعه نقاط $X = X_h = \{x_1^h, \dots, x_N^h\}$ با فاصله تراکم h باشد. در این صورت نقاط مقیاس شده متناظر با فاصله تراکم ۱ به صورت $X_1 = X_h/h = \{x_1, \dots, x_N\}$ پس

$$\begin{aligned} p^T(x) &= [p_1(x), \dots, p_Q(x)] \\ &= [p_1(x^h/h), \dots, p_Q(x^h/h)] \\ &= [p_1(x^h), \dots, p_Q(x^h)] H_h = p^T(x^h) H_h, \end{aligned}$$

که در آن H_h ماتریس قطری

$$H_h = \text{diag} \left\{ \underbrace{1, \dots, 1}_{\text{بار } \binom{d}{d-1}}, \underbrace{\frac{1}{h}, \dots, \frac{1}{h}}_{\text{بار } \binom{d+1}{d-1}}, \dots, \underbrace{\frac{1}{h^m}, \dots, \frac{1}{h^m}}_{\text{بار } \binom{d+m-1}{d-1}} \right\}_{Q \times Q},$$

است.

به طور مشابه ماتریس واندرموند تعریف‌شده روی نقاط مقیاس‌بندی‌شده به صورت $P = P_h H_h$ به دست می‌آید. با توجه به معادله (۳) برای بردار توابع ساختار در نقاط مقیاس‌بندی‌شده داریم

$$\begin{aligned} a^T(x) &= p^T(x) (P^T P)^{-1} P^T \\ &= p^T(x^h) H_h ((P_h H_h)^T (P_h H_h))^{-1} (P_h H_h)^T \\ &= p^T(x^h) H_h (H_h^T (P_h^T P_h) H_h)^{-1} H_h^T P_h^T \\ &= p^T(x^h) H_h H_h^{-1} (P_h^T P_h)^{-1} H_h^{-T} H_h^T P_h^T \\ &= p^T(x^h) (P_h^T P_h)^{-1} P_h^T = a_h^T(x^h), \end{aligned}$$

که در آن $a_h(x^h)$ بردار مقادیر توابع ساختار روی نقاط X_h در نقطه x^h است و نشان می‌دهد توابع ساختار تقریب کمترین مربعات تحت مقیاس پایا هستند.

¹³exponentially ¹⁴algebraically

از طرف دیگر، چون برای مسئله درونیایی طبق (۲) بردار توابع لاگرانژ در رابطه $\ell^T(x) = p^T(x)P^{-1}$ صدق می‌کند، به طور مشابه می‌توان ثابت کرد خاصیت پایا بودن تحت مقیاس برای توابع لاگرانژ نیز برقرار است. □

نتیجه ۲.۴. با نمادهای قضیه ۱.۴ داریم

$$(۶) \quad D^\alpha a_h(x^h) = h^{-|\alpha|} D^\alpha a(x), \quad D^\alpha \ell_h(x^h) = h^{-|\alpha|} D^\alpha \ell(x).$$

نتیجه ۲.۴ بیانگر این است که توابع ساختار و لاگرانژ و مشتقات آن‌ها را می‌توان روی نقاط مقیاس‌بندی شده (نقاط با فاصله تراکم ۱) محاسبه و با استفاده از قاعده مقیاس‌پذیری (۶) مقدار آن‌ها را در حالت اصلی به دست آورد. در تقریب‌های محمل فشرده و یا موضعی که تعداد نقاط ثابت است (بعد ماتریس و اندروموند ثابت است و ناپایداری نمایی از طریق بعد دستگاه القا نمی‌شود) و همگرایی با کاهش فاصله تراکم h به دست می‌آید، این رویکرد از ناپایداری عددی جبری القا شده از h جلوگیری می‌کند. با توجه به خاصیت مقیاس‌پذیری می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد که در به دست آوردن کران خطای تقریب کمترین مربعات و درونیایی روی دامنه‌های موضعی به کار می‌آید.

قضیه ۳.۴. با نمادهای قضیه ۱.۴، توابع ساختار تقریب کمترین مربعات چندجمله‌ای روی نقاط X_h در کران پایداری

$$\|D^\alpha a_h(x^h)\|_{\ell_1(\mathbb{R}^N)} = \sum_{j=1}^N |D^\alpha a_{h,j}(x^h)| \leq C_N h^{-|\alpha|}$$

صدق می‌کنند که در آن C_N ثابت وابسته به N و مستقل از h است. کرانی مشابه برای بردار توابع لاگرانژ نیز برقرار است.

اثبات. با توجه به نتیجه ۲.۴ و با توجه به این که طبق برابری $a(x) = p^T(x)(P^T P)^{-1} P^T$ بردار $a(x)$ روی نقاط مقیاس شده با فاصله تراکم ۱ محاسبه می‌شود، اثبات واضح است. □

اثبات پایا بودن توابع لاگرانژ چندجمله‌ای یک بعدی نسبت به مقیاس، با توجه به فرم این توابع که به صورت

$$\ell_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

است، بدیهی است. اثبات بالا تعمیمی برای حالت‌های چندبعدی با پراکندگی دلخواه نقاط روی دامنه‌های دلخواه است.

ملاحظه ۴.۴. روش مقیاس‌سازی بالا روی نقاط، معادل استفاده از پایه مقیاس شده

$$\left\{ \frac{x^\alpha}{h^{|\alpha|}} \right\}_{|\alpha| \leq m}$$

به جای پایه (۵) و ساختن بردار p و ماتریس P با استفاده از پایه جدید روی نقاط X_h است. فرض کنید نقاط درونیایی روی دامنه موضعی $\mathcal{D}$ توزیع شده باشند. برای بهره بردن از خاصیت موضعی پایه تک‌جمله‌ای حول مبدأ، بهتر است نخست مرکز دامنه تقریب را به مبدأ مختصات و نقاط تقریب را به همسایگی مبدأ انتقال دهیم. فرض کنید x_c تقریباً در مرکز $\mathcal{D}$ واقع باشد. پایه منتقل و مقیاس شده

$$(۷) \quad \left\{ \frac{(x - x_c)^\alpha}{h^{|\alpha|}} \right\}_{|\alpha| \leq m}$$

به نتایج عددی دقیق‌تری منتهی می‌شود به‌ویژه برای زمانی که دامنه موضعی $\mathcal{D}$ از مبدأ دور باشد. واضح است که استفاده از این پایه معادل منتقل و مقیاس کردن نقاط به

$$X_h^\circ = \left\{ \frac{x_1 - x_c}{h}, \frac{x_2 - x_c}{h}, \dots, \frac{x_N - x_c}{h} \right\}$$

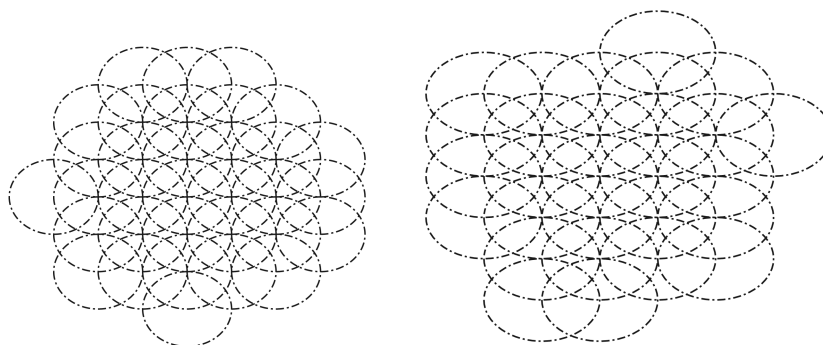
و استفاده از پایه تک‌جمله‌ای (۵) است.

۵. روش افراز واحد

در این بخش روش تقریب به کمک توابع افراز واحد را بیان می‌کنیم. گوییم مجموعه $\{\Omega_j\}_{j=1}^{N_c}$ که در آن $\Omega_j \subset \mathbb{R}^d$ پوششی باز برای Ω است اگر Ω_j ها مجموعه‌هایی باز باشند و

$$\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_c} \Omega_j.$$

این بدان معناست که هر نقطه در Ω دست‌کم در یکی از زیردامنه‌های (سلول‌های) Ω_j قرار گرفته باشد. برای مثال، در شکل ۲ پوشش‌های دایره‌ای برای دو ناحیه متفاوت نشان داده شده است.



