

تحلیل، تعمیم و کاربردی از حدس کولاتس

محسن فتحی آقبلاغ مصطفی خان و عاطفه حسن زاده*

چکیده. در این مقاله به بررسی و تحلیل حدس کولاتس می‌پردازیم. در واقع، به روش عددی و آنالیز گام‌به‌گام اعداد سعی می‌کنیم منشأ این حدس را که درباره خاصیتی جالب بین اعداد اول است بیابیم. همچنین با یافتن روابط دیگری میان اعداد اول حدس کولاتس را تعمیم می‌دهیم و الگوریتمی جامع برای آن ارائه می‌کنیم. در پایان، از این حدس برای شناسایی و یافتن اعداد اول دوقلوی بزرگ استفاده می‌کنیم.

۱. مقدمه

حدس کولاتس یکی از حدس‌های حل‌نشده در ریاضیات و در حوزه دستگاه‌های دینامیکی گسسته است. حدس کولاتس رابطه‌ای ریاضی یا فرمولی که از بحث‌های منطقی به‌دست آمده باشد نیست؛ این حدس صرفاً رابطه‌ای میان اعداد اول است که به افتخار لوتار کولاتس^۱، ریاضیدان آلمانی، که آن را در سال ۱۹۳۷ مطرح کرد، حدس کولاتس نام گرفته است. این حدس، به اسم حدس $3n+1$ نیز معروف است. این حدس همچون یک سرگرمی تک نفره است: یک عدد را به تصادف انتخاب کن، اگر عدد انتخابی زوج بود، آن را بر دو تقسیم کن و در صورت فرد بودن، سه برابر آن را با یک جمع کن و حالا این کار را دوباره تکرار کن. حدس کولاتس بیان می‌کند که با هر عددی که شروع کنیم انجام متوالی این عملیات در نهایت ما را به عدد یک می‌رساند [۸، ۹].

تحقیقات بسیاری در مورد حدس کولاتس انجام شده است که هریک ویژگی‌های خاصی از این مسئله را بررسی کرده‌اند [۸]. مثلاً بررسی‌هایی درباره محاسبه زمان توقف بازی در حدس کولاتس صورت گرفته است [۱۰]. همچنین محققان به یافتن اعداد صحیح متوالی که دارای زمان توقف برابر باشند پرداخته‌اند [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴].

در این مقاله يك الگوریتم کارآمد برای محاسبه تعداد تکرار تابع کولاتس (به‌صورت فراخوانی بازگشتی) ارائه می‌کنیم و مقایسه‌ای بین این الگوریتم و معیارهای موجود نیز انجام می‌دهیم [۱، ۵]. در جای دیگر با وارد کردن توابع ایجادکننده فراخوانی، فرمول بازگشتی خطی خاصی به‌دست آمده است و با بررسی خواص آن نتیجه گرفته شده است که حدس

عبارات و کلمات کلیدی: حدس کولاتس، اعداد اول، الگوریتم رشد و هرس، زوج‌های دوقلو

دبیر تخصصی رابط: جواد اسدالهی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۴/۰۱

نوع مقاله: ترویجی

*نویسنده مسئول مقاله

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.123903.1370>

¹L. Collatz (1910-1990)

کولاتس نام دو مسئله تحلیلی معادل، یکی در رابطه با ویژگی‌های منطقی برخی توابع مولد و دیگری مرتبط با مجموعه راه‌حل‌های يك معادله عملگری خطی، است [۳]. در زمینه بررسی چرخه اعداد ایجاد شده در این حدس و تعمیم این حدس نیز تحقیقاتی انجام شده است [۶، ۷، ۴، ۲].

پژوهش حاضر منطبق بر سیر فکری کولاتس در این حدس صورت گرفته است و بنابراین نه تنها به درک این نوع جستجوی چرخه اعداد کمک می‌کند، بلکه روابط دیگری را بین اعداد اول آشکار می‌سازد. اساساً طی کردن مسیری که کولاتس را به این حدس رساند ممکن است در حل مسائل حل نشده دیگری که به رابطه بین اعداد اول ارتباط پیدا می‌کند، از جمله حدس اعداد اول دوقلو، مفید باشد.

