

رده‌ای از فضاها‌ی فینسلری متقارن تعمیم‌یافته

حمیدرضا سلیمی مقدم

چکیده. در این مقاله فضاها‌ی فینسلری مجهز به (α, β) -متریک $F = \alpha + \beta - \beta^q/\alpha$ را مطالعه می‌کنیم. پس از بررسی ارتباط بین s -ساختار متریک ریمانی زمینه و s -ساختار متریک فینسلری مورد بحث، نشان می‌دهیم هر فضای متقارن تعمیم‌یافته مجهز به چنین متریکی خمینه‌ای ریمانی است.

۱. مقدمه

خمینه ریمانی همبند $(M, \langle, \rangle)$ یک فضای متقارن (سراسری) نامیده می‌شود اگر هر نقطه دلخواه $x \in M$ یک نقطه ثابت تنها از یک ایزومتري برگشتی s_x از $(M, \langle, \rangle)$ باشد. یادآوری می‌کنیم که وابرسانی^۱

$$\phi : (M, \langle, \rangle_M) \longrightarrow (N, \langle, \rangle_N),$$

بین دو خمینه ریمانی $(M, \langle, \rangle_M)$ و $(N, \langle, \rangle_N)$ ایزومتري نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $p \in M$ و هر دو بردار $X_p, Y_p \in T_p M$ داشته باشیم

$$\langle (\phi)_* X_p, (\phi)_* Y_p \rangle_N = \langle X_p, Y_p \rangle_M.$$

در چنین حالتی یک ایزومتري از خمینه ریمانی $(M, \langle, \rangle)$ ، به صورت یک ایزومتري $(M, \langle, \rangle) \longrightarrow (M, \langle, \rangle)$ تعریف می‌شود. همچنین منظور از اصطلاح «برگشتی» در تعریف فوق این است که $s_x \circ s_x = Id_M$. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که برای نگاشت مشتق $S_x := (s_x)_*$ داریم $S_x = -Id_{T_x M}$ (۷) را ببینید).

مفهوم فضای متقارن در [۸] به شکل زیر تعمیم‌یافته است. برای خمینه ریمانی همبند $(M, \langle, \rangle)$ یک ایزومتري با نقطه ثابت تنهای $x \in M$ یک تقارن از $(M, \langle, \rangle)$ در نقطه x نامیده می‌شود. به وضوح اگر s_x یک تقارن از $(M, \langle, \rangle)$ در x باشد آنگاه $S_x = (s_x)_*$ یک تبدیل متعامد یکه از $T_x M$ است که هیچ برداری را به غیر از بردار صفر ثابت نگه نمی‌دارد. توجه داشته باشید که در اینجا برگشتی بودن نگاشت s_x در x فرض نشده است.

عبارات و کلمات کلیدی: فضای متقارن تعمیم‌یافته، متریک فینسلری، متریک ریمانی، گروه ایزومتري، (α, β) -متریک
دبیر تخصصی رابط: حمیدرضا پوریای ولی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۱۵

نوع مقاله: پژوهشی
* نویسنده مسئول مقاله

بنابر قضیه بریکل^۲ ([۷، ۸، ۱۱]) را مشاهده نمایید) اگر $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک خمینه همبند ریمانی باشد به طوری که به ازای هر $x \in M$ حداقل یک تقارن s_x وجود داشته باشد آنگاه گروه ایزومتريهای آن، که با نماد $I(M)$ نمایش داده می شود، به صورت متعدی روی M عمل می کند.

خانواده $\{s_x : x \in M\}$ متشکل از تقارنهای خمینه ریمانی همبندی مثل $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک s -ساختار ریمانی روی $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ نامیده می شود. به عبارت دیگر، قضیه بریکل بیان می کند اگر یک خمینه همبند ریمانی، یک s -ساختار بپذیرد آنگاه یک خمینه ریمانی همگن است.