شکل ۲: نقاط پراکنده هالتون روی دایره واحد (سمت چپ) و یک ناحیه با مرز خمیده (سمت راست) به همراه یک پوشش باز دایره‌ای روی هر یک از این نواحی.

تعریف ۱.۵. فرض کنید $\{\Omega_j\}_{j=1}^{N_c}$ یک پوشش باز برای Ω باشد. توابع نامنفی، پیوسته و با محمل فشرده $w_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را توابع «افراز واحد» نسبت به پوشش $\{\Omega_j\}$ می‌گوییم اگر

$$\text{الف) } \text{supp}(w_j) \subseteq \Omega_j \text{ برای } j = 1, \dots, N_c,$$

$$\text{ب) } \sum_{j=1}^{N_c} w_j(\mathbf{x}) = 1 \text{ برای هر } \mathbf{x} \in \Omega,$$

که در آن $\text{supp}(w_j) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : w_j(\mathbf{x}) \neq 0\}}$ بیانگر محمل توابع w_j است.

یک روش ساده برای ساختن توابع افراز واحد این است که توابع نامنفی و با محمل فشرده دلخواه ϕ_j روی Ω_j را در نظر بگیریم و تعریف کنیم

$$(A) \quad w_j(\mathbf{x}) = \frac{\phi_j(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^{N_c} \phi_k(\mathbf{x})} \quad (j = 1, \dots, N_c).$$

این توابع به توابع وزن شپارد معروف‌اند. واضح است که توابع شپارد در دو شرط تعریف ۱.۵ صدق می‌کنند.

حال توضیح می‌دهیم که چگونه از توابع افراز واحد برای به‌دست آوردن یک تقریب با محمل فشرده استفاده می‌کنیم. گیریم $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حداقل پیوسته باشد. همچنین فرض می‌کنیم $V_j \subset C(\Omega_j)$ برای $j = 1, \dots, N_c$ ، فضاهای تقریب روی زیردامنه‌های Ω_j باشند و $s_j \in V_j$ تقریبی از تابع u روی Ω_j باشد. در این صورت

$$(9) \quad s := \sum_{j=1}^{N_c} w_j s_j$$

تقریبی سراسری برای u روی Ω خواهد بود که به آن تقریب افراز واحد می‌گوییم. برای مثال، فرض کنید

$$X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega,$$

مجموعه‌ای شامل N نقطه متمایز روی کل Ω باشد. گیریم $X_j = X \cap \Omega_j$ نقاطی از مجموعه X باشند که در زیردامنه Ω_j قرار دارند. فرض کنید s_j درونیاب تابع u روی X_j برای $j = 1, \dots, N_c$ باشد. در این صورت به راحتی می‌توان ثابت کرد تابع s در (۹) درونیاب سراسری u روی کل Ω است.

در مورد خطای تقریب افراز واحد از قضیه زیر نتیجه می‌شود که خطای سراسری از مرتبه بدترین خطاهای موضعی (خطای تقریب در زیردامنه‌ها) است.

قضیه ۲.۵. فرض کنید s_j تقریبی از تابع u روی $\Omega_j \cap \Omega$ باشد و کران خطای تقریب موضعی آن به صورت زیر باشد

$$\|u - s_j\|_{L_\infty(\Omega_j \cap \Omega)} \leq \varepsilon_j \quad (j = 1, \dots, N_c).$$

در این صورت یک کران خطای سراسری برای تقریب افراز واحد به شکل

$$|u(x) - s(x)| \leq \max_{j \in J(x)} \varepsilon_j \quad (x \in \Omega)$$

است که در آن $J(x) := \{j : x \in \Omega_j\}$ خانواده اندیس زیردامنه‌هایی است که نقطه x به آن‌ها تعلق دارد.

اثبات. اثبات آسان و به صورت زیر است. برای هر $x \in \Omega$ داریم

$$\begin{aligned} |s(x) - u(x)| &= \left| \sum_{j=1}^{N_c} w_j(x) s_j(x) - u(x) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{N_c} w_j(x) (s_j(x) - u(x)) \right| \\ &\leq \sum_{j \in J(x)} w_j(x) \|s_j - u\|_{L_\infty(\Omega_j \cap \Omega)} \\ &\leq \max_{j \in J(x)} \|s_j - u\|_{L_\infty(\Omega_j \cap \Omega)} \sum_{j \in J(x)} w_j(x) \\ &= \max_{j \in J(x)} \varepsilon_j. \end{aligned}$$

□

گاهی برای اینکه بتوان از تقریب سراسری s برای اهداف مشخصی (مانند حل معادلات دیفرانسیل) مشتق گرفت لازم است شرایط همواری بیشتری روی توابع وزن اعمال کرد. برای این منظور تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۳.۵. تحت شرایط تعریف ۱.۵، توابع افراز واحد w_j برای $j = 1, \dots, N_c$ را نسبت به پوشش $\{\Omega_j\}$ - k پایدار می‌گوییم هرگاه $w_j \in C^k(\Omega)$ و برای هر چند اندیشه $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ با شرط $|\alpha| \leq k$ ثابت $C_\alpha > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|D^\alpha w_j\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C_\alpha \delta_j^{-|\alpha|},$$

که در آن قطر δ_j Ω_j است و به‌صورت

$$\delta_j = \text{diam}(\Omega_j) = \sup_{x, y \in \Omega_j} \|x - y\|_2$$

تعریف می‌شود.

قضیه زیر حالت کلی‌تری از قضیه ۲.۵ است که در آن خطای تقریب مشتقات تابع نیز منظور شده است.

قضیه ۴.۵. فرض کنید توابع افراز واحد k -پایدار باشند و کران خطای تقریب مشتقات در هر زیردامنه Ω_j به‌صورت زیر باشد

$$\|D^\alpha u - D^\alpha s_j\|_{L_\infty(\Omega_j \cap \Omega)} \leq \varepsilon_j(\alpha).$$

در این صورت کران خطای سراسری تقریب افراز واحد به صورت زیر است

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha s(x)| \leq \sum_{j \in J(x)} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha-\beta} \delta_j^{|\beta|-|\alpha|} \varepsilon_j(\beta) \quad (x \in \Omega, |\alpha| \leq k).$$

اثبات این قضیه با استفاده از قاعده لایب‌نیتس برای مشتقات چندمتغیره انجام می‌شود. برای جزئیات بیشتر به فصل ۱۵ از [۱۹] مراجعه کنید.

اگر کران خطای تمامی تقریب‌های موضعی تابع u از مرتبه h^m یعنی $\varepsilon_j = O(h^m)$ باشند، آنگاه قضیه ۲.۵ نشان می‌دهد کران خطای سراسری نیز از مرتبه h^m است. از طرفی، کران خطای موضعی مشتقات مرتبه α از مرتبه $h^{m-|\alpha|}$ است و اگر $\delta_j = Ch$ ، آنگاه قضیه ۴.۵ نشان می‌دهد کران خطای سراسری تقریب مشتق مرتبه α نیز از مرتبه $h^{m-|\alpha|}$ است. بنابراین نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۵.۵. مرتبه خطای سراسری تقریب افراز واحد با بدترین مرتبه خطای موضعی یکسان است.

