

رده‌بندی مجموعه جواب‌های مسائل بهینه‌سازی محدب‌نما روی خمینه‌های آدامار

علی بارانی

چکیده. در این مقاله، شرط لازم و کافی برای جواب‌های یک مسئله بهینه‌سازی روی زیر مجموعه‌های محدب از خمینه‌های آدامار که در آن تابع هدف محدب‌نما است با شرط وجود یک جواب معین عرضه شده است. همچنین ثابت می‌کنیم طول گرادیان تابع هدف در هر نقطه مینیمم‌کننده برابر مضرب مثبتی از طول آن در یک نقطه مینیمم معین است. کاربرد نتایج به دست آمده با آوردن مثال‌هایی توضیح داده شده است.

۱. مقدمه

رده‌بندی مجموعه جواب مسائل بهینه‌سازی غیرخطی که در آن‌ها یک نقطه مینیمم‌کننده معلوم باشد نقش مهمی در بهینه‌سازی، اقتصاد، و علم مدیریت دارد. توابع محدب‌نما^۱ یکی از مهم‌ترین تعمیم‌های توابع محدب روی فضاها خطی است که بسیاری از خواص توابع محدب مانند سراسری بودن مینیمم‌های موضعی را دارند. این دسته از توابع را ابتدا لوی در [۲۱] و مستقل از اوتای در [۲۲] و مانگاساریان در [۲۲] معرفی کردند. محققین بسیاری [۲۴]، [۳۱]، [۱۶] خواص توابع محدب‌نما را بررسی کرده‌اند.

مسائل بهینه‌سازی محدب را نخستین‌بار مانگاساریان در [۲۳] بررسی کرد. بعد از او این موضوع توجه محققان دیگری مانند برگ و فریس [۶]، جیکمار [۲۰] و بسیار دیگری را جلب کرد و نتایج بیشتری به دست آمد. ایوانف [۱۵] و بیانکی [۵] نتایج فوق را برای توابع محدب‌نما تعمیم دادند و رده‌بندی مجموعه جواب نامساوی‌های تغییراتی محدب‌نما را عرضه نمودند. توابع محدب‌نما مراتب بالاتر را ایوانف [۱۷] تعریف کرد. مانگاساریان در [۲۳] نشان داد گرادیان تابع هدف یک مسئله بهینه‌سازی محدب روی مجموعه جواب آن ثابت است. ایوانف در [۱۸] ثابت کرد خاصیت فوق برای مسائل بهینه‌سازی محدب‌نما برقرار نیست و نشان داد در یک مسئله بهینه‌سازی اگر تابع هدف دیفرانسیل‌پذیر و محدب‌نما باشد آنگاه گرادیان آن در هر نقطه از مجموعه جواب با گرادیانش در یک نقطه مینیمم‌کننده مشخص آن مسئله همخط است. همچنین رده‌بندی مجموعه جواب برای مسائل بهینه‌سازی محدب‌نما در [۱۸] ارائه شده است.

عبارات و کلمات کلیدی: توابع محدب‌نما، مجموعه جواب، به‌طور مثبت مستقل خطی، خمینه‌های آدامار

دبیر تخصصی رابط: صغری نوبختیان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۲۳

نوع مقاله: پژوهشی

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127986.1421>

¹pseudoconvex

علاوه بر آن رده‌بندی توابع محدب‌نما و رده‌بندی مجموعه جواب مسائل بهینه‌سازی محدب‌نما روی فضاهای خطی در سال‌های اخیر بسیار مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. به عنوان مثال به [۸، ۱۸، ۱۷، ۱۵، ۱۶] مراجعه شود.

از طرفی تعمیم روش‌های بهینه‌سازی از فضاهای اقلیدسی به خمینه‌های ریمانی و خمینه‌های آدامار نتایج مهمی در بر داشته است. به عنوان مثال مسائل بهینه‌سازی مقید فضاهای اقلیدسی می‌تواند به مسائل مشابه غیرمقید از دیدگاه هندسه دیفرانسیل تبدیل شوند، به عنوان مثال مراجعه شود به [۱، مثال ۳.۱].

از طرف دیگر مسائل بهینه‌سازی با توابع هدف غیرمحدب و غیرلیپ‌شیتسی در فضاهای اقلیدسی را می‌توان با القا متریک ریمانی مناسب به مسائلی به ترتیب محدب و لیپ‌شیتسی روی خمینه‌های ریمانی تبدیل نمود، به عنوان مثال مراجعه شود به [۲۵] و [۱۳]. بنابراین تعمیم مفاهیم، روش‌های بهینه‌سازی، و موضوع‌های مرتبط با آن‌ها از فضاهای خطی به خمینه‌های ریمانی موضوعی طبیعی و جالب به نظر می‌رسد. در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای گسترش توابع محدب‌نما و تعمیم‌های آن از فضاهای خطی به خمینه‌های ریمانی و خمینه‌های آدامار و استفاده از آن‌ها برای مطالعه و بررسی مسائل بهینه‌سازی و نامساوی‌های تغییراتی صورت گرفته است. رابشاک و اودریسته مفهوم توابع محدب‌نما را روی خمینه‌های ریمانی تعمیم دادند [۲۶، ۲۳]. بعد از آن تحقیقات فراوانی درباره این موضوع به لحاظ نظری و کاربردی انجام شده است. به عنوان نمونه می‌توان به [۱، ۱۰، ۹، ۳۰، ۲۸، ۲۹، ۱۹، ۲، ۱۲] اشاره نمود.