یک s -ساختار روی یک خمینه ریمانی $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ، از مرتبه k نامیده می شود (که در آن k عددی صحیح بزرگتر یا مساوی ۲ است) اگر به ازای هر $x \in M$ داشته باشیم

$$s_x^k := s_x \circ \dots \circ s_x = Id_M,$$

و به ازای هر $l < k$

$$s_x^l \neq Id_M.$$

بنابر تعریف ([۷]) یک s -ساختار $\{s_x\}$ روی یک خمینه ریمانی $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ منظم نامیده می شود اگر به ازای هر دو نقطه $x, y \in M$ در رابطه زیر صدق کند

$$s_x \circ s_y = s_z \circ s_x,$$

که در آن فرض کرده ایم $z = s_x(y)$.

منظور از یک فضای ریمانی متقارن تعمیم یافته، خمینه ریمانی همبندی مثل $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ مجهز به یک s -ساختار منظم است. خمینه ریمانی $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ، k -متقارن نامیده می شود (به ازای k بزرگتر یا مساوی ۲)، اگر یک s -ساختار منظم از مرتبه k بپذیرد. مرتبه یک فضای ریمانی متقارن تعمیم یافته کوچکترین عدد $k \geq 2$ است طوری که $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ، k -متقارن باشد. به وضوح هر فضای ریمانی متقارن تعمیم یافته از مرتبه ۲ یک فضای ریمانی متقارن به معنی عام است. در سال ۲۰۱۰ مفهوم فضای ریمانی متقارن تعمیم یافته به خمینه های فینسلری تعمیم یافت [۶]. رده مهمی از متریک های فینسلری، (α, β) -متریک ها هستند که توسط نرم α حاصل از یک متریک ریمان $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و یک ۱-فرمی β تعریف می شوند. این گونه متریک های فینسلری به دلیل کاربردهای فراوان در رشته های مختلف مانند فیزیک و زیست شناسی اهمیت ویژه ای دارند (برای یافتن برخی کاربردهای این نوع متریک ها می توانید [۱، ۲] را مطالعه کنید). در این مقاله پس از بیان مقدمات لازم درباره فضاهای فینسلری متقارن تعمیم یافته، ثابت می کنیم هر فضای فینسلری متقارن تعمیم یافته مجهز به (α, β) -متریک $F = \alpha + \beta - \beta^2/\alpha$ فضایی ریمانی است.

۲. مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلری

در این بخش به بیان برخی مقدمات لازم درباره هندسه فینسلری می پردازیم. مرجع مناسب در مورد خمینه های فینسلری کتاب [۴] است.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم M یک خمینه هموار و TM نمایشگر کلاف مماس آن باشد. تابع $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ یک متریک فینسلری روی خمینه M نامیده می شود اگر در شرایط زیر صدق کند.

(۱) تابع F روی زیرخمینه باز $TM \setminus \{0\}$ از TM هموار باشد.

(۲) تابع F همگن مثبت از درجه یک باشد یعنی به ازای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم، $F(x, \lambda Y) = \lambda F(x, Y)$.

(۳) به ازای هر $Y \in T_x M$ ماتریس هسین $[g_{ij}] = [\frac{1}{2} F_{Y^i Y^j}]$ معین مثبت باشد.

²Brickel

در این صورت زوج (M, F) را یک خمینه فینسلری می‌نامند. فرض کنیم (M, F) یک خمینه فینسلری و $\gamma : [0, r] \rightarrow M$ یک خم قطعه‌ای هموار باشد. در این صورت طول قوس این خم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L(\gamma) = \int_0^r F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

به ازای هر دو نقطه $x, y \in M$ فرض کنیم $\Gamma(x, y)$ نمایشگر مجموعه همه خم‌های قطعه‌ای هموار به شکل

$$\gamma : [0, r] \rightarrow M$$

با شرط $\gamma(0) = x$ و $\gamma(r) = y$ باشد. اکنون می‌توان مشاهده کرد که تابع $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ با ضابطه $d(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma)$ در شرایط زیر صدق می‌کند

(۱) به ازای هر $x, y \in M$ داریم $d(x, y) \geq 0$ ، و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x = y$.

(۲) به ازای هر $x, y, z \in M$ داریم $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

توجه کنید که در حالت کلی تابع d متقارن نیست.