۶. روش افراز واحد چندجمله‌ای

همان‌گونه که پیش‌تر نیز گفته شد، استفاده از تقریب‌های چندجمله‌ای سراسری به‌ویژه در ابعاد بالاتر از یک روی نقاط دلخواه پراکنده به ناپایداری عددی با افزایش درجه چندجمله‌ای منجر خواهد شد. استفاده از تقریب‌های چندجمله‌ای قطعه‌ای و توابع اسپلاین به منظور بهره‌گیری از دقت چندجمله‌ای‌ها در کنار برطرف کردن نقاط ضعف آن‌ها همواره در کانون توجه بوده است. اما در اکثر تقریب‌های قطعه‌ای، همواری تابع تقریب تضمین نمی‌شود و گسترش توابع اسپلاین به ابعاد بالاتر نیز با چالش‌هایی مواجه است. در اینجا تقریب افراز واحد چندجمله‌ای^{۱۵} را به عنوان یک روش جایگزین و قابل رقابت بیان می‌کنیم. برای سادگی شکل زیردامنه‌ها را گوی در نظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم

$$\Omega_j = B(\omega_j; \delta_j) \quad (j = 1, \dots, N_c),$$

که در آن $\delta_j > 0$ شعاع و $\{\omega_1, \dots, \omega_{N_c}\} = X_{\text{cov}}$ مجموعه مراکز زیردامنه‌ها است. اگر h_{cov} فاصله تراکم X_{cov} باشد، شعاع زیردامنه‌ها را ضریبی از h_{cov} در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم

$$\delta_j = C_{\text{ovlp}} h_{\text{cov}}$$

¹⁵polynomial partition of unity

که در اینجا $C_{\text{ovlp}} \geq 1$ ثابت همپوشانی است. شرط بزرگتر از یک بودن برای این ثابت، رابطه شمول $\Omega \subset \bigcup \Omega_j$ را برقرار می‌کند. مقادیر بزرگ C_{ovlp} منجر به همپوشانی بیشتر پوشش $\{\Omega_j\}$ می‌شود. از سوی دیگر، اگر h فاصله تراکم نقاط درونیایی (یا تقریب) X روی کل دامنه باشد، فرض می‌کنیم مراکز X_{cov} به گونه‌ای انتخاب شوند که $h_{\text{cov}} = C_{\text{cov}}h$ که در آن C_{cov} ثابتی است که نسبت بین تعداد نقاط درونیایی (یا تقریب) و تعداد زیردامنه‌ها را مشخص می‌کند. واضح است که با این انتخاب نسبت این دو همواره تقریباً برابر C_{cov}^d است و با کاهش h این نسبت تغییر نمی‌کند. برای مثال اگر در یک مسئله دو بعدی، $C_{\text{cov}} = 4$ اختیار شود تعداد نقاط X حدود ۱۶ برابر تعداد زیردامنه‌ها خواهد بود. این انتخاب از h_{cov} منجر به اندازه شعاع‌های $\delta_j = C_{\text{ovlp}}C_{\text{cov}}h$ برای زیردامنه‌ها می‌شود. حال اگر فرض کنیم $X_j = X \cap \Omega_j$ شامل نقاطی از مجموعه X باشد که در زیردامنه Ω_j قرار دارند، آنگاه با کاهش h تعداد نقاط درون سلول‌ها افزایش نمی‌یابد و تقریباً ثابت باقی می‌ماند به شرطی که با کاهش h شرط شبه‌یکنواختی برقرار بماند.

برای اثبات این ادعا فرض کنید q_X فاصله تفکیک نقاط X و $n_j = |X_j|$ تعداد نقاط درون $B(\omega_j; \delta_j)$ باشد. طبق تعریف فاصله تفکیک، گوی‌هایی به شعاع q_X و مرکز نقاط X_j با یکدیگر همپوشانی ندارند. پس

$$n_j \times \text{vol}(B(\cdot; q_X)) \leq \text{vol}(B(\omega_j; \delta_j + q_X))$$

که این هم نتیجه می‌دهد

$$n_j c_d q_X^d \leq c_d (\delta_j + q_X)^d = c_d (C_{\text{ovlp}} C_{\text{cov}} h_{X,\Omega} + q_X)^d$$

که در آن c_d حجم گوی یک در $\mathbb{R}^d$ است و با توجه به حذف آن از دو طرف، تعیین مقدار آن در اینجا اهمیتی ندارد. از طرفی برای دنباله نقاط شبه‌یکنواخت داریم $h_{X,\Omega} \leq c_{\text{qu}} q_X$. پس می‌توان نوشت $n_j q_X^d \leq (C_{\text{ovlp}} C_{\text{cov}} c_{\text{qu}} q_X + q_X)^d$ که نتیجه می‌دهد

$$n_j \leq (C_{\text{ovlp}} C_{\text{cov}} c_{\text{qu}} + 1)^d.$$

سمت راست نامعادله بالا مستقل از $h = h_{X,\Omega}$ و وابسته به ثابت‌های شبه‌یکنواختی، همپوشانی و ثابت نسبت نقاط به مرکزها است. عدم وابستگی تعداد نقاط درون زیردامنه‌ها به فاصله تراکم همان چیزی است که برای ما یک تقریب موضعی می‌سازد.

در زیردامنه‌های موضعی (محمل توابع افراز واحد) دو حالت تقریب کمترین مربعات و درونیایی را به کار می‌بریم. اما برای به کار بردن درونیایی چندجمله‌ای d -متغیره در هر زیردامنه با یک چالش مواجه هستیم. در هر زیردامنه تعداد مشخصی نقطه درونیایی قرار دارد که برای $d > 1$ ممکن است این تعداد به ازای هیچ m برابر با $Q(m, d)$ نشود. این در حالی است که برای $d = 1$ همواره داریم $m = n_j - 1$. با این حال این مسئله هیچ مشکلی برای استفاده از تقریب کمترین مربعات در حالت یک بعدی و در ابعاد بالاتر ایجاد نمی‌کند. به همین منظور، مسئله درونیایی را فقط برای حالت یک بعدی ارائه می‌دهیم.

۱.۶. روش افراز واحد چندجمله‌ای کمترین مربعات. برای فرمول‌بندی تقریب افراز واحد کمترین مربعات، فرض می‌کنیم m ، درجه چندجمله‌ای تقریب موضعی، داده شده است و مقدار C_{ovlp} را طوری تنظیم می‌کنیم که برای هر j داشته باشیم $n_j \geq Q(m, d)$. فرض می‌کنیم کلیه مجموعه نقاط X_j دارای خاصیت $\mathbb{P}_m^d$ -یکتاحتل‌کنندگی باشند. تعریف می‌کنیم

$$V_j = \mathbb{P}_m^d \quad (j = 1, \dots, N_c),$$

و s_j چندجمله‌ای تقریب کمترین مربعات برای تابع u روی X_j در فضای V_j را طبق (۳) محاسبه می‌کنیم. اگر توابع افراز واحد w_j نیز در دست باشند تقریب سراسری

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N_c} w_j(x) s_j(x) \quad (x \in \Omega)$$

یک تقریب چندجمله‌ای افراز واحد روی Ω برای تابع u به دست می‌دهد.

برای تخمین خطای این روش لازم است ابتدا بسط تیلر توابع چند متغیره روی یک ناحیه محدب مانند گوی $B = B(\omega; \delta)$ را یادآوری کنیم. بسط تیلر به همراه جمله خطا برای تابع $u \in C^{m+1}(B)$ برای هر $x \in B(\omega; \delta)$ به صورت

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{|\beta| \leq m} \frac{D^\beta u(\omega)}{\beta!} (x - \omega)^\beta + \sum_{|\beta|=m+1} \frac{D^\beta u(\xi(x, \beta))}{\beta!} (x - \omega)^\beta \\ &=: T_m(x) + R_m(x), \end{aligned}$$

است که در آن $\xi(x, \beta) \in B$ مجهولی وابسته به x و β است. واضح است که

$$|u(x) - T_m(x)| = |R_m(x)| \leq C \delta^{m+1} |u|_{m+1, B}$$

که در آن نیم نرم سمت راست به صورت $|u|_{m+1, B} := \max_{|\alpha|=m+1} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(B)}$ تعریف می‌شود. به علاوه، با توجه به اینکه $D^\alpha u \in C^{m+1-|\alpha|}(B)$ ، بسط تیلر مرتبه $m - |\alpha|$ برای آن به صورت زیر است

$$D^\alpha u(x) = \sum_{|\beta| \leq m-|\alpha|} \frac{D^{\beta+\alpha} u(\omega)}{\beta!} (x - \omega)^\beta + \sum_{|\beta|=m+1-|\alpha|} \frac{D^{\beta+\alpha} u(\zeta(x, \beta))}{\beta!} (x - \omega)^\beta,$$

که در آن $\zeta(x, \beta) \in B$ مجهولی وابسته به x و β است. جمله اول سمت راست همان $D^\alpha T_m(x)$ است، بنابراین داریم

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha T_m(x)| \leq C \delta^{m+1-|\alpha|} |u|_{m+1, B},$$

که نشان می‌دهد در تقریب مشتق مرتبه α به اندازه $|\alpha|$ از مرتبه خطا کاسته شده است. حال قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۶. برای تابع مفروض $u \in C^{m+1}(\Omega)$ ، کران خطای تقریب افراز واحد چندجمله‌ای کمترین مربعات برای مشتقات مرتبه α آن روی نقاط شبه‌یکنواخت از مرتبه $h^{m+1-|\alpha|}$ است، که در آن h فاصله تراکم نقاط تقریب و m درجه چندجمله‌ای پایه است و $0 \leq |\alpha| \leq m$.