در این مقاله، با اقتباس از مفاهیم و نتایج بالا شرط لازم و کافی برای جواب‌های مسئله‌های بهینه‌سازی روی زیرمجموعه‌های محدب خمینه‌های آدامار که در آن تابع هدف محدب‌نما است را با شرط وجود یک جواب معین ارائه می‌کنیم. بخش‌های مقاله به این صورت‌اند. در بخش ۲ مفاهیم و قضیه‌های اولیه مورد نیاز ارائه می‌گردد. رده‌بندی مجموعه جواب‌های مسائل بهینه‌سازی محدب‌نما در بخش ۳ ارائه خواهد شد.

۲. مفاهیم اولیه

در این بخش برخی مفاهیم مورد نیاز در مورد خمینه‌های ریمانی را یادآوری می‌کنیم؛ برای اطلاعات بیشتر به [۲۷، ۱۱، ۳۳] مراجعه شود.

خمینه ریمانی (M, g) با بعد متناهی را در نظر می‌گیریم که در آن متریک ریمانی $g(x) = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ برای هر $x \in M$ روی فضای مماس $T_x M$ تعریف شده است. تحدید تابع نمایی به زیرمجموعه بازی مانند U از $T_x M$ شامل $^\circ x$ را با $\exp_x$ نشان می‌دهیم. همچنین هموستار ریمانی نظیر متریک ریمانی را با ∇ نمایش می‌دهیم. برای هر دو نقطه $x, y \in M$ فاصله ریمانی بین x و y با $d(x, y)$ نشان داده می‌شود. خمینه ریمانی M را کامل گویند هرگاه هر ژئودزی γ با $\gamma(\circ) = x$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شده باشد. بنابر قضیه هاف-رینو اگر خمینه ریمانی M کامل باشد آنگاه (M, d) یک فضای متری کامل است. علاوه بر آن برای هر $x \in M$ تابع نمایی $\exp_x$ روی کل $T_x M$ تعریف شده است.

یک خمینه ریمانی کامل و همبند ساده با خمیدگی برشی غیرمثبت را یک خمینه آدامار گویند. در یک خمینه آدامار بین هر دو نقطه $x, y \in M$ فقط یک ژئودزی مینیمال یکتا به صورت

$$\gamma(t) = \exp_x(t \exp_x^{-1} y) \quad t \in [0, 1] \text{ برای هر}$$

وجود دارد. همچنین در خمینه آدامار M برای هر $x \in M$ تابع نمایی $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ یک دیفئومورفیسم است. هرگاه $\gamma : I \rightarrow M$ یک خم هموار در خمینه ریمانی M باشد در این صورت برای هر $a, b \in I$ ترابری موازی در طول γ از $\gamma(a) = x$ به $\gamma(b) = y$ با $P_{x, \gamma}^y$ نشان می‌دهیم. در صورتی که γ یک ژئودزی مینیمال یکتا

باشد به جای $P_{x,\gamma}^y$ از نماد P_x^y استفاده می‌کنیم. زیرمجموعه S از M را محدب گویند هرگاه برای $x, y \in S$ یک ژئودزی مینیمال یکتا از x به y موجود باشد به طوری که کاملاً در S قرار گیرد. اگر مجموعه $S \subseteq M$ محدب باشد در این صورت برای $x, y \in S$ هر دو بردار $\exp_x^{-1} y$ و $\exp_y^{-1} x$ تعریف شده‌اند و داریم

$$\|\exp_x^{-1} y\| = d(x, y) = \|\exp_y^{-1} x\|.$$

علاوه بر آن $P_x^y[\exp_x^{-1} y] = -\exp_y^{-1} x$.
گرادیان یک تابع دیفرانسیل‌پذیر $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x بردار مماس (x) در x است به طوری که برای هر $v \in T_x M$ داشته باشیم $\langle (x), v \rangle_x = df_x(v)$ که در آن

$$df_x(v) := \left. \frac{d}{dt} f(\exp_x(tv)) \right|_{t=0},$$

مشتق جهتی تابع f در نقطه x و در جهت بردار v است. علاوه بر آن اگر f دیفرانسیل‌پذیر مرتبه دوم باشد هسین f در x با نماد $f(x)$ یک فرم دوخطی روی $T_x M \times T_x M$ است به طوری که برای هر $v, w \in T_x M$ داریم

$$f_x(v, w) = \langle \nabla_v f(x), w \rangle_x.$$

به این نکته توجه داشته باشید که برای هر $x \in M$ داریم

$$f_x(v, v) = \left. \frac{d^2}{dt^2} f(\exp_x(tv)) \right|_{t=0}.$$

تعریف ۱.۲. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای محدب از خمینه ریمانی M و $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی باشد. در این صورت

(۱) تابع f را محدب گویند هرگاه برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$f(\gamma(t)) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

(۲) اگر f روی مجموعه بازی شامل S دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه f را محدب‌نما گویند هرگاه برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$\langle f(x), \exp_x^{-1} y \rangle_x \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x),$$

که در آن $\gamma(t) = \exp_x(t \exp_x^{-1} y)$ برای هر $t \in [0, 1]$.