همانند خمینه‌های ریمانی دو تعریف برای مفهوم ایزومتري روی خمینه‌های فینسلری وجود دارد. اولی به عنوان تابعی روی کلاف‌های مماس، که به ازای هر $Y \in T_x M$ فرم دو خطی

$$g_Y : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_Y(U, V) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (F^2(x, Y + sU + tV))|_{s=t=0},$$

را حفظ کند و دومی به عنوان تابعی روی خمینه زمینه M که تابع فاصله d را حفظ کند. در سال ۲۰۰۲ دو ریاضی‌دان چینی به نام‌های دنگ^۳ و هو^۴ ثابت کردند که مانند حالت ریمانی این دو مفهوم هم‌ارزند (۵) را ببینید). همچنین آن‌ها ثابت کردند که گروه ایزومتري‌های یک خمینه فینسلری یک گروه تبدیلات لی است.

با توجه به اینکه گروه ایزومتري‌های هر خمینه فینسلری یک گروه لی است، مفهوم خمینه فینسلری همگن نیز به صورت مشابه با خمینه‌های ریمانی همگن به شکل خمینه‌ای که گروه ایزومتري‌های آن به صورت متعدی روی آن عمل کند تعریف می‌شود.

اکنون به تعریف فضاهای فینسلری متقارن می‌پردازیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم (M, F) یک خمینه فینسلری همبند باشد. (M, F) را متقارن نامیم اگر به ازای هر $x \in M$ یک ایزومتري $s_x : M \rightarrow M$ با شرایط زیر وجود داشته باشد:

(۱) برگشتی باشد یعنی به ازای هر $x \in M$ داشته باشیم $s_x \circ s_x = Id_M$.

(۲) نقطه x ، نقطه ثابت تنه‌ای s_x باشد، یعنی همسایگی U از x چنان یافت شود که x تنها نقطه ثابت تابع s_x در آن همسایگی باشد.

برای خمینه‌های فینسلری نیز مانند حالت ریمانی هر فضای فینسلری متقارن یک فضای همگن است (۶) را ببینید).

فرض کنیم (M, F) یک خمینه فینسلری همبند باشد. منظور از یک تقارن روی M در نقطه $x \in M$ یک ایزومتري با نقطه ثابت تنه‌ای x است که معمولاً با نماد s_x نمایش داده می‌شود.

³Deng ⁴Hou

تعریف ۳.۲. خانواده $\{s_x | x \in M\}$ از تقارن‌های یک خمینه فینسلری همبند (M, F) یک s -ساختار روی آن نامیده می‌شود.

یک s -ساختار از مرتبه k (با فرض $k \geq 2$) نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in M$ ، $(s_x)^k = Id_M$ ، که در آن k کوچک‌ترین عدد صحیح با این خاصیت است. می‌توان مشاهده کرد که یک خمینه فینسلری متقارن است اگر و تنها اگر یک s -ساختار از مرتبه ۲ بپذیرد.

یک s -ساختار منظم در حالت فینسلری نیز دقیقاً مانند آنچه در مقدمه آمد، مشابه حالت ریمانی آن تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۲. یک خمینه فینسلری همبند (M, F) مجهز به یک s -ساختار منظم یک فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته نامیده می‌شود.

یک خانواده بسیار مهم از متریک‌های فینسلری که کاربردهای زیادی در علوم دیگر مانند فیزیک و زیست‌شناسی دارد (α, β) -متریک‌ها هستند ([۱-۳] را ببینید). این متریک‌ها توسط یک متریک ریمانی و یک ۱-فرمی تعریف می‌شوند. به عبارت دقیق‌تر، متریک فینسلری F یک (α, β) -متریک نامیده می‌شود اگر به ازای یک تابع حقیقی ϕ ، به شکل $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ باشد که در آن $\alpha(x, Y) = \sqrt{\langle Y, Y \rangle}$ نرم حاصل از متریک ریمانی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و β یک ۱-فرمی روی خمینه M است. می‌توان نشان داد که ۱-فرمی β توسط میدان برداری منحصربه‌فردی مثل X به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\beta(x, Y) = \langle X_x, Y \rangle,$$

که در آن $Y \in T_x M$ دلخواه فرض شده است.

تابع $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ یک متریک فینسلری است اگر تابع $\phi : (-b_0, b_0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ یک تابع هموار باشد که در شرط

$$\phi(s) - s\phi'(s) + (b^2 - s^2)\phi''(s) > 0, \quad |s| \leq b < b_0,$$

صدق کند و برای هر $x \in M$ ، $\|X_x\| = \sqrt{\langle X_x, X_x \rangle} < b_0$.