اثبات. کافی است کران خطای تقریب‌های موضعی یعنی $|D^\alpha s_j(x) - D^\alpha u(x)|$ را به دست آوریم و سپس از قضیه‌های ۲.۵ و ۴.۵ برای یافتن کران خطای سراسری استفاده کنیم. برای سادگی اندیس‌های j را حذف می‌کنیم و قضیه را برای یک زیردامنه نوعی با $n = n_j$ ، $\delta = \delta_j$ ، $X = X_j = \{x_1, \dots, x_n\}$ ، $s = s_j$ اثبات می‌کنیم.

با توجه به نحوه ساختن تقریب کمترین مربعات چندجمله‌ای واضح است که تقریب کمترین مربعات درجه m هر چندجمله‌ای حداکثر درجه m با خودش یکسان است. یعنی اگر $p \in \mathbb{P}_m^d$ چندجمله‌ای دلخواهی باشد آنگاه $p(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) p(x_k)$ و بنابراین می‌توان نوشت $D^\alpha p(x) = \sum_{k=1}^n D^\alpha a_k(x) p(x_k)$

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x) - D^\alpha s(x)| &\leq |D^\alpha u(x) - D^\alpha p(x)| + \left| D^\alpha p(x) - \sum_{k=1}^n D^\alpha a_k(x) u(x_k) \right| \\ &\leq |D^\alpha u(x) - D^\alpha p(x)| + \sum_{k=1}^n |D^\alpha a_k(x)| |p(x_k) - u(x_k)| \\ &\leq \|D^\alpha u - D^\alpha p\|_{L_\infty(B)} \left(1 + \sum_{k=1}^n |D^\alpha a_k(x)| \right) \\ &\leq (1 + C_n) \|D^\alpha u - D^\alpha p\|_{L_\infty(B)} \end{aligned}$$

در اینجا از کران خطای پایداری توابع ساختار، در رابطه ۶ استفاده شده است. کران به دست آمده در بالا برای هر $p \in \mathbb{P}_m^d$ برقرار است. پس اگر به جای p بسط تیلر مرتبه m تابع u یعنی T_m را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha s_j(x)| \leq C_{n_j} \delta_j^{m+1-|\alpha|} |u|_{m+1, B(\omega_j, \delta_j)}$$

که با توجه به $\delta_j = C_{\text{cov}} C_{\text{ovlp}} h$ به کرانهای خطای موضعی

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha s_j(x)| \leq C C_{n_j} h^{m+1-|\alpha|} |u|_{m+1, B(\omega_j, \delta_j)} =: \varepsilon_j(\alpha)$$

می‌رسیم. با توجه به اینکه تعداد نقاط درون زیردامنه‌ها، n_j ، مستقل از h است (با ریز شدن شبکه تقریباً ثابت باقی می‌ماند)، وابستگی ثابت کران خطا به n_j تأثیری در مرتبه همگرایی به دست آمده ندارد. حال با اعمال قضیه ۴.۵ یا نتیجه ۵.۵ به نتیجه مطلوب می‌رسیم. $\square$

نتایج عددی به دست آمده در بخش ۸ نیز با این کران خطا همخوانی دارند.

۲.۶. روش افراز واحد چندجمله‌ای درونیاب. گیریم $d = 1$ و $m_j = n_j - 1$ که در آن $n_j = |X_j|$. اکنون فرض می‌کنیم فضای تقریب موضعی روی Ω_j فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه m_j باشد، یعنی

$$V_j = \mathbb{P}_{m_j} \quad (j = 1, \dots, N_c),$$

و s_j چندجمله‌ای درونیاب تابع u روی X_j در فضای V_j باشد. اگر توابع افراز واحد w_j نیز در دست باشند درونیاب سراسری

$$s(x) = \sum_{j=1}^{N_c} w_j(x) s_j(x) \quad (x \in [a, b])$$

یک درونیاب چندجمله‌ای افراز واحد روی $[a, b]$ برای تابع u به دست می‌دهد.

برخلاف روش کمترین مربعات که درجه چندجمله‌ای روی همه زیردامنه‌ها یکسان است، در درونیابی موضعی درجه چندجمله‌ای در هر زیردامنه با توجه به تعداد نقاط در آن زیردامنه تعیین می‌شود. اگر فرض کنیم $m = \min_j m_j$ و $u \in C^{m+1}[a, b]$ ، همانند قبل به سادگی می‌توان نشان داد خطای درونیاب افراز واحد سراسری برای تقریب مشتقات مرتبه α تابع u از مرتبه $h^{m+1-|\alpha|}$ است.

۷. حل عددی معادلات دیفرانسیل

در این بخش به عنوان یکی از کاربردهای روش افراز واحد چندجمله‌ای، حل عددی معادلات دیفرانسیل را مطرح می‌کنیم. با توجه به محمل فشرده بودن این تقریب، انتظار داریم ماتریس‌های نهایی حاصل از این روش تنک و خوش‌وضع باشند. نتایج عددی که در بخش ۸ ارائه می‌شوند، این موضوع را تأیید می‌کنند.

برای حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل لازم است از بسط (۹) مشتق بگیریم. چون عملگرهای دیفرانسیل شامل عملگرهای مشتق D^α برای برخی مقادیر α هستند، برای مشتق‌گیری قاعده لایب‌نیتس را به شکل

$$D^\alpha s = \sum_{j=1}^{N_c} D^\alpha (w_j s_j) = \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} w_j D^\beta s_j \quad (10)$$

به کار می‌گیریم. برای مثال، برای مشتقات مرتبه اول داریم

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N_c} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x} s_j + w_j \frac{\partial s_j}{\partial x} \right) \quad (x = x_k),$$

یا برای عملگر لاپلاس می‌توان نوشت

$$\Delta s = \sum_{j=1}^{N_c} s_j \Delta w_j + 2 \nabla w_j \cdot \nabla s_j + w_j \Delta s_j.$$

برای تقریب مشتقات، این تنها رویکردی نیست که می‌توان به کار گرفت. در [۱۱] رویکرد متفاوت و کاراتری برای تقریب‌های افراز واحد توابع پایه شعاعی به کار گرفته شده است، که در اینجا به آن نمی‌پردازیم. طبق آنچه در بخش ۵ گفته شد در هر زیردامنه Ω_j داریم

$$s_j(x) = a^T(j; x)u(j)$$

که در آن $a(j; x)$ و $u(j)$ به ترتیب بردار توابع ساختار و بردار مقادیر تابع u در زیردامنه j ام هستند. برای مثال، در محاسبه مشتق مرتبه اول s داریم

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x) = \sum_{j=1}^{N_c} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x}(x) a^T(j; x) + w_j(x) \frac{\partial a^T}{\partial x}(j; x) \right) u(j).$$

اگر تقریب بالا را به ازای یک مجموعه از نقاط مانند $Y = \{y_1, \dots, y_M\}$ محاسبه کنیم، یعنی قرار دهیم $x = y_\ell$ آنگاه خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_Y \approx \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_Y = Au$$

که در آن A ماتریس مشتق مرتبه اول نسبت به x و از بعد $M \times N$ است. به همین ترتیب می‌توان مشتقات مراتب بالاتر را در نقاط هم‌مکانی Y محاسبه کرد، که در اینجا برای رعایت اختصار از نوشتن آن‌ها خودداری می‌کنیم. اکنون یک معادله دیفرانسیل جزئی با مقدار مرزی به صورت

$$Lu(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \quad Bu(x) = g(x) \quad (x \in \Gamma)$$

را در نظر بگیرید که در آن L و B عملگرهای دیفرانسیل خطی روی یک فضای برداری مناسب از توابع هستند. در اینجا عملگر B توصیف‌کننده شرایط مرزی مسئله (از نوع نویمان یا دیریکله) است. برای مثال، در شرط مرزی دیریکله داریم $B = Id$. توابع f و g به ترتیب توابع معلوم منبع و مقدار مرزی هستند. فرض می‌کنیم عملگرهای L و B و توابع f و g به گونه‌ای هستند که این مسئله مقدار مرزی دارای جواب یکتا است.