ساختار این مقاله به این شرح است: ابتدا به معرفی حدس کولاتس و تحلیل آن می‌پردازیم. نتایج و چالش‌های برآمده از تحلیل حدس کولاتس و موارد مشابه دیگر را نیز بیان کرده‌ایم. در ادامه، توسعه حدس کولاتس و کاربرد آن در تحلیل اعداد اول دوقلو را بررسی کرده‌ایم و نتایج حاصل را به صورت جدول و شکل خلاصه کرده‌ایم.

۲. بررسی حدس کولاتس

عددی طبیعی به دلخواه انتخاب کنید و مطابق دستور زیر عدد دیگری به دست آورید

$$(1) \quad f(n) = \begin{cases} 3n+1 & n=2k+1 \\ \frac{n}{2} & n=2k; \end{cases}$$

یعنی اگر آن عدد زوج بود آن را تقسیم بر دو و اگر عدد فرد بود سه برابر آن عدد را با يك جمع کنید. حالا این کار را با عدد به دست آمده ادامه دهید. حدس کولاتس می‌گوید صرف نظر از انتخاب عدد اولیه این فرایند به عدد ۱ منتهی می‌شود.

چند ویژگی ظاهری تابع بالا از این قرار است:

(۱) اعداد ۲ و ۳ هر دو عدد اول‌اند و دارای اختلافی برابر با يك (همان عدد انتهایی حدس)‌اند.

(۲) اعداد ۲ و ۳ تنها اعداد اول متوالی‌اند.

(۳) از آنجایی که تابع $3n+1$ ، اعداد فرد را به عنوان ورودی می‌پذیرد، با توجه به رابطه

$$3(2k+1)+1=6k+3+1=6k+4=2(3k+2)=2k \quad (k \in \mathbb{N})$$

خروجی آن با خروجی اعداد زوج برابر است.

(۴) در تابع $\frac{n}{2}$ ، با توجه به اینکه اعداد ورودی آن زوج است، اگر دارای خروجی فرد باشد، برای ادامه فرایند

از تابع $3n+1$ استفاده می‌شود و اگر دارای خروجی زوج باشد، از تابع $\frac{n}{2}$ استفاده می‌شود. این حالت تا زمانی ادامه می‌یابد که به خروجی فرد برسیم و بعد از آن باید در تابع $3n+1$ جانشانی شود و یا اینکه عدد ورودی توانی از دو باشد که در نهایت با انجام این فرایند به عدد يك می‌رسد؛ همان عددی که حدس کولاتس پیش‌بینی می‌کند.

(۵) حدس کولاتس در واقع با ضرب کردن اعداد فرد در عدد ۳ و جمع کردن این اعداد با عدد ۱ و تبدیل آن‌ها به عدد زوج به دنبال رسیدن به توان‌هایی از عدد ۲ است، این توان دو در تقسیم‌های متوالی بر ۲ در نهایت به عدد ۱ می‌رسند.

با توجه به مطالب فوق، معادله

$$3n+1=2^c$$

به دست می‌آید که با توجه به تساوی

$$\ln(3n+1) = \ln 2^c = c \ln 2$$

رابطه

$$(2) \quad c = \frac{\ln(3n+1)}{\ln 2}$$

به دست می‌آید. نتایج مربوط به بررسی رابطه (۲) به ازای برخی اعداد طبیعی فرد در جدول ۱ خلاصه شده است.

جدول ۱: رابطه بین پارامتر c و اعداد فرد در معادله (۲)

پارامتر c	عدد فرد
۲	۱
۳/۳۲۱۹۲۸	۳
۴	۵
۴/۴۵۹۴۳۲	۷
۴/۴۸۰۷۳۵۵	۹
۵/۰۸۷۴۶۳	۱۱
۵/۳۲۱۹۲۸	۱۳
۵/۵۲۳۵۶۲	۱۵
۵/۷۰۰۴۴	۱۷
۵/۸۵۷۹۸۱	۱۹

با توجه به نتایج به دست آمده برای عدد c ، می‌توان دریافت که اعداد فرد پس از قرارگیری در تابع $3n+1$ تنها به توان‌های زوج از عدد دو می‌رسند. بنابراین لازم است که معکوس فرآیند نیز ارزیابی شود؛ یعنی ابتدا توان‌های دو را به دست آوریم و سپس درستی رابطه

$$(3) \quad 2^c - 1 = 3n$$

بررسی شود؟ نتایج این بررسی در جدول ۲ خلاصه شده است. مطابق جدول ۲، تنها توان‌های زوج عدد دو در رابطه (۳) صدق می‌کنند. از دیگر ویژگی‌های جدول ۲ این است که حاصل جمع توان‌های فرد عدد ۲ با عدد ۱ نیز مضربی از سه است.