به یاد داشته باشید که میدان برداری V را روی زیرمجموعه محدب S از خمینه ریمانی M شبه‌یکنوا گویند هرگاه برای هر $x, y \in S$ و $V(x) \in T_x M$, $V(y) \in T_y M$ داشته باشیم

$$\langle V(x), \exp_x^{-1} y \rangle_x \geq 0 \Rightarrow \langle V(y), \exp_y^{-1} x \rangle_y \leq 0.$$

رابطه بین توابع محدب‌نما دیفرانسیل‌پذیر و شبه‌یکنوا بودن میدان‌های برداری گرادیان آن‌ها در قضیه زیر داده شده است.

قضیه ۲.۲ ([۲۸]). فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای محدب از خمینه ریمانی M و f تابعی دیفرانسیل‌پذیر روی مجموعه‌ای باز و محدب شامل S باشد. در این صورت f روی S محدب‌نما است اگر و فقط اگر f روی S شبه‌یکنوا باشد.

در ادامه برای زیرمجموعه S از خمینه ریمانی M و تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر می‌گیریم

$$(P) \quad \min_{x \in S} f(x)$$

و مجموعه جواب آن را با $\bar{S} = x \in S f(x)$ نشان می‌دهیم. برای توابع محدبی مانند f که پیوسته مشتق‌پذیر مرتبه دوم باشند در [۳] مجموعه جواب مسئله (P) به صورت زیر مشخص شده است.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم S زیرمجموعه‌ای محدب از خمینه آدامار M و f تابعی به طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر مرتبه دوم و محدب روی مجموعه‌ای باز و محدب شامل S باشد. همچنین فرض کنید نقطه $\bar{x} \in \bar{S}$ داده شده باشد. در این صورت

$$\bar{S} = \{x \in S \mid \langle f(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}} = 0, f(x) = P_{\bar{x}}^x[f(\bar{x})]\}.$$

در ادامه همه خمینه‌ها را آدامار و از بعد متناهی در نظر می‌گیریم.

۳. رده‌بندی مجموعه جواب مسئله بهینه‌سازی محدب‌نما

در این بخش رده‌بندی مجموعه جواب مسئله بهینه‌سازی از نوع محدب‌نما $(\cdot)$ را که برای آن S زیرمجموعه‌ای محدب از خمینه‌ای آدامار مثل M و تابع f روی زیرمجموعه‌ای باز و محدب شامل S دیفرانسیل‌پذیر و محدب‌نما است ارائه می‌کنیم.

ابتدا مثالی از یک مسئله بهینه‌سازی می‌آوریم که تحت متریک اقلیدسی مسئله‌ای محدب‌نما نیست ولی با القای یک متریک ریمانی مناسب به مسئله‌ای محدب‌نما روی یک خمینه آدامار تبدیل می‌شود.

مثال ۱.۳. فرض کنیم

$$\mathbb{R}_{++}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\},$$

و

$$S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 \mid x_2 \geq 1, x_1^2 + x_2^2 \leq 25, (x_1 - 3)^2 + x_2^2 \geq 9\}.$$

اکنون تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x_1, x_2) := \frac{\cosh x_1 - 1}{x_2}, \quad (x_1, x_2) \in S \text{ برای هر}$$

مسئله زیر را در نظر می‌گیریم

$$\min_{x \in S} f(x_1, x_2).$$

مسئله فوق با متریک اقلیدسی یک مسئله محدب‌نما نیست؛ زیرا S زیرمجموعه‌ای محدب از $\mathbb{R}_{++}^2$ نیست. همچنین با انتخاب دو نقطه

$$y := (y_1, y_2) = (1, \sqrt{5}), \quad x := (x_1, x_2) = (0, 1)$$

از S داریم

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle = \frac{\sinh x_1}{x_2} (y_1 - x_1) + \frac{1 - \cosh x_1}{x_2^2} (y_2 - x_2) = 0,$$

در صورتی که

$$\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \frac{\sinh y_1}{y_2} (x_1 - y_1) + \frac{1 - \cosh y_1}{y_2^2} (x_2 - y_2) < 0,$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^2$ و ∇f گرادیان f نسبت به متریک اقلیدسی است. پس ∇f روی S شبه‌یکنوا نیست و در نتیجه f طبق [۷، قضیه ۵.۵.۲] محدب‌نما نیست. حالا با القا متریک ریمانی g روی $\mathbb{R}_{++}^2$ با تعریف

$$g_{ij}(x_1, x_2) := \frac{\delta_{ij}}{x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{H} \quad (i, j = 1, 2).$$

یک خمینه آدامار با خمیدگی برشی ۱- موسوم به نیم‌صفحه بالایی پوانکاره با نماد $\mathbb{H} := (\mathbb{R}_{++}^2, g)$ به دست می‌آید. اکنون S زیرمجموعه‌ای محدب از $\mathbb{H}$ است. همچنین برای هر $(x_1, x_2) \in S$ داریم

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (g_{ij}(x_1, x_2))^{-1} \nabla f(x_1, x_2) \\ (1) \quad &= \begin{pmatrix} x_2^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sinh x_1 \\ \frac{1 - \cosh x_1}{x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \sinh x_1 & 1 - \cosh x_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

و با توجه به [۳۰، مثال ۴.۱] نگاشت $x \mapsto f(x)$ روی S شبه‌یکنواست، بنابراین با استفاده از قضیه ۲.۲ تابع f روی S محدب‌نما است. در نتیجه مسئله فوق روی $\mathbb{H}$ به مسئله‌ای محدب‌نما تبدیل شده است. توجه کنید که روش‌های به دست آمده قبلی برای فضا‌های خطی بیان شده در [۱۸] و همچنین قضیه ۳.۲ برای حل مسئله فوق به کار نمی‌آید.