به عنوان مثال‌هایی از این نوع متریک‌ها می‌توان به متریک رانرس و متریک ماتسوموتو که به ترتیب با فرض $\phi(s) = 1 + s$ و $\phi(s) = \frac{1}{1-s}$ تعریف می‌شوند اشاره کرد (به [۹، ۱۰] مراجعه شود).

در این مقاله به بررسی یکی از (α, β) -متریک‌ها که در مقاله [۳] تعریف شده است، می‌پردازیم. برای این متریک تابع ϕ به صورت $\phi(s) = 1 + s - s^2$ در نظر گرفته شده است.

۳. فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته مجهز به متریک $F = \alpha + \beta - \frac{\beta^2}{\alpha}$

در تعریف (α, β) -متریک فرض کنیم $\phi(s) = 1 + s - s^2$ ، در این صورت برای متریک فینسلری تعریف شده توسط آن داریم

$$F = \alpha + \beta - \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

در قضیه زیر نشان می‌دهیم تقارن‌های یک فضای فینسلری متقارن تعمیم‌یافته با متریک فوق برای متریک ریمانی زمینه نیز یک تقارن خواهند بود.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم (M, F) یک فضای (α, β) -متریک متقارن تعمیم‌یافته مجهز به متریک $F = \alpha + \beta - \beta^2/\alpha$ تعریف‌شده توسط متریک ریمانی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و میدان برداری X باشد. آنگاه s -ساختار $\{s_x\}$ از (M, F) یک s -ساختار منظم برای خمینه ریمانی $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ نیز است.

اثبات. فرض کنیم s_x یک تقارن از (M, F) در x باشد و $p \in M$. در این صورت به ازای هر $Y \in T_p M$ داریم

$$(۱) \quad \|Y\| - \frac{\langle X_p, Y \rangle^2}{\|Y\|} + \langle X_p, Y \rangle = \|(s_x)_{*p} Y\| - \frac{\langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle^2}{\|(s_x)_{*p} Y\|} + \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle,$$

که در آن نرم بر اساس متریک ریمانی $\langle, \rangle$ محاسبه شده است. اکنون با جانشانی Y با $-Y$ در معادله فوق داریم

$$(۲) \quad \|Y\| - \frac{\langle X_p, Y \rangle^2}{\|Y\|} - \langle X_p, Y \rangle = \|(s_x)_{*p} Y\| - \frac{\langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle^2}{\|(s_x)_{*p} Y\|} - \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle.$$

از تفاضل طرفین تساوی‌های ۱ و ۲ داریم

$$(۳) \quad \langle X_p, Y \rangle = \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle.$$

اکنون با استفاده از تساوی‌های ۱ و ۳ تساوی زیر حاصل می‌گردد

$$\|Y\| \|(s_x)_{*p} Y\| (\|Y\| - \|(s_x)_{*p} Y\|) = -\langle X_p, Y \rangle^2 (\|Y\| - \|(s_x)_{*p} Y\|).$$

اکنون اگر بردار مخالف صفر $Y \in T_p M$ چنان موجود باشد که $\|Y\| \neq \|(s_x)_{*p} Y\|$ آنگاه داریم

$$\|Y\| \|(s_x)_{*p} Y\| = -\langle X_p, Y \rangle^2,$$

که با توجه به مثبت بودن سمت چپ تساوی امکان‌پذیر نیست. بنابراین به ازای هر $Y \in T_p M$ داریم $\|Y\| = \|(s_x)_{*p} Y\|$ که نشان می‌دهد s_x یک تقارن از خمینه ریمانی $(M, \langle, \rangle)$ است. $\square$

در ادامه خواهیم دید که تقارن‌های متریک F نسبت به تقارن‌های متریک ریمانی زمینه، رابطه تنگاتنگی با پایایی میدان برداری X تحت این تقارن‌ها دارند.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $(M, \langle, \rangle)$ خمینه ریمانی متقارن تعمیم‌یافته باشد. همچنین فرض کنیم $F = \alpha + \beta - \beta^2 / \alpha$ یک (α, β) -متریک تعریف‌شده توسط متریک ریمانی $\langle, \rangle$ و میدان برداری X باشد. در این صورت s -ساختار منظم $\{s_x\}$ از $(M, \langle, \rangle)$ یک s -ساختار منظم برای (M, F) است اگر و تنها اگر میدان برداری X به ازای هر $x \in M$ ، s_x -پایا باشد.