جدول ۲: رابطه بین n و پارامتر c مندرج در معادله (۳)

c	2^c	$\frac{2^c-1}{3}$	$\frac{2^c+1}{3}$
۱	۲	۰/۳۳۳۳۳۳۳۳	۱
۲	۴	۱	۱/۶۶۶۶۶۶۶۶۷
۳	۸	۲/۳۳۳۳۳۳۳۳	۳
۴	۱۶	۵	۵/۶۶۶۶۶۶۶۶۷
۵	۳۲	۱۰/۳۳۳۳۳۳۳۳	۱۱
۶	۶۴	۲۱	۱/۶۶۶۶۶۶۶۶۷
۷	۱۲۸	۴۲/۳۳۳۳۳۳۳۳	۴۳
۸	۲۵۶	۸۵	۸۵/۶۶۶۶۶۶۶۶۷
۹	۵۱۲	۱۷۰/۳۳۳۳۳۳۳۳	۱۷۱
۱۰	۱۰۲۴	۳۴۱	۳۴۱/۶۶۶۶۶۶۶۶۷

از آنجایی که اعداد فرد فاقد عامل دو در تجزیه خود هستند، برای تبدیل شدن به یک عدد زوج (به منظور به وجود آمدن عامل ۲ در تجزیه آن)، باید به صورت $2^c - 1$ یا $2^c + 1$ در بیایند. در واقع در فرآیند حدس کولاتس، اعداد فرد پس از جمع بستن با عدد ۱ تبدیل به یک عدد زوج می شوند و در این مرحله با تقسیم این عدد زوج به عدد ۲ عامل های زوج ایجاد شده در تجزیه عدد فرد ورودی حذف می شود. این روند تا زمانی ادامه می یابد که تمامی عامل های موجود در دنباله اعداد حاصل از عدد فرد ورودی ۲ باشند و این به معنای رسیدن به توانی از ۲ در خروجی تابع $3n + 1$ است و باید عدد بعدی از طریق تابع $\frac{n}{4}$ محاسبه شود و بنابراین تابع $\frac{n}{4}$ به اندازه توان عدد ۲ تکرار می شود.

با توجه به بحث اخیر، حدس کولاتس را حدس توان ۲ هم نامگذاری کرده اند و عدد اولیه انتخابی را مبدأ حرکت، عدد ۲ مقصد و عدد ۳ تعقیب کننده خوانده می شود. باید توجه کرد که در این فرایند اعدادی که در تابع $3n + 1$ قرار می گیرند، همگی اعداد اول اند اما اعداد اول تصادفی نیستند. به عبارت دیگر، اگر عدد انتخابی در بازه $(2^{2k}, 2^{2l})$ بین هر دو توان زوج از عدد ۲ باشد، در طول عملیات حدس کولاتس ورودی تابع $3n + 1$ اعداد اول خواهد بود. البته استثنایی وجود دارد و مثلاً اگر عدد انتخابی به صورت $(2^{2k} - 1)/3$ عدد ۵ باشد، عملیات در یک مرحله به یک توان زوج از عدد ۲ می رسد و حدس مطابق معادله

$$\text{پایان} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \text{زوج} \rightarrow 16 = (3 \times 5) + 1 \rightarrow \text{فرد} \rightarrow 5$$

به پایان می رسد و اگر عدد انتخابی ۷ باشد، حدس به صورت

$$16 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 20 \rightarrow 40 \rightarrow 13 \rightarrow 26 \rightarrow 52 \rightarrow 17 \rightarrow 34 \rightarrow 11 \rightarrow 22 \rightarrow 7$$

$$\text{پایان} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$$

خاتمه می یابد. این اعداد بین دو توان زوج ۴ و ۱۶ از عدد ۲ قرار دارند. برای تبدیل عدد ۷ به عدد ۲۲ باید عدد توسط تابع $3n + 1$ رشد یابد و برای تبدیل عدد ۲۲ به عدد ۱۱ باید توسط تابع $\frac{n}{4}$ هرس شود. در کل، این دو حرکت توانمان رشد و هرس برای رسیدن اعداد به توانی از عدد ۲ لازم است.