یکی از مهم‌ترین خواص توابع محدب‌نما سراسری بودن مینیمم‌های موضعی آن‌ها است که نتیجه‌ای از قضیه زیر است.

قضیه ۲.۳ ([۷، قضیه ۳.۲.۵]). فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار و C زیرمجموعه‌ای باز و محدب از M باشد. همچنین فرض $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر و محدب‌نما روی C باشد. در این صورت اگر برای $x_* \in C$ داشته باشیم $f(x_*) = 0$ ، آنگاه x_* یک مینیمم سراسری برای f روی C است.

قضیه زیر برای ساختن توابع محدب‌نما روی خمینه‌های آدامار مفید است و اثبات آن مشابه گزاره ۳.۱ در [۲] است.

قضیه ۳.۳ ([۷، صفحه ۶۹]). فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار و S زیرمجموعه‌ای محدب از M باشد. همچنین فرض کنید g, h دو تابع حقیقی و دیفرانسیل‌پذیر روی مجموعه‌ای باز و محدب شامل S باشد که یکی از آن‌ها محدب و منفی و دیگری مقعر و مثبت باشد. در این صورت تابع $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ با تعریف $f(x) := g(x)h(x)$ روی S محدب‌نما است.

اکنون مثالی از یک تابع محدب‌نما روی یک زیرمجموعه محدب از نیم‌صفحه پوانکاره را به عنوان کاربردی از قضیه اخیر ارائه می‌دهیم.

مثال ۴.۳. زیرمجموعه C از نیم‌صفحه پوانکاره $\mathbb{H}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{H} \mid -5 < x_1 < 5, x_2 > 1\}.$$

اکنون C زیرمجموعه‌ای باز و محدب از $\mathbb{H}$ و شامل مجموعه محدب $\{x = (x_1, x_2) \in C \mid x_2 \geq 2\}$ است. توابع حقیقی g, h را روی C به صورت

$$g(x_1, x_2) := \frac{x_1^2 - 25x_2^2}{x_2^2}, \quad h(x_1, x_2) := \ln x_2$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت g روی C تابعی محدب و منفی است. حال با به‌کارگیری فرمول محاسبه هسین (رجوع شود به [۲۳]) برای هر $(x_1, x_2) \in C$ داریم

$$(2) \quad h(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{1}{x_2} \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2} \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

می‌بینیم که که ماتریس h روی C معین منفی است پس h روی C تابعی مقعر و مثبت است. در نتیجه تابع

$$f(x_1, x_2) := \frac{(x_1^2 - 25x_2^2) \ln x_2}{x_2^2},$$

بنابر قضیه ۳.۳ روی S محدب‌نما است.

اکنون مفهوم مجموعه به طور مثبت مستقل خطی را که تعمیمی از مفهوم مجموعه مستقل خطی است بیان می‌کنیم.

تعریف ۵.۳. فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار و $x \in M$. بردارهای $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ را به طور مثبت مستقل خطی گویند هرگاه داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0 \quad (\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

بدیهی است که هر مجموعه از بردارهای به طور مثبت مستقل خطی شامل بردار صفر نیست. همچنین هر مجموعه از بردارهای مستقل خطی به طور مثبت مستقل خطی است. عکس این موضوع درست نیست: اگر $v_0 \in T_x M$ بردار ثابت غیرصفری باشد و

$$v_i := \lambda_i v_0 \in T_x M \quad (i = 1, \dots, k)$$

که در آن اعدادی مثبت و ثابت‌اند، در این صورت مجموعه $\{v_1, \dots, v_k\}$ به طور مثبت مستقل خطی است ولی مستقل خطی نیست.

لم زیر تعمیمی است از [۱۸، لم ۲.۳] برای خمینه‌های آدامار است که اثبات آن مشابه حالت $\mathbb{R}^n$ است.

لم ۶.۳. فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار باشد و $x \in M$. همچنین فرض کنیم بردارهای $v_1, \dots, v_k \in T_x M$ به طور مثبت مستقل خطی باشند. فرض کنیم $w \in T_x M$ بردار غیرصفر دیگری باشد به قسمی که داشته باشیم

$$\langle v_i, v \rangle_x < 0 \quad (v \in T_x M, i = 1, \dots, k) \Rightarrow \langle v, w \rangle_x \leq 0.$$

در این صورت بردار غیرصفر $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ با مولفه‌های نامنفی موجود است به طوری که $w = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$.

گزاره بعد تعمیم [۱۸، لم ۲.۴] به خمینه‌های آدامار دوبعدی است.