برای حل عددی این مسئله، فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ نقاط تقریب پراکنده در ناحیه Ω و $Y = Y_\Omega \cup Y_\Gamma$ نقاط هم‌مکانی درون و روی مرز Ω باشند به گونه‌ای که $Y_\Gamma \subset \Gamma$ و $Y_\Omega \subset \Omega$. همچنین فرض کنید A_L ماتریس مشتق متناظر با عملگر L روی نقاط Y_Ω و A_B ماتریس مشتق متناظر با عملگر مرزی B روی نقاط Y_Γ باشد. در این صورت داریم

$$\begin{bmatrix} A_L \\ A_B \end{bmatrix} u \approx \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

که در آن $g = g|_{Y_\Gamma}$ و $f = f|_{Y_\Omega}$ به ترتیب بردارهای مقادیر سمت راست f و مقدار مرزی g روی نقاط هم‌مکانی متناظر هستند.

اگر در دستگاه بالا «تقریباً مساوی» را با «مساوی» جایگزین کنیم و در عوض به جای مقادیر دقیق u مقادیر تقریبی $\tilde{u}$ را در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$(11) \quad \begin{bmatrix} A_L \\ A_B \end{bmatrix} \tilde{u} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

اگر $N = M$ ، ماتریس نهایی در (۱۱) یک ماتریس نامتقارن است و ممکن است برای انتخاب خاصی از نقاط وارون‌پذیر نباشد. یک راه برای غلبه بر این مشکل این است که نقاط تقریب X و نقاط هم‌مکانی Y را متمایز از هم در نظر بگیریم و فرض کنیم $M \geq N$. به این رویکرد، فرآیند نمونه‌گیری^{۱۶} می‌گویند، که منجر به ماتریس نهایی مستطیلی می‌شود. در این صورت تعداد نقاط هم‌مکانی را آن‌قدر زیادتر می‌گیریم تا دستگاه (۱۱) از رتبه کامل شود و به‌جای یافتن جواب دقیق دستگاه، به یک جواب کمترین مربعات به کمک الگوریتم QR قناعت می‌کنیم.

اگر $\hat{u}$ جواب کمترین مربعات دستگاه (۱۱) باشد، برای محاسبه مقدار تابع در هر نقطه دلخواه $x \in \Omega$ می‌توان دوباره از تقریب افراز واحد با جانشانی $\hat{u}$ به جای u استفاده کرد.

۸. مثال‌های عددی

برای به‌دست آوردن تقریب‌های افراز واحد چندجمله‌ای، توابع شپارد در رابطه (۸) را به کمک تابع با محمل فشرده وندلند

$$\psi(r) = (1-r)_+^6 (35r^2 + 18r + 3)$$

می‌سازیم [۱۹، فصل نهم]. تعریف می‌کنیم $\phi_j(x) = \psi(\|x - \omega_j\|_2)$ که در آن ω_j مراکز زیردامنه‌های $\Omega_j = B(\omega_j, \delta_j)$ اند، و وزن‌های w_j را به کمک رابطه (۸) تعیین می‌کنیم. مثال‌های عددی مختلفی در حالت‌های یک بعدی و دو بعدی ارائه می‌دهیم. هم از نقاط مشبکه (منظم) و هم از نقاط پراکنده هالتون به عنوان نقاط تقریب استفاده می‌کنیم. در مثال‌هایی که مربوط به تقریب کمترین مربعات چندجمله‌ای است قرار می‌دهیم $h_{cov} = 4h$ و $C_{ovlp} = 1$. با این انتخاب داریم $\delta_j = 4h$. با این حال برای زیردامنه‌های نزدیک به مرز مقدار δ_j را $1/5$ برابر می‌کنیم. این کار به منظور برقرار شدن شرط $n_j \geq Q$ برای یک زیردامنه یک طرفه نزدیک به مرز مانند Ω_j است. در مثال‌های مربوط به درونیابی مقادیر متفاوتی برای h_{cov} و δ_j اختیار می‌کنیم، که هر انتخاب به چندجمله‌ای درونیاب با درجه متفاوت در زیردامنه‌ها منجر می‌شود.

همه نمودارهای خطا در مقیاس لگاریتمی و نسبت به $N^{1/d}$ ترسیم شده‌اند. بنابراین شیب نمودارها مرتبه همگرایی روش را نشان می‌دهند. در همه نمودارها، مرتبه همگرایی عددی با برازش کمترین مربعات خطی (رگرسیون) خطاها محاسبه شده است. نمودار این برازش‌ها با خط چین قرمز در شکل‌ها مشخص شده است. قرینه شیب این خطوط همان مرتبه همگرایی عددی است.

مثال ۱۰.۸ (تقریب یک تابع تک متغیره). تقریب تابع

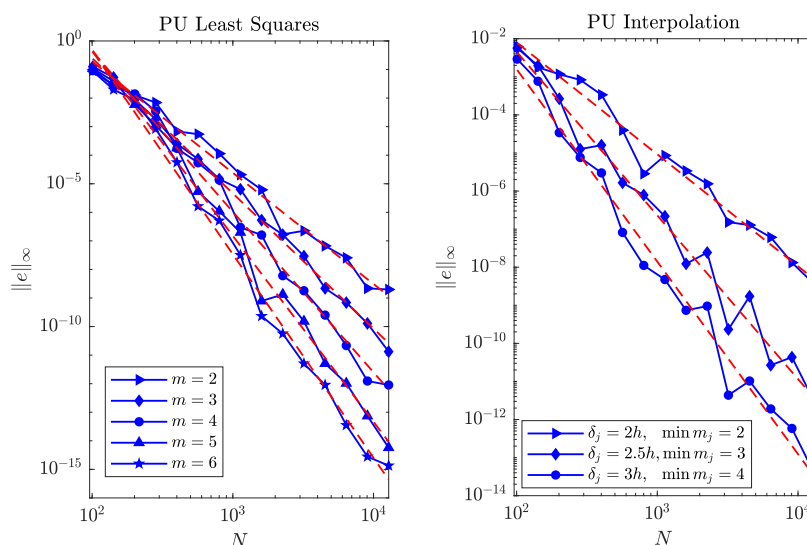
$$f(x) = \exp(\sin(1 - 1 \circ x^2)) \quad (x \in [0, 2])$$

را با روش افراز واحد چندجمله‌ای به دست می‌آوریم. این کار را ابتدا با روش درونیابی انجام می‌دهیم. برای این منظور سه حالت $C_{cov} = 1/5$ با $C_{ovlp} = 2/3, 5/3, 2$ به کار می‌گیریم، که این حالت‌ها منجر به سه اندازه زیردامنه متفاوت $2/5h, 3/5h, 2/5h$ می‌شوند.

همان‌گونه که قبلاً گفته شد، درجه درونیاب‌های موضعی با توجه به تعداد نقاط قرارگرفته در هر زیردامنه Ω_j متفاوت است. کمترین درجه درونیاب در هر زیردامنه در سه حالت بالا به‌ترتیب برابر با ۳، ۴ و ۳ خواهد بود. در این حالت‌ها مرتبه خطای عددی متناظر به‌ترتیب حدود $2/9, 4/3$ و $5/1$ به دست می‌آید که مرتبه همگرایی نظری $m + 1$ را تقریباً تأیید می‌کنند.

¹⁶oversampling

این نتایج در سمت راست شکل ۳ نمایش داده شده‌اند. در سمت چپ این شکل خطاهای روش افراز واحد چندجمله‌ای به کمک تقریب کمترین مربعات برای مقادیر مختلف N ترسیم شده است. مرتبه همگرایی برای درجه‌های چندجمله‌ای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب برابر با $۳/۹$ ، $۴/۷$ ، $۵/۶$ ، $۶/۵$ و $۷/۱$ به دست آمده است که باز هم مرتبه همگرایی $m+1$ را تصدیق می‌کنند.



شکل ۳: نمودار خطای نسبی روش افراز واحد چندجمله‌ای با درونیایی روی هر زیردامنه (سمت راست) و نمودار خطای نسبی روش افراز واحد چندجمله‌ای با تقریب کمترین مربعات روی هر زیردامنه (سمت چپ). در شکل سمت راست مرتبه همگرایی محاسبه شده به ترتیب از بالا به پایین $۲/۹$ ، $۴/۳$ ، $۵/۱$ است. در شکل سمت چپ مرتبه همگرایی محاسبه شده به ترتیب از بالا به پایین $۳/۹$ ، $۴/۷$ ، $۵/۶$ و $۷/۱$ است.