۳. صورت‌های مشابه حدس کولاتس

بررسی اعداد اول دیگر به غیر از اعداد اول ۲ و ۳ در حدس کولاتس خالی از لطف نیست. برای اعداد ۳ و ۵ دستور زیر دنباله اعداد موردنظر را تولید می‌کند

$$(۴) \quad f(n) = \begin{cases} 5n + 1 & n = 2k + 1 \\ n & n = 2k \\ 3 & \end{cases}$$

نتایج مربوط در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳: رابطه بین n و توان‌های ۳ مندرج در معادله (۴)

n	$\frac{3^n+2}{5}$	$\frac{3^n-2}{5}$
۱	۱	۰/۲
۲	۲/۲	۱/۴
۳	۵/۸	۵
۴	۱۶/۶	۱۵/۸
۵	۴۹	۴۸/۲
۶	۱۴۶/۲	۱۵۴/۴
۷	۴۳۷/۸	۴۳۷
۸	۱۳۱۲/۶	۱۳۱۱/۸
۹	۳۹۳۷	۳۹۳۶/۲
۱۰	۱۱۸۱۰/۲	۱۱۸۰۹/۴
۱۱	۳۵۴۲۹/۸	۳۵۴۲۹
۱۲	۱۰۶۲۸۸/۶	۱۰۶۲۸۷/۸
۱۳	۳۱۸۸۶۵	۳۱۸۸۶۴/۲
۱۴	۹۵۶۵۹۴/۲	۹۵۶۵۹۳/۴
۱۵	۲۸۶۹۷۸۱/۸	۲۸۶۹۷۸۱
۱۶	۸۶۰۹۳۴۴/۶	۸۶۰۹۳۴۳/۸
۱۷	۲۵۸۲۸۰۳۳	۲۵۸۲۸۰۳۲/۲
۱۸	۷۷۴۸۴۰۹۸/۲	۷۷۴۸۴۰۹۷/۴
۱۹	۲۳۲۴۵۲۲۹۳/۸	۲۳۲۴۵۲۲۹۳
۲۰	۶۹۷۳۵۶۸۸۰/۶	۶۹۷۳۵۶۸۷۹/۸

و برای اعداد ۵ و ۷ نیز ضابطه مناسب به شکل زیر است

$$(۵) \quad f(n) = \begin{cases} 7n + 1 & n = 5k + 1 \\ n & n = 5k \\ 5 & \end{cases}$$

و نتایج آن در جدول ۴ خلاصه شده است.

مشاهده می شود که هر چه اعداد اول انتخابی بزرگ تر می شوند، فاصله بین توان های عدد اول انتخابی از یکدیگر بیشتر می شود.

جدول ۴: رابطه بین n و توان های ۵ مندرج در معادله (۵)

n	$\frac{5^n+2}{5}$	$\frac{5^n-2}{5}$
۱	۱	۰/۴۲۸۵۷۱۴۲۹
۲	۳/۸۵۷۱۴۲۸۵۷	۳/۲۸۵۷۱۴۲۸۶
۳	۱۸.۱۴۲۸۵۷۱۴	۱۷/۵۷۱۴۲۸۵۷
۴	۸۹/۵۷۱۴۲۸۵۷	۸۹
۵	۴۴۶/۷۱۴۲۸۵۷	۴۴۶/۱۴۲۸۵۷۱
۶	۲۲۳۲/۴۲۸۵۷۱	۲۲۳۱/۸۵۷۱۴۳
۷	۱۱۱۶۱	۱۱۱۶۰/۴۲۸۵۷
۸	۵۵۸۰۳/۸۶۷۱۴	۵۵۸۰۳/۲۸۵۷۱
۹	۲۷۹۰۱۸/۱۴۲۹	۲۷۹۰۱۷/۵۷۱۴
۱۰	۱۳۹۵۰۸۹/۵۷۱	۱۳۹۵۰۸۹
۱۱	۶۹۷۵۴۴۶/۷۱۴	۶۹۷۵۴۴۶/۱۴۳
۱۲	۳۴۸۷۷۲۳۲/۴۳	۳۴۸۷۷۲۳۱/۸۶
۱۳	۱۷۴۳۸۶۱۶۱	۱۷۴۳۸۶۱۶۰/۴
۱۴	۸۷۱۹۳۰۸۰۳/۹	۸۷۱۹۳۰۸۰۳/۳