گزاره ۷.۳. فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار و C زیرمجموعه‌ای باز و محدب از M باشد. همچنین فرض کنیم $S \subseteq C$ مجموعه‌ای محدب و $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر و محدب‌نما باشد. فرض کنیم برای $i = 1, \dots, k$ داشته باشیم $x_i, x \in \bar{S}$ و $f(x_i) \neq \circ$ و $f(x) \neq \circ$. در این صورت برای هر $v \in T_x M$ حکم زیر برقرار است

$$(۳) \quad \langle P_{x_i}^x[f(x_i)], v \rangle_x < \circ \quad (i = 1, \dots, k) \Rightarrow \langle f(x), v \rangle_x < \circ.$$

اثبات. اثبات با برهان خلف انجام می‌شود. فرض کنیم $v \in T_x M$ موجود باشد به قسمی که

$$(۴) \quad \langle P_{x_i}^x[f(x_i)], v \rangle_x < \circ \quad (i = 1, \dots, k), \quad \langle f(x), -v \rangle_x < \circ.$$

در این صورت با توجه به دیفرانسیل‌پذیر بودن f و روابط موجود در (۴) عدد حقیقی به اندازه کافی کوچک $\tau > 0$ موجود است به قسمی که

$$(۵) \quad f(u_i) < f(x_i) \quad (i = 1, \dots, k), \quad f(u) < f(x).$$

که در آن

$$u_i := \exp_{x_i}(P_{x_i}^x v) \quad (i = 1, \dots, k), \quad u := \exp_x(-k\tau v).$$

فرض کنیم برای هر $i = 1, \dots, k$

$$\sigma_i(t) := \exp_x t(\exp_x^{-1} x_i) \quad t \in [0, 1],$$

ژئودزی بین نقاط x و x_i باشد. اکنون نشان می‌دهیم نقطه‌ای مانند $z \in C$ وجود دارد به طوری که

$$f(z) \leq \max\{f(u), f(u_1), \dots, f(u_k)\}.$$

برای هر $i = 1, \dots, k$ نقطه برخورد ژئودزی بین نقاط u و u_i و ژئودزی σ_i را با z_i نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم

$$z := \text{comb}_{(z_1, \dots, z_k)}\left(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}\right),$$

که در آن مجموعه محدب $\text{comb}_{(z_1, \dots, z_k)}$ ترکیب محدب ژئودزی نقاط $z_1, \dots, z_k$ است که در [۲۴، صفحه ۶] تعریف شده است. از آنجائی که هر تابع محدب‌نما روی یک مجموعه باز و محدب تابعی شبه‌محدب نیز است با استفاده از نامساوی‌های موجود در (۵) و استقرا روی k نتیجه می‌گیریم

$$f(z) \leq \max\{f(u), f(u_1), \dots, f(u_k)\} < f(x) = f(x_1) = \dots = f(x_k).$$

از طرف دیگر $z \in \bar{S}$ پس $f(z) = f(x) = f(x_1) = \dots = f(x_k)$ که بانامساوی اخیر در تناقض است و اثبات تمام می‌شود. $\square$

گزاره زیر که تعمیم [۱۸، لم ۲.۴] برای خمینه‌های آدامار است به خودی خود جالب است و همچنین نقش مهمی در اثبات نتایج اصلی ایفا می‌کند.

گزاره ۸.۳. فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار و C زیرمجموعه‌ای باز و محدب از M باشد. همچنین فرض کنید $S \subseteq C$ مجموعه‌ای محدب و $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر و محدب‌نما باشد. هرگاه نقاط $x_i, x \in \bar{S}$ $(i = 1, \dots, k)$ به گونه‌ای باشند که مجموعه $\{P_{x_i}^x[f(x_i)] \mid i = 1, \dots, k\}$ به طور مثبت مستقل خطی باشد یا

حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد، آنگاه بردار غیرصفر $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ با مولفه‌های نامنفی موجود است به طوری که

$$(۶) \quad f(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(x) P_{x_i}^x [f(x_i)].$$

اثبات. سه حالت ممکن را بررسی می‌کنیم. در ابتدا اگر $f(x) = 0$ آنگاه با توجه به محدب‌نما بودن تابع f و قضیه ۲.۳ نتیجه می‌گیریم که x یک مینیمم‌کننده سرتاسری برای f روی C است. اکنون با توجه به اینکه $x_i \in \bar{S}$ داریم $f(x_i) = f(x)$ ، $i = 1, \dots, k$ پس برای هر i یک مینیمم‌کننده سرتاسری برای f روی C است و $f(x_i) = 0$ در نتیجه شرط (۶) با انتخاب هر $\lambda \neq 0$ با مولفه‌های نامنفی برقرار است. در حالت بعدی اگر برای یک $i = 1, \dots, k$ داشته باشیم $f(x_i) = 0$ با روش مشابه حالت قبل ثابت می‌شود که شرط (۶) برای هر $\lambda \neq 0$ با مولفه‌های نامنفی برقرار است.

در آخرین حالت فرض می‌کنیم $f(x) \neq 0$ و $f(x_i) \neq 0$ برای هر $i = 1, \dots, k$. در این حالت مجموعه $\{f(x_i) | i = 1, \dots, k\}$ به طور مثبت مستقل خطی است و با استفاده از لم ۶.۳ و گزاره ۷.۳ بردار غیرصفری مانند $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ با مولفه‌های نامنفی موجود است به طوری که در (۶) صدق می‌کند. $\square$

نتیجه زیر از گزاره قبل به دست می‌آید.