اثبات. فرض کنیم s_x یک تقارن برای (M, F) در نقطه $x \in M$ باشد. در این صورت به ازای هر $p \in M$ و هر $Y \in T_p M$ داریم

$$\|Y\| - \frac{\langle X_p, Y \rangle^2}{\|Y\|} + \langle X_p, Y \rangle = \|(s_x)_{*p} Y\| - \frac{\langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle^2}{\|(s_x)_{*p} Y\|} + \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle,$$

بنابراین با توجه به اینکه s_x یک تقارن از $(M, \langle, \rangle)$ است داریم

$$(۴) \quad (\langle X_p, Y \rangle - \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle) (\|Y\| - \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle - \langle X_p, Y \rangle) = 0.$$

اکنون اگر $Y \in T_p M$ ، $0 \neq Y$ چنان موجود باشد که $\langle X_p, Y \rangle \neq \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$\langle X_p, -Y \rangle \neq \langle X_{s_x(p)}, -(s_x)_{*p} Y \rangle.$$

با توجه به رابطه ۴ داریم

$$(۵) \quad \|Y\| = \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle + \langle X_p, Y \rangle,$$

از طرفی با تبدیل Y به $-Y$ داریم

$$(۶) \quad \|Y\| = -\langle X_{s_x(p)}, (s_x)_* Y \rangle - \langle X_p, Y \rangle.$$

روابط ۵ و ۶ نشان می‌دهد که $Y = 0$ که خلاف فرض است، در نتیجه به ازای هر $Y \in T_p M$ داریم

$$\langle X_p, Y \rangle = \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_* Y \rangle.$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد به ازای هر $Y \in T_p M$ داریم

$$\langle X_p - (s_x)_*^{-1} X_{s_x(p)}, Y \rangle = 0,$$

که با توجه به ناتباهیده بودن متریک ریمانی خواهیم داشت

$$X_p = (s_x)_*^{-1} X_{s_x(p)}.$$

بنابراین میدان برداری X به ازای هر $x \in M$ ، s_x پایا است.

برعکس، فرض کنیم میدان برداری X به ازای هر $x \in M$ ، s_x پایا است، ثابت می‌کنیم $\{s_x\}$ یک s -ساختار منظم برای (M, F) است. با توجه به فرض به ازای هر $p \in M$ داریم

$$(s_x)_* X_p = X_{s_x(p)},$$

در نتیجه به ازای هر $Y \in T_p M$ داریم

$$\begin{aligned} F(s_x(p), (s_x)_* Y) &= \|(s_x)_* Y\|^2 - \frac{\langle X_{s_x(p)}, (s_x)_* Y \rangle^2}{\|(s_x)_* Y\|^2} + \langle X_{s_x(p)}, (s_x)_* Y \rangle \\ &= \|Y\|^2 - \frac{\langle (s_x)_* X_p, (s_x)_* Y \rangle^2}{\|Y\|^2} + \langle (s_x)_* X_p, (s_x)_* Y \rangle \\ &= \|Y\|^2 - \frac{\langle X_p, Y \rangle^2}{\|Y\|^2} + \langle X_p, Y \rangle = F(p, Y). \end{aligned}$$

□

هر چند در این مقاله به بررسی متریک فینسلری $F = \alpha + \beta - \beta^2/\alpha$ می‌پردازیم که در آن تابع ϕ به صورت

$$\phi(s) = 1 + s - s^2$$

است و یک به یک نیست؛ اما قضیه فوق برای هر (α, β) -متریک با تابع ϕ یک به یک برقرار است.

قضیه ۳.۳. فرض کنیم $(M, \langle, \rangle)$ خمینه ریمانی متقارن تعمیم یافته باشد. همچنین فرض کنیم $F = \alpha\phi(\frac{\beta}{\alpha})$ یک (α, β) -متریک تعریف شده به وسیله متریک ریمانی $\langle, \rangle$ و میدان برداری X باشد. در این صورت s -ساختار منظم $\{s_x\}$ از $(M, \langle, \rangle)$ یک s -ساختار منظم برای (M, F) است اگر و تنها اگر میدان برداری X به ازای هر $x \in M$ ، s_x پایا باشد.