۴. نتایج و سوالاتی درباره حدس کولاتس

از تحلیل حدس کولاتس نتیجه می گیریم که:

- (۱) حدس کولاتس به ویژگی های اعداد اول ارتباط دارد.
- (۲) حدس کولاتس علاوه بر اعداد اول ۲ و ۳ ممکن است برای اعداد اول دیگری مانند a و b (با شرط $a > b$)، و برای تعداد محدودی از اعداد n و شاید برای تمامی اعداد n با دستور

$$(۶) \quad f(n) = \begin{cases} an + (a - b) & n = 2k + 1 \\ \frac{n}{b} & n = 2k \end{cases}$$

صادق باشد. البته معادله (۶) گره های کوری در بعضی اعداد دارد که در آن ها چرخه هایی ایجاد می شود که منجر به تولید اعداد تکراری می شود و هیچگاه این فرآیند به پایان نمی رسد. بنابراین این حدس ممکن است يك حدس مناسب برای دسته ای از اعداد باشد و به ازای آن ها برقرار باشد.

- (۳) حدس کولاتس يك تبدیل کننده اعداد فرد به اعداد زوج در طی يك فرآیند هوشمندانه است.
- (۴) در طی فرآیند این حدس تمامی اعدادی که در تابع $3n + 1$ قرار می دهیم اعداد اول اند.
- (۵) اگر در طی فرآیند حدس کولاتس به ازای عددی به توان زوجی از عدد ۲ برسیم این حدس برای آن عدد برقرار است.

(۶) در حدس کولاتس دو خاصیت رشد و هرس به ترتیب توسط دو تابع $3n + 1$ و $\frac{n}{2}$ انجام می شود.

سوالات مطرح در مورد حدس کولاتس عبارت‌اند از:

- (۱) چه رابطه‌ای بین اعداد اولی که در طی فرایند حدس به دست می‌آیند و اعداد اول به کار رفته در ضابطه مولد حدس کولاتس وجود دارد؟
 - (۲) چه رابطه‌ای بین بیشتر شدن فاصله توان‌های کوچک‌ترین عدد اول صادق در حدس با اعداد انتخابی وجود دارد؟
- توجه کنید که در حدس کولاتس فقط توان‌های زوج عدد ۲ در حدس صدق می‌کرد و در دو صورت تعمیم یافته حدس یعنی ۳ و ۵ توان‌های ۳ به صورت سه در میان صدق می‌کردند.

۵. تعمیم حدس کولاتس

اکنون با توجه به این نکته که بعضی وقت‌ها آگاهی از علل طرح پرسشی شاید دست‌یابی به پاسخ آن را ساده‌تر کند، به بررسی منشأ این حدس می‌پردازیم. نتایج حاصل از حدس کولاتس را می‌توان به صورت معادله

$$f(n) = \begin{cases} 2^n + 1 = 3m & n = 2k + 1 \\ 2^n - 1 = 3l & n = 2k \end{cases}$$

و معادله

$$(۷) \quad f(n) = \begin{cases} 5^n + 2^n = 7m & n = 2k + 1 \\ 5^n - 2^n = 7l & n = 2k \end{cases}$$

بازنویسی کرد که در آن $m, n, k, l \in \mathbb{N}$. در حالت کلی اگر a و b دو عدد اول با شرط $a > b$ باشند و $d = a - b$ ، در این صورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطه

$$(۸) \quad f(n) = \begin{cases} b^n + d^n = am & n = 2k + 1 \\ b^n - d^n = al & n = 2k \end{cases}$$

برقرار است. این اعداد بر روی شمارنده‌ها عمل می‌کنند و مسئله زمانی حل می‌شود که تمام شمارنده‌ها دارای مخرج برابر در تقسیم‌ها باشند، لذا در ضمن تقسیم‌های متوالی، تمامی این روابط به عدد ۱ خواهند رسید. عدد ۱ به منزله خاتمه فرایند بوده و درواقع نشان‌دهنده نقطه پایانی روندی است که در طی آن توانی از عدد اول، یعنی b ، را بتوان مطابق رابطه (۷) تولید کرد.