نتیجه ۹.۳. فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار و C زیرمجموعه‌ای باز و محدب از M باشد. همچنین فرض کنیم $S \subseteq C$ مجموعه‌ای محدب و $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر و محدب‌نما باشد. اگر $\bar{x} \in \bar{S}$ آنگاه برای هر $x \in \bar{S}$ عدد $\lambda(x) > 0$ موجود است به طوری که

$$f(x) = \lambda(x) P_{\bar{x}}^x [f(\bar{x})] \quad (۱)$$

$$\|f(x)\| = \lambda(x) \|f(\bar{x})\| \quad (۲)$$

اکنون به منظور رده‌بندی مجموعه جواب مسئله بهینه‌سازی محدب‌نمای (P) مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\hat{S} := \{x \in S | \langle f(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}} = 0, \quad f(x) = \lambda(x) P_{\bar{x}}^x [f(\bar{x})]\},$$

و

$$\hat{S}_\leq := \{x \in S | \langle f(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}} \leq 0, \quad f(x) = \lambda(x) P_{\bar{x}}^x [f(\bar{x})]\},$$

که در آن $\bar{x} \in \bar{S}$ جواب معینی از مسئله (P) و λ تابعی مثبت از x است. در قضیه زیر که گسترشی از [۱۸]، قضیه ۲.۱ است یک رده‌بندی از مجموعه جواب مسئله بهینه‌سازی محدب‌نما روی خمینه‌های آدامار ارائه می‌گردد. این قضیه همچنین تعمیمی از قضیه ۳.۲ برای توابع محدب‌نما نیز هست.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم M خمینه‌ای آدامار و C زیرمجموعه‌ای باز و محدب از M باشد. همچنین فرض کنیم $S \subseteq C$ مجموعه‌ای محدب و $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر و محدب‌نما باشد. اگر $\bar{x}$ جوابی از مسئله بهینه‌سازی (P) باشد آنگاه

$$(۷) \quad \bar{S} = \hat{S} = \hat{S}_\leq.$$

اثبات. فرض کنیم $\bar{x} \in S$. در این صورت با توجه به محدب بودن مجموعه $\bar{S}$ داریم

$$\gamma(t) := \exp_{\bar{x}}(t \exp_{\bar{x}}^{-1} x) \in S \quad t \in [0, 1] \text{ برای هر}$$

پس $f(\gamma(t)) = f(\bar{x})$ با محاسبه‌ای ساده رابطه زیر به دست می‌آید

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\bar{x})}{t} = \langle f(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}}.$$

از طرفی با استفاده از نتیجه ۹.۳ تابع مثبت λ از x موجود است بقسمی که $f(x) = \lambda(x)P_{\bar{x}}^x[f(\bar{x})]$ در نتیجه $x \in \hat{S}$ و $\bar{S} \subseteq \hat{S}$ برقرار است. برقراری شمول $\hat{S} \subseteq \bar{S}$ بدیهی است.

برای کامل کردن اثبات کافی است ثابت کنیم $\hat{S} \subseteq \bar{S}$. فرض کنیم $x \in \hat{S}_1$ در این صورت $\langle f(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}} \leq 0$. از این نامساوی و نتیجه ۹.۳ و با توجه به مثبت بودن λ داریم

$$\begin{aligned} \langle f(x), \exp_x^{-1} \bar{x} \rangle_x &= \langle \lambda(x)P_{\bar{x}}^x[f(\bar{x})], \exp_x^{-1} \bar{x} \rangle_x \\ &= \lambda(x) \langle f(\bar{x}), P_{\bar{x}}^x[\exp_x^{-1} \bar{x}] \rangle_{\bar{x}} \\ &= \lambda(x) \langle f(\bar{x}), -\exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}} \\ &= -\lambda(x) \langle f(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}} \geq 0. \end{aligned}$$

اکنون از $\langle f(x), \exp_x^{-1} \bar{x} \rangle_x \geq 0$ و محدب‌نما بودن f نتیجه می‌گیریم $f(\bar{x}) \geq f(x)$. این نامساوی با توجه به برقراری $f(x) \geq f(\bar{x})$ نتیجه می‌گیریم که $f(x) = f(\bar{x})$. پس $x \in \bar{S}$ و برهان کامل می‌شود. $\square$

در پایان مثالی از یک مسئله بهینه‌سازی محدب‌نما می‌آوریم که نشان می‌دهد چگونه نتیجه اصلی این مقاله، یعنی قضیه ۱۰.۳، برای حل آن قابل استفاده است؛ در حالی که روش‌های موجود برای فضاها خطی در [۱۸] و در حالت غیرخطی یعنی قضیه ۳.۲ برای آن کارایی ندارند.

مثال ۱۱.۳. فرض کنیم

$$M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\},$$

ناحیه اول صفحه مختصات دکارتی باشد که متریک ریمانی به صورت زیر روی آن تعریف شده است

$$g_{ij}(x_1, x_2) := \frac{\delta_{ij}}{x_i x_j} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, i, j = 1, 2).$$

در این صورت M خمینه‌ای آدامار است. برای هر $x = (x_1, x_2) \in M$ و هر $v = (v_1, v_2) \in T_x M = \mathbb{R}^2$ ژئودزی $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ که در شرایط $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$ صدق کند به صورت زیر است

$$(8) \quad \gamma(t) = \left(x_1 e^{\frac{v_1}{x_1} t}, x_2 e^{\frac{v_2}{x_2} t} \right) \quad t \in \mathbb{R} \text{ برای هر}$$

نگاشت $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ با تعریف

$$\gamma(t) = \left(x_1^{-t} y_1^t, x_2^{-t} y_2^t \right) \quad t \in [0, 1] \text{ برای هر}$$

ژئودزی یکنای بین $x := (x_1, x_2)$ و $y := (y_1, y_2)$ است $\gamma(1) = y$ است (رجوع شود به [۲۶، صفحه ۱۷۰]) و

$$\exp_x^{-1} y = \left(x_1 \ln \frac{y_1}{x_1}, x_2 \ln \frac{y_2}{x_2} \right).$$