مثال ۲.۸ (تقریب یک تابع دومتغیره). در این مثال تقریب تابع زیر، مشهور به تابع فرانکه^{۱۷}، را بررسی می‌کنیم [۶]،

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = & \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{1}{4}((9x-2)^2 + (9y-2)^2) \right] \\
 & + \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{1}{49}(9x+1)^2 - \frac{1}{16}(9y+1)^2 \right] \\
 & + \frac{1}{4} \exp \left[-\frac{1}{4}((9x-7)^2 + (9y-3)^2) \right] \\
 & - \frac{1}{5} \exp \left[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2 \right]
 \end{aligned}$$

این تابع معمولاً برای آزمودن تقریب‌های دو متغیره استفاده می‌شود. فرض می‌کنیم دامنه $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ در مختصات قطبی به صورت

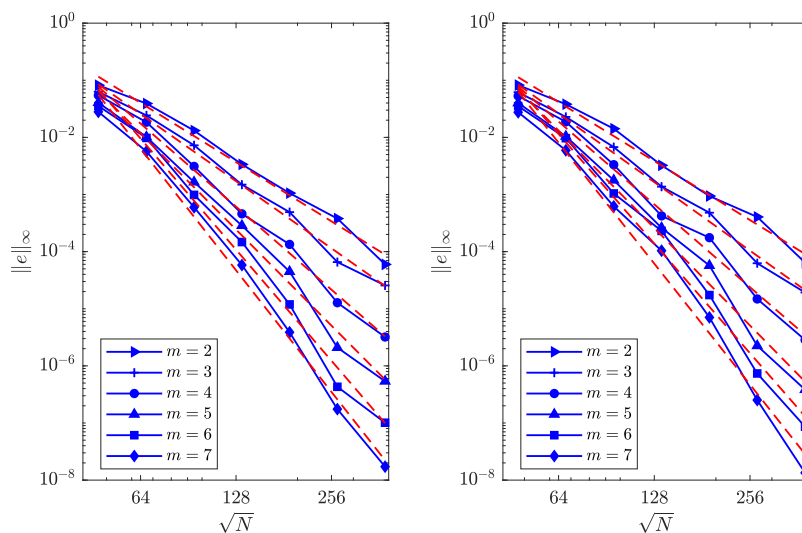
$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi, r < 0.75(0.7 + 0.12(\sin 6\theta + \sin 3\theta))\}.$$

¹⁷Franke's function

تعریف شده باشد. در سمت راست شکل ۲ این دامنه دیده می‌شود. هم نقاط یکنواخت و هم نقاط هالتون را به عنوان نقاط تقریب روی این دامنه به کار می‌بریم. با توجه به اینکه $\Omega \subset [-1/5, 1/5]^2$ ، ابتدا مجموعه‌ای از نقاط (منظم یا هالتون) روی دامنه $[-1/5, 1/5]^2$ تولید می‌کنیم و سپس آن بخشی از نقاط را که درون Ω واقع است به عنوان نقاط تقریب انتخاب می‌کنیم. فاصله تراکم نقاط هالتون دو بعدی را با $h \approx 2/\sqrt{N}$ تخمین می‌زنیم. برای نمونه، برای تولید نقاط هالتون روی Ω تابع زیر را در Matlab می‌نویسیم

```
function X = HaltonPoints(h)
N = floor(2/h^2);
Hset = haltonset(2,'Skip',1e3,'Leap',1e2);
X = net(Hset,N); X = 1.5*(2*X - 1);
[t, r] = cart2pol(X(:,1),X(:,2));
indx = (r <= 0.75*(0.7+0.12*(sin(6*t)+sin(3*t))));
X = X(indx,:);
```

دستور haltonset از یک زیربرنامه آماده Matlab استفاده و دنباله‌ای از نقاط هالتون روی $[0, 1]^2$ تولید می‌کند. برای تولید نقاط منظم از دستور meshgrid استفاده می‌کنیم که کد آن به طور مشابه نوشته می‌شود. نتایج عددی با روش کمترین مربعات موضعی برای چند مقدار m در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط تقریب (کاهش فاصله تراکم) خطاها هم روی نقاط هالتون و هم روی نقاط منظم با مرتبه همگرایی تقریبی $m+1$ کاهش می‌یابند. این نمودارها مرتبه خطای اثبات شده در قضیه ۱.۶ را تأیید می‌کنند.



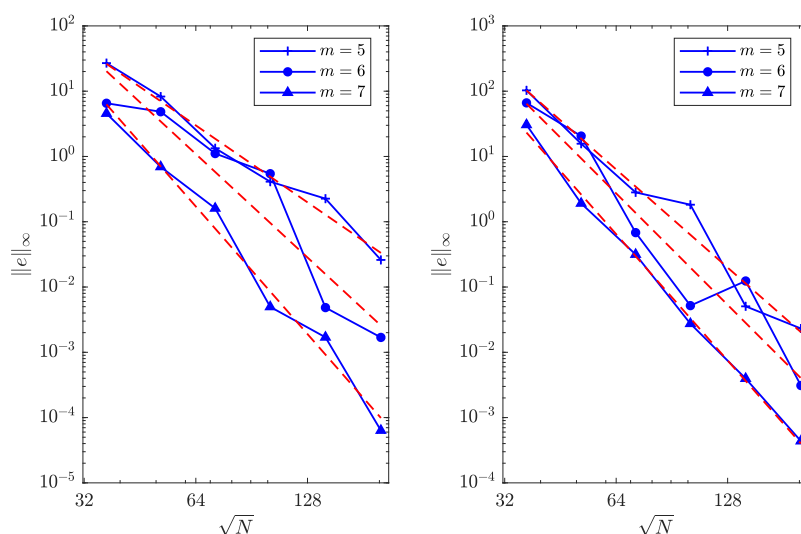
شکل ۴: خطای درونیابی تابع فرانکه روی یک دامنه دو بعدی: نقاط هالتون (سمت راست) با مرتبه همگرایی عددی به ترتیب از بالا به پایین $3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9, 9/10$ و نقاط مشبکه (سمت چپ) با مرتبه همگرایی عددی به ترتیب از بالا به پایین $3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9, 9/10$.

مثال ۳.۸ (حل یک معادله دیفرانسیل). معادله پواسن با شرط دیریکله

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = g(x) \quad (x \in \Gamma)$$

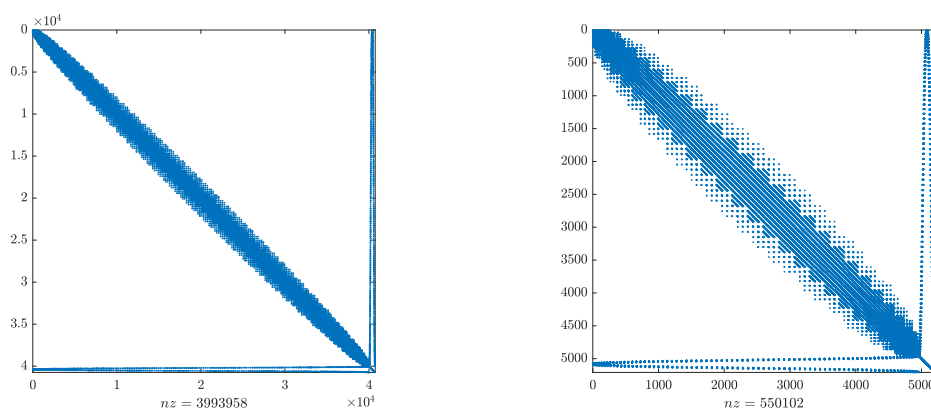
را در نظر بگیرید که در آن $\Omega = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^2$ گوی یکه در صفحه است. اگر چه در عمل برای مقادیر داده شده f و g به دنبال تقریب جواب u هستیم اما برای آزمون روش کمترین مربعات موضعی، فرض کنید تابع فرانکه جواب دقیق این معادله باشد و توابع f و g را بر این اساس محاسبه کنیم.