اثبات. فرض کنیم s_x یک تقارن برای (M, F) در x باشد. آنگاه به ازای هر $p \in M$ و $Y \in T_p M$ داریم

$$\|Y\| \phi\left(\frac{\langle X_p, Y \rangle}{\|Y\|}\right) = \|(s_x)_* Y\| \phi\left(\frac{\langle X_{s_x(p)}, (s_x)_* Y \rangle}{\|(s_x)_* Y\|}\right),$$

از آنجا که $\{s_x\}$ یک تقارن از $(M, \langle, \rangle)$ و ϕ یک تابع یک‌به‌یک است مشابه اثبات قضیه قبل داریم

$$\langle X_p - (s_x)_{*p}^{-1} X_{s_x(p)}, Y \rangle = 0,$$

که نشان می‌دهد X ، به ازای هر $x \in M$ ، s_x پایا است.

برعکس، اگر X به ازای هر $x \in M$ ، s_x پایا باشد آنگاه به ازای هر $p \in M$ داریم

$$\begin{aligned} F(s_x(p), (s_x)_{*p} Y) &= \|(s_x)_{*p} Y\| \phi\left(\frac{\langle X_{s_x(p)}, (s_x)_{*p} Y \rangle}{\|(s_x)_{*p} Y\|}\right) \\ &= \|Y\| \phi\left(\frac{\langle (s_x)_{*p} X_p, (s_x)_{*p} Y \rangle}{\|Y\|}\right) \\ &= \|Y\| \phi\left(\frac{\langle X_p, Y \rangle}{\|Y\|}\right) = F(p, Y). \end{aligned}$$

□

اکنون تمام مقدمات لازم جهت اثبات نتیجه اصلی این مقاله مهیا است.

قضیه ۴.۳. هر فضای (α, β) - متریک متقارن تعمیم‌یافته با متریک $F = \alpha + \beta - \beta^2/\alpha$ ، یک خمینه ریمانی است.

اثبات. فرض کنیم (M, F) یک فضای (α, β) - متریک متقارن تعمیم‌یافته با متریک $F = \alpha + \beta - \beta^2/\alpha$ باشد که توسط متریک ریمانی $\langle, \rangle$ و میدان برداری X تعریف شده است. همچنین فرض کنیم $\{s_x\}$ - ساختار منظم متناظر با فضای (M, F) باشد. با توجه به قضیه ۱.۳ هر تقارن s_x از (M, F) یک تقارن از $(M, \langle, \rangle)$ است، بنابراین با توجه به قضیه ۲.۳، به ازای هر $Y \in T_x M$ داریم

$$\begin{aligned} F(x, (s_x)_{*x} Y) = F(s_x(x), (s_x)_{*x} Y) &= \|(s_x)_{*x} Y\| - \frac{\langle X_{s_x(x)}, (s_x)_{*x} Y \rangle^2}{\|(s_x)_{*x} Y\|} + \langle X_{s_x(x)}, (s_x)_{*x} Y \rangle \\ &= \|Y\| - \frac{\langle (s_x)_{*x} X_x, (s_x)_{*x} Y \rangle^2}{\|Y\|} + \langle (s_x)_{*x} X_x, (s_x)_{*x} Y \rangle \\ &= \|Y\| - \frac{\langle X_x, Y \rangle^2}{\|Y\|} + \langle X_x, Y \rangle = F(x, Y). \end{aligned}$$

با توجه به تساوی $F(x, Y) = F(x, (s_x)_{*x} Y)$ داریم

$$\|Y\| - \frac{\langle X_x, Y \rangle^2}{\|Y\|} + \langle X_x, Y \rangle = \|(s_x)_{*x} Y\| - \frac{\langle X_x, (s_x)_{*x} Y \rangle^2}{\|(s_x)_{*x} Y\|} + \langle X_x, (s_x)_{*x} Y \rangle,$$