مجموعه S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S := \{(x_1, x_2) \in M \mid 1 \leq x_1, x_2 \leq 2, x_1 x_2 \leq 2\}.$$

واضح است که S با متریک اقلیدسی زیرمجموعه‌ای محدب از $\mathbb{R}^2$ نیست. از طرف دیگر، S زیرمجموعه‌ای محدب از M است؛ زیرا $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ که در آن

$$S_i = \{(x_1, x_2) \in M \mid x_i \geq 1\} \quad (i = 1, 2)$$

و

$$S_3 = \{(x_1, x_2) \in M \mid x_1 x_2 \leq 2\},$$

زیرمجموعه‌های محدبی از M اند: محدب بودن S_3 در مثال ۴.۱ از [۴] ثابت شده است. حال تابع $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $g(x_1, x_2) := \frac{1}{x_1}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$g(\gamma(t)) = \frac{1}{x_1} e^{-\frac{v_1}{x_1} t} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{برای هر}$$

که در آن γ ژئودزی یکتای تعریف شده در (۸) توسط دستور (v_1, v_2) است. پس برای هر $t \in \mathbb{R}$

$$g''(\gamma(t)) = \frac{v_1^2}{x_1^3} e^{-\frac{v_1}{x_1} t} \geq 0,$$

و این یعنی g تابعی است محدب. حال با توجه به اینکه $S_1 = \{(x_1, x_2) \in M \mid g(x_1, x_2) \leq 1\}$ پس نتیجه می‌گیریم که S_1 مجموعه‌ای محدب است. محدب بودن S_2 به طور مشابه ثابت می‌شود. اکنون تابع $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x_1, x_2) := \frac{x_2 - 1}{5 - x_1},$$

که در آن

$$C := \{(x_1, x_2) \in M \mid x_1 < 5, x_1 x_2 < 5, x_i > \frac{1}{5}, i = 1, 2\}.$$

واضح است که f روی زیرمجموعه محدب C از M تابعی دیفرانسیل پذیر است و $S \subset C$. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد توابع h_1 و h_2 که به صورت

$$h_1(x_1, x_2) := x_2 - 1, \quad h_2(x_1, x_2) = 5 - x_1$$

روی C تعریف شده‌اند به ترتیب محدب و مقعرند. علاوه بر آن تابع h_2 روی مجموعه C مثبت است. در نتیجه تابع $f = \frac{h_1}{h_2}$ بنابر [۲، گزاره ۳.۱] روی C محدب‌نما است. اکنون برای هر $x = (x_1, x_2) \in S$ داریم

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (g_{ij}(x_1, x_2))^{-1} \nabla f(x_1, x_2) \\ (9) \quad &= \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}^T \left(\frac{x_2 - 1}{(5 - x_1)^2}, \frac{1}{5 - x_1} \right) = \left(\frac{x_1^2(x_2 - 1)}{(5 - x_1)^2}, \frac{x_2^2}{5 - x_1} \right), \end{aligned}$$

که در آن ∇f گرادیان f نسبت به متریک اقلیدسی است.

روشن است که $\bar{x} = (1, 1) \in \bar{S}$ و با محاسبه‌ای ساده داریم

$$(10) \quad f(\bar{x}) = (0, \frac{1}{4}),$$

و برای هر $x = (x_1, x_2) \in S$

$$(11) \quad \exp_{\bar{x}}^{-1} x = \left(\ln \frac{x_1}{1}, \ln \frac{x_2}{1} \right) = \left(\ln x_1, \ln x_2 \right).$$

با استفاده از این مقادیر تساوی زیر به دست می‌آید

$$(12) \quad \langle f(\bar{x}), \exp_{\bar{x}}^{-1} x \rangle_{\bar{x}} = \left\langle (0, \frac{1}{4}), (\ln x_1, \ln x_2) \right\rangle_{\bar{x}} = \frac{1}{4} \ln x_2.$$

اکنون با استفاده از (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) و به کار بستن قضیه ۱۰.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \bar{S} &:= \left\{ x = (x_1, x_2) \in S \mid x_2 = 1, \quad f(x) = \frac{4}{5 - x_1} P_{\bar{x}}^x \left[(0, \frac{1}{4}) \right] \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in S \mid 1 \leq x_1 \leq 2, x_2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

در پایان به این نکته توجه می‌کنیم که در مثال فوق برای هر $x \in \bar{S}$ داریم

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{4}{5 - x_1} P_{\bar{x}}^x \left[(0, \frac{1}{4}) \right] \right\| = \frac{1}{5 - x_1}.$$

در حالت کلی نتیجه ۹.۳ نشان می‌دهد برای مسائل محدب‌نما طول برداری گرادیان تابع هدف روی $\bar{S}$ ثابت نیست؛ در صورتی که برای مسائل محدب بنابر قضیه ۳.۲ طول فوق روی $\bar{S}$ ثابت است. رده‌بندی مجموعه جواب مسائل بهینه‌سازی محدب‌نما روی خمینه‌های ریمانی دلخواه و در حالت کلی‌تر وقتی تابع هدف دیفرانسیل‌پذیر نباشد موضوعاتی برای تحقیق در این زمینه‌اند.