اکنون تقریبی از جواب معادله را با روش افراز واحد کمترین مربعات به دست می‌آوریم و آن را با مقدار دقیق تابع فرانکه مقایسه می‌کنیم. شکل ۵ کاهش خطا را در حالتی که از چندجمله‌ای‌های درجه ۵، ۶ و ۷ در زیردامنه‌ها استفاده کرده‌ایم نمایش می‌دهد. در سمت راست خطای تقریب روی نقاط هالتون و در سمت چپ خطای تقریب روی نقاط منظم ترسیم شده است. مرتبه همگرایی متناظر با این تقریب‌ها به ترتیب ۵، ۷/۵ و ۶/۴ برای نقاط هالتون و ۳/۹، ۵/۲ و ۶/۵ برای نقاط منظم به دست می‌آید که در هر مورد مقداری بیشتر از مرتبه همگرایی نظری یعنی $1 - |\alpha| = m$ است. توجه داشته باشید که مرتبه معادله دیفرانسیل مورد بررسی ۲ است.



شکل ۵: خطای تقریب جواب معادله دیفرانسیل پواسن روی گوی واحد دو بعدی: نقاط هالتون (سمت راست) با مرتبه همگرایی عددی به ترتیب از بالا به پایین ۵/۵، ۷/۵ و ۶/۴ و نقاط مشبکه (سمت چپ) با مرتبه همگرایی عددی به ترتیب از بالا به پایین ۳/۹، ۵/۲ و ۶/۵.

در حل عددی این معادله دیفرانسیل لازم است دستگاه معادلات خطی (۱۱) حل شود. با توجه به اینکه روش افراز واحد چندجمله‌ای از پایه‌های محمل فشرده در تقریب تابع و مشتقات آن استفاده می‌کند، منجر به یک دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرایب بسیار تنگ می‌شود که هم خوش‌وضع است و هم با هزینه محاسباتی اندک با استفاده از الگوریتم‌های تکراری قابل حل است. در شکل ۶ الگوی تنگی این ماتریس برای دو حالت $N = 5208$ و $N = 40740$ نمایش داده شده است.



شکل ۶: الگوی تنگی ماتریس نهایی در حل معادله دیفرانسیل پواسن دو بعدی سمت راست $N = 5208$ و سمت چپ $N = 40740$.

۹. روش افراز واحد گویا

در پایان یک تقریب گویای یک متغیره را مطرح می‌کنیم. معمولاً برای توابعی که در دامنه تقریب یا در نزدیکی آن دارای تکیگی یا شیب تند هستند و یا برای تقریب توابعی که در بازه‌های نامتناهی یا نیمه‌متناهی تعریف شده و دارای رفتار مجانبی باشند تقریب‌های گویا کارایی بهتری نسبت به تقریب‌های خطی دارند. تقریب «خطی» در اینجا به معنی تقریبی است که با یک عملگر خطی توصیف می‌شود؛ مانند عمل درونیابی یا تقریب کمترین مربعات بخش ۳ که با یک عملگر خطی مقادیر تابع u را به تابع تقریب s مرتبط می‌کنند. با این دیدگاه، درونیابی گویا و تقریب گویا غیرخطی‌اند.

یک تابع گویا از نوع (m, n) به صورت $\sigma(x) = p(x)/q(x)$ است که در آن p و q به ترتیب چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه m و n اگر p اند. و q دارای عامل مشترک باشند به گونه‌ای که پس از حذف عوامل مشترک، درجه صورت و مخرج به μ و ν کاهش یابد، می‌گوییم σ از نوع دقیق (μ, ν) است.

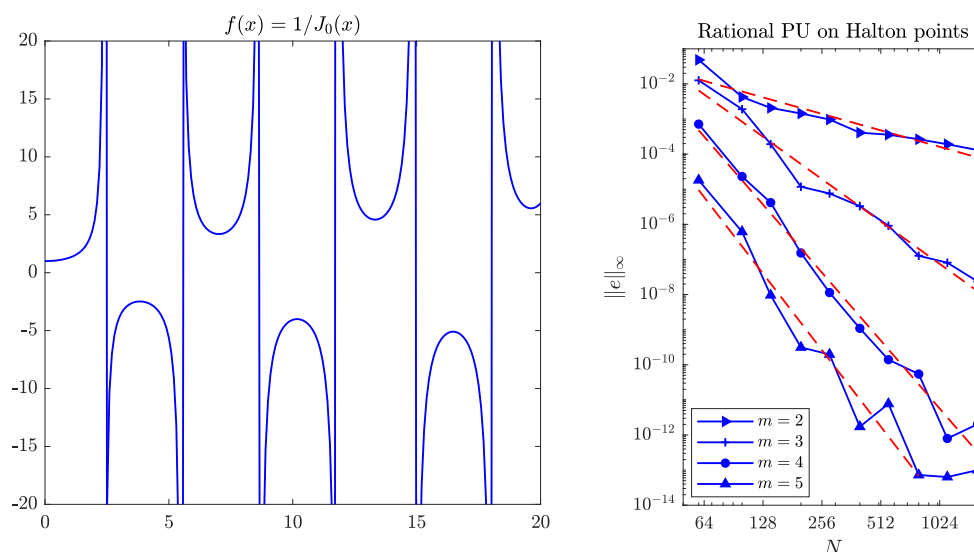
مسئله درونیابی گویا به صورت زیر مطرح می‌شود. فرض کنید نقاط $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ و مقادیر $f(x_1), \dots, f(x_N)$ از تابع f داده شده‌اند. تابع گویای از نوع (m, n) را به گونه‌ای بیابید که $\sigma(x_k) = f(x_k), k = 1, \dots, N$. با توجه به اینکه تعداد $m + n + 1$ مجهول در صورت و مخرج وجود دارد کافی است $N = m + n + 1$.

برای مشاهده پیچیدگی‌های چنین مسئله‌ای و برخی الگوریتم‌های حل آن به [۲۰، ۱، ۱۶، ۱۷] مراجعه نمایید. در همین زمینه در [۷] یک تقریب کمترین مربعات گویا روی ریشه‌های مختلط عدد ۱ مطرح و الگوریتمی برای محاسبه آن پیشنهاد شده است. در این تقریب فرض می‌شود $N > m + n$ و توابع p و q را به گونه‌ای می‌یابیم که

$$\|p - fq\|_N \rightarrow \text{minimum}$$

و شرط نرمال‌سازی $\|q\|_N = 1$ نیز برقرار باشد. در اینجا $\|p\|_N = (N+1)^{-1/2} \|p\|_2$ و p بردار مقادیر چندجمله‌ای p روی نقاط X است. در الگوریتم این روش از خواص ماتریس‌های تولیدیس و تجزیه مقدار تکی (SVD) استفاده می‌شود. گسترش و تقویت این الگوریتم روی نقاط دلخواه (بخصوص نقاط بازه حقیقی $[a, b]$) منجر به الگوریتم کارای AAA^{۱۸} شده است که آن‌را ناکاتسوکاسا و همکاران در سال ۲۰۱۸ معرفی کردند [۱۲].

¹⁸Adaptive Antoulas-Anderson (AAA)



شکل ۷: نمودار تابع $1/J_0(x)$ (سمت چپ) و نمودار خطای تقریب جزئی از واحد گویای آن برای $m = 3, 4, 5$ (سمت راست).

این الگوریتم به کمک روش‌های تطبیقی یک تقریب گویا با درجه (m, m) یا $(m, m-1)$ را با دقت از پیش تعیین شده محاسبه می‌کند. علاوه بر سرعت قابل قبول، دارای انعطاف‌پذیری، دقت بالا و قدرت تشخیص و حذف جفت‌های فرواسار^{۱۹} است. برای توابع تعریف شده روی بازه‌های $[a, b]$ با طول زیاد ($b - a \gg 1$) لازم است درجه چندجمله‌ای‌ها در صورت و مخرج به صورت چشم‌گیری افزایش یابد که منجر به افزایش هزینه‌های محاسباتی می‌شود. با پیاده سازی این تقریب در قالب روش افراز واحد می‌توان این مشکل را نیز برطرف کرد.