با استفاده مجدد از قضیه ۱.۳ و کمی محاسبه رابطه زیر به دست می‌آید

$$(V) \quad \langle X_x, Y - (s_x)_{*x} Y \rangle (\|Y\| - \langle X_x, Y + (s_x)_{*x} Y \rangle) = 0.$$

فرض کنیم $Y \in T_x M$ ، $Y \neq 0$ چنان موجود باشد که $\langle X_x, Y - (s_x)_{*x} Y \rangle \neq 0$ ، در نتیجه برای $-Y$ نیز همین رابطه برقرار است؛ زیرا،

$$\langle X_x, -Y - (s_x)_{*x}(-Y) \rangle = -\langle X_x, Y - (s_x)_{*x} Y \rangle \neq 0.$$

اکنون با استفاده از رابطه V برای Y و $-Y$ داریم

$$\|Y\| - \langle X_x, Y + (s_x)_{*x} Y \rangle = 0,$$

و

$$\|Y\| + \langle X_x, Y + (s_x)_{*x} Y \rangle = 0.$$

دو رابطه اخیر نشان می‌دهند که $\|Y\| = 0$ متناقض با فرض $Y \neq 0$ است، در نتیجه به ازای هر $Y \in T_x M$ داریم

$$(A) \quad \langle X_x, Y - (s_x)_{*x}(Y) \rangle = \langle X_x, (Id_{T_x M} - (s_x)_{*x})(Y) \rangle = 0.$$

اما می‌دانیم $(s_x)_{*x}$ تبدیلی متعامد از $T_x M$ است که هیچ بردار ناصفری را ثابت نگه نمی‌دارد. بنابراین نگاشت $Id_{T_x M} - (s_x)_{*x}$ معکوس‌پذیر است. معکوس‌پذیر بودن نگاشت $Id_{T_x M} - (s_x)_{*x}$ به همراه رابطه ۸ ثابت می‌کند $X_x = 0$ ، و از آنجا که این تساوی به ازای هر $x \in M$ برقرار است بنابراین $X = 0$. در نتیجه به ازای هر $x \in M$ و $Y \in T_x M$ داریم $F(x, Y) = \|Y\|$ ، که نشان می‌دهد F ریمانی است.

□

با توجه به قضیه فوق هیچ فضای متقارن تعمیم‌یافته نابديهی مجهز به (α, β) -متریک $F = \alpha + \beta - \beta^2/\alpha$ وجود ندارد.

۴. تشکر و قدردانی

از داور گرامی بخاطر نظرات اصلاحی ایشان که باعث بهبود نحوه ارائه مطالب گردید سپاسگزارم.

مراجع

- [1] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [2] G. S. Asanov, *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1985.
- [3] S. Bacso, X. Cheng and Z. Shen, Curvature properties of (α, β) -metrics, *Adv. Stud. Pure Math.*, **48** (2007) 73–110.
- [4] D. Bao, S. S. Chern, and Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [5] S. Deng and Z. Hou, The group of isometries of a Finsler space, *Pacific J. Math.* **207** (2002) 149–155.
- [6] P. Habibi and A. Razavi, On generalized symmetric Finsler spaces, *Geom. Dedicata*, **149** (2010) 121–127.
- [7] O. Kowalski, *Generalized Symmetric Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, **805**, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [8] A. J. Ledger and M. Obata, Affine and Riemannian s -manifolds, *J. Differential Geometry*, **2** (1968) 451–459.
- [9] M. Matsumoto, On C -reducible Finsler spaces, *Tensor (N. S.)*, **24** (1972) 29–37.
- [10] G. Randers, On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity, *Phys. Rev.*, **59** (1941) 195–199.
- [11] GR. Tsagas and A. Ledger, Riemannian S -manifolds, *J. Differential Geometry*, **12** (1977) 333–343.

حمید رضا سلیمی مقدم

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

hr.salimi@sci.ui.ac.ir

حمید رضا سلیمی مقدم متولد شهر تهران است. وی در سال ۱۳۸۶ در مقطع دکتری از دانشگاه علم و صنعت ایران دانش آموخته شد و در همان سال جذب گروه ریاضی محض دانشگاه صنعتی شاهرود گردید. در سال ۱۳۹۰ او به عنوان هیات علمی به عضویت گروه ریاضی دانشگاه اصفهان در آمد.