مراجع

- [1] A. Barani, Subdifferentials of perturbed distance function in Riemannian manifolds, *Optimization*, **67** (2018) 1849–1868.
- [2] A. Barani, Convexity of the solution set of a pseudoconvex inequality in Riemannian manifolds, *Numer. Funct. Anal. Opt.*, **39** (2018) 588–599.
- [3] A. Barani and S. Hosseini, Characterization of solution sets of convex optimization problems in Riemannian manifolds, *Arch. Math.*, **114** (2020) 215–225.
- [4] G. C. Bento and J. G. Melo, Subgradient method for convex feasibility on Riemannian manifolds, *J. Optim. Theory Appl.*, **152** (2012) 773–785.
- [5] M. Bianchi and S. Schaible, An extension of pseudolinear functions and variational inequality problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **104** (2000) 59–71.
- [6] J. V. Burke and M. C. Ferris, Characterization of the solution sets of convex programs, *Oper. Res. Lett.*, **10** (1991) 57–60.
- [7] A. Cambini and L. M. Martein, *Generalized Convexity and Optimization, Theory and Applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **616**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [8] L. Carosi, Pseudoconvexity on a closed convex set: an application to a wide class of generalized fractional functions, *Decisions Econ. Finan.*, **40** (2017) 145–158.

- [9] S. Chen, Existence results for vector variational inequality problems on Hadamard manifolds, *Optim. Lett.*, **14** (2020) 2395–2411.
- [10] S. Chen and C. Fang, Vector variational inequality with pseudoconvexity on Hadamard manifolds, *Optimization*, **65** (2016) 2067–2080.
- [11] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [12] M. Farrokhiya and A. Barani, Limiting subdifferential calculus and perturbed distance function in Riemannian manifolds, *J. Glob. Optim.*, **77** (2020) 661–685.
- [13] O. P. Ferreira, Proximal subgradient and a characterization of Lipschitz functions on Riemannian manifolds, *J. Math. Anal. Appl.*, **313** (2006) 587–597.
- [14] O. P. Ferreira, A. N. Iusem and S. Z. Németh, Concepts and techniques of optimization on the sphere, *TOP*, **22** (2014) 1148–1170.
- [15] V. I. Ivanov, Characterizations of the solution sets of generalized convex minimization problems, *Serdica Math. J.*, **29** (2003) 1–10.
- [16] V. I. Ivanov, On variational inequalities and nonlinear programming problem, *Stud. Sci. Math. Hungar.*, **45** (2008) 483–491.
- [17] V. I. Ivanov, Optimization and variational inequalities with pseudoconvex functions, *J. Optim. Theory Appl.*, **146** (2010) 602–616.
- [18] V. I. Ivanov, Optimality conditions and characterizations of the solution sets in generalized convex problems and variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.*, **158** (2013) 65–84.
- [19] S. Jana and C. Nahak, An introduction to mixed hemivariational inequality problems on Hadamard manifolds, *SeMA Journal*, (2021), <https://doi.org/10.1007/s40324-021-00249-y>.
- [20] V. Jeyakumar, Infinite dimensional convex programming with applications to constrained approximation, *J. Optim. Theory Appl.*, **75** (1992) 469–586.
- [21] E. E. Levi, Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **17** (1910) 61–68.
- [22] O. L. Mangasarian, Pseudoconvex functions, *SIAM J. Control*, **3** (1965) 281–290.
- [23] O. L. Mangasarian, A simple characterization of solution sets of convex programs, *Oper. Res. Lett.*, **7** (1988) 21–26.
- [24] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations of Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [25] E. A. P. Quiroz, E. M. Quispe and P. R. Oliveira, Steepest descent method with a generalized Armijo search for quasiconvex functions on Riemannian manifolds, *J. Math. Anal. Appl.*, **341** (2008) 467–477.
- [26] T. Rapsák, *Smooth Nonlinear Optimization in $\mathbb{R}^n$* , Kluwer Academic, New York, 1997.
- [27] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs 149, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [28] G. J. Tang and N. J. Huang, Korpelevich's method for variational inequality problems on Hadamard manifolds, *J. Glob. Optim.*, **54** (2012) 493–509.
- [29] G. J. Tang, L. Zhou and N. Huang, The proximal point algorithm for pseudomonotone variational inequalities on Hadamard manifolds, *Optim. Lett.*, **7** (2013) 779–790.
- [30] G. J. Tang, X. Wang and H. W. Liu, A projection-type method for variational inequalities on Hadamard manifolds and verification of solution existence, *Optimization*, **64** 1081–1096.
- [31] W. A. Thompson and D. W. Parke, Some properties of generalized concave functions, *Oper. Res.*, **21** (1973) 305–313.
- [32] H. Tuy, Sur les inégalités linéaires, *Colloq. Math.* **13** (1964) 107–123.

- [33] C. Udriste, *Convex functions and Optimization methods on Riemannian Manifolds*, Mathematics and its Applications 297, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [34] Li. W. Zhou, Y. B. Xiao and N. J. Huang, New characterization geodesic convexity on Hadamard manifolds, *J. Optim. Theory Appl.*, **172** (2017) 824–844.

علی بارانی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

@..

علی بارانی متولد مهرماه ماه ۱۳۴۷ در شهر خرم آباد است. وی در سال ۱۳۷۲ در مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی از دانشگاه لرستان، ۱۳۷۴ در مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض از دانشگاه شهید بهشتی تهران و ۱۳۸۷ در مقطع دکتری، رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز روی خمینه‌ها از دانشگاه اصفهان فارغ التحصیل شد.