برای این منظور بازه اصلی را به صورت اجتماع هم‌پوشانی از زیربازه‌های با طول بسیار کوچک‌تر می‌نویسیم و روی هر زیربازه یک تقریب گویای σ_j با درجه‌های صورت و مخرج کوچک به کمک الگوریتم AAA به دست می‌آوریم و همانند آنچه در بخش ۵ گفته شد، این تقریب‌های موضعی را به کمک توابع افراز واحد w_j به یکدیگر متصل می‌کنیم تا تقریب سراسری

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{N_c} w_j(x) \sigma_j(x) \quad (x \in [a, b])$$

به دست آید. جزئیات الگوریتم AAA در [۱۲] بیان شده است که در اینجا به آن نمی‌پردازیم و تنها الگوریتم ارائه شده در این مقاله را برای تقریب افراز واحد گویا روی هر زیردامنه در مثال زیر به کار می‌بریم. چنین ایده‌ای برای تقریب‌های کسری توابع پایه‌ای شعاعی در [۴] نیز ارائه شده است.

مثال ۱۰.۹ (تقریب گویا). تابع بسل نوع اول $J_\nu(z)$ را با پارامتر $\nu = 0$ در نظر بگیرید. این تابع دارای ۶ صفر در فاصله $[0, 20]$ است. در این مثال تقریب گویای تابع $f(x) = 1/J_0(x)$ را در این فاصله به دست می‌آوریم.

در سمت چپ شکل ۷ نمودار این تابع ترسیم شده است. شش نقطه تکین آن نیز مشخص هستند. خطای تقریب افراز واحد گویا با استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه ۲، ۳، ۴ و ۵ در صورت و مخرج در سمت راست شکل ۷ رسم شده است. در این مثال از نقاط پراکنده هالتون روی بازه $[0, 20]$ استفاده شده است و دقت از پیش تعیین شده الگوریتم AAA را همان‌گونه که در [۱۲]

¹⁹Froissart doublets

پیشنهاد شده است برابر با 10^{-14} در نظر گرفته‌ایم. به همین علت نمودار خطا برای $m = 5$ در سطح خطای 10^{-14} متوقف شده است.

مراجع

- [1] D. Braess, *Nonlinear Approximation Theory*, Springer, New York, 1986.
- [2] M. A. Darani, The RBF partition of unity method for solving the Klein-Gordon equation, *Engineering with Computers*, **37** (2021) 795.
- [3] C. De Boor, *A Practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Sciences, Springer, Berlin, 2001.
- [4] S. De Marchi, A. Martínez, and E. Perracchione, Fast and stable rational RBF-based partition of unity interpolation, *J. Comput. Appl. Math.*, **349** (2019) 331–343.
- [5] G. E. Fasshauer, *Meshfree Approximations Methods with Matlab*, World Scientific, Singapore, 2007.
- [6] R. Franke, Scattered data interpolation: tests of some methods, *Math. Comp.*, **48** (1982) 181–200.
- [7] P. Gonnet, R. Pachon and L. N. Trefethen, Robust rational interpolation and least-squares, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, **38** (2011) 146–167.
- [8] M. Junk, *Do finite volume methods need a mesh?*, in *Meshfree Methods for Partial Differential Equations*, M. Griebel and M. A. Schweitzer, eds., Springer, New York, 2003, 223–238.
- [9] E. Larsson, V. Shcherbakov and A. Heryudono, A least squares radial basis function partition of unity method for solving PDEs, *SIAM J. Sci. Comput.*, **39** (2017) A2538–A2563.
- [10] J. M. Melenk and I. Babuška, The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **139** (1996) 289–314.
- [11] D. Mirzaei, The direct radial basis function partition of unity (D-RBF-PU) method for solving PDEs, *SIAM J. Sci. Comput.*, **43** (2021) A54–A83.
- [12] Y. Nakatsukasa, O. Sète, and L. N. Trefethen, The AAA Algorithm for Rational Approximation, *SIAM J. Sci. Comput.*, **40** (2018) A1494–A1522.
- [13] A. Safdari-Vaighani, A. Heryudono, and E. Larsson, A radial basis function partition of unity collocation method for convection—diffusion equations arising in financial applications, *J. Sci. Comput.*, **46** (2015) 341–367.
- [14] V. Shcherbakov, Radial basis function partition of unity operator splitting method for pricing multi-asset American options, *BIT*, **56** (2016) 1401–1423.
- [15] D. Shepard, *A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data*, in *Proceedings of the 23th National Conference ACM*, 1968, 517–523.
- [16] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 2002.
- [17] L. N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice*, SIAM, Philadelphia, 2013.
- [18] H. Wendland, Fast evaluation of radial basis functions: methods based on partition of unity, in *Approximation Theory, X: Wavelets, Splines, and Applications*, (Nashville, TN., 2002), Vanderbilt University Press, 473–483.
- [19] H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [20] D. Mirzaei, *Advanced Numerical Analysis*, Isfahan University Press, Isfahan, 2014.

داود میرزائی

گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان
d.mirzaei@sci.ui.ac.ir

داود میرزائی متولد بهمن ماه ۱۳۶۱ در شهرستان فریدن در استان اصفهان است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه شهید چمران اهواز شد و در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. پس از آن در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع دکتری در همان دانشگاه شد و در سال ۱۳۹۰ تحت راهنمایی مهدی دهقان از رساله خود در زمینه تقریب‌های بدون شبکه در حل معادلات دیفرانسیل جزئی دفاع کرد. ایشان از سال ۱۳۹۰ به عنوان عضو هیئت علمی در دانشگاه اصفهان مشغول به فعالیت است.

**محمدرضا احمدی دارانی**

گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
ahmadi.darani@sku.ac.ir

محمدرضا احمدی دارانی متولد شهریور ماه ۱۳۵۵ در شهرستان فریدن در استان اصفهان است. وی در سال ۱۳۷۳ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه اصفهان شد و به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۹ و ۱۳۸۳ وارد مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. وی در سال ۱۳۸۸ از رساله دکتری خود در زمینه حل عددی معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک‌ها تحت راهنمایی حجت‌اله ادیبی دفاع کرد و از سال ۱۳۸۹ عضو هیئت علمی دانشگاه شهرکرد است.

**سعید وحدتی**

گروه ریاضی دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار، دانشگاه اصفهان، اصفهان
s.vahdati@khn.ui.ac.ir

سعید وحدتی متولد تیر ماه ۱۳۵۳ در شهرستان فریدن در استان اصفهان است. وی در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه سمنان شد و در سال ۱۳۷۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه خوارزمی (تربیت معلم سابق) شد. تحصیلات خود در مقطع دکتری را در دانشگاه یو. پی. ام. کشور مالزی ادامه داد و در سال ۱۳۸۸ از رساله دکتری خویش دفاع نمود و از سال ۱۳۸۹ به عنوان عضو هیئت علمی در دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار مشغول به فعالیت است.



The polynomial partition of unity method: an efficient tool in approximation

Davoud Mirzaei*, Mohammadreza Ahmadi Darani and Saeed Vahdati

Abstract: In this paper, we investigate a polynomial approximation/interpolation based on the partition of unity method, and employ it as an efficient method for numerical solution of multivariate problems. First, we introduce multivariate polynomial approximations and prove their scalability properties. Then we use these properties to derive stability and convergence bounds for the proposed method. To have a stable algorithm, local approximations are computed over small subdomains and joined via the partition of unity weight functions to obtain a smooth global approximation. Finally, the global error bound is derived in terms of the error bounds of the local approximations. The idea behind this approach is to solve several small well-conditioned problems instead of solving one large ill-conditioned problem. From the computational point of view, this approach is highly efficient and applicable to a wide range of problems. As an example, the numerical solutions of differential equations are obtained using this approach. Instead of employing a background mesh (similar to finite element and finite volume methods), the unknown quantities are expressed in terms of scattered points. Hence, the given method can also be considered a so-called meshless method.

Keywords: Meshless methods; Approximation; Local Approximation; Partition of unity method; Polynomial approximation; Rational approximation.

Davoud Mirzaei

Department of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Statistics, Isfahan University, Isfahan, Iran.

Email: d.mirzaei@sci.ui.ac.ir

Mohammadreza Ahmadi Darani

Department of Computer Science, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

Email: ahmadi.darani@sku.ac.ir

Saeed Vahdati

Department of Mathematics, Khansar Campus, University of Isfahan, Iran.

Email: s.vahdati@khn.ui.ac.ir

Communicated by Soghra Nobakhtian.

Article Type: Research Paper.

* Corresponding author.

Received: 02/03/2021, Accepted: 23/07/2021.

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127648.1417>