حدس کولاتس يك خاصیت از چندین خاصیت این مجموعه از اعداد است؛ اما مزیت و برتری آن بر تمامی حالت‌های (۸) این است که فاصله اعداد اول مورد استفاده در این حدس یعنی $d = 3 - 2 = 1$ مطابق معادله

$$(۹) \quad f(n) = \begin{cases} 2^n + 1^n = 3m & n = 2k + 1 \\ 2^n - 1^n = 3l & n = 2k \end{cases}$$

با نقطه پایانی برابر است. همچنین چون هر توانی از این اختلاف عدد یک است، در هر مرحله از زوج کردن عدد انتخابی، توان‌هایی از اختلاف که باید اضافه و یا کم شوند همواره منجر به عدد یک خواهد شد. این در حالی است که در اعداد اول دیگری به غیر از ۲ و ۳، یعنی در معادله کلی (۸)، در هر مرحله باید تشخیص داده شود که چه توان زوجی از اختلاف دو عدد اول به عدد به دست آمده از حاصل ضرب عدد دوم در عدد انتخابی اضافه و یا کم شود.

جدول ۵: نحوه چیدمان اعداد در فرمول اصلاح شده (۸) و مطابقت آن با چیدمان اعداد در جدول های حدس کولاتس (۲)

n	$\frac{3^n - 2^n}{5}$	$\frac{3^n + 2^n}{5}$
۱	۰/۲	۱
۲	۱	۲/۶
۳	۳/۸	۷
۴	۱۳	۱۹/۴
۵	۴۲/۲	۵۵
۶	۱۳۳	۱۵۸/۶
۷	۴۱۱/۷	۴۶۳
۸	۱۲۶۱	۱۳۶۳/۴
۹	۳۸۳۴/۲	۴۰۳۹
۱۰	۱۱۶۰۵	۱۲۰۱۴/۶

جدول ۶: نحوه چیدمان اعداد در فرمول اصلاح شده (۸) و مطابقت آن با چیدمان اعداد در جدول های حدس کولاتس (۳)

n	$\frac{5^n - 2^n}{5}$	$\frac{5^n + 2^n}{5}$
۱	۰/۴۲۸۵۷۱۴۲۹	۱
۲	۳	۴/۱۴۲۸۵۷۱۴۳
۳	۱۶/۷۱۴۲۸۵۷۱	۱۹
۴	۸۷	۹۱/۵۷۱۴۲۸۵۷
۵	۴۴۱/۸۵۷۱۴۲۹	۴۵۱
۶	۲۲۲۳	۲۲۴۱/۲۸۵۷۱۴
۷	۱۱۱۴۲/۴۲۸۵۷	۱۱۱۷۹
۸	۵۵۷۶۷	۵۵۸۴۰/۱۴۲۸۶
۹	۷۱۴۳/۲۷۸۹۴۴	۲۷۹۰۹۱
۱۰	۱۳۹۴۹۴۳	۱۳۹۵۲۳۵/۵۷۱
۱۱	۶۹۷۵۱۵۳/۸۵۷	۶۹۷۵۷۳۹
۱۲	۳۴۸۷۶۶۴۷	۳۴۸۷۷۸۱۷/۲۹

در جدول های ۵ و ۶ نحوه چیدمان اعداد در معادله اصلاح شده (۸) و مطابقت آن با چیدمان اعداد در جدول های حدس کولاتس برای اعداد ۳ و ۵ و سپس برای اعداد ۵ و ۷ آمده است.

به وضوح می توان همخوانی جدول ها و معادله (۸) را با جدول به دست آمده از حدس کولاتس و روابط (۴) و (۵) دریافت. بنابراین حدس کولاتس برگرفته از یک رابطه توانی میان اعداد اول بوده و در اصل یک حالت ویژه از این خاصیت است. اما نکته قابل توجه در مورد این حدس در توان های بزرگ n مشاهده می شود و آن این است که شرط توان زوج و فرد از بین می رود و هر دو رابطه (۴) و (۵) برای تمامی توان ها صادق است؛ نتایج در جدول ۷ برای توان های ۲۱ تا ۳۰ خلاصه شده است.

جدول ۷: معادله‌های کولاتس (۴) و (۵) برای توان‌های ۲۰ تا ۳۰

n	$\frac{3^n - 2^n}{5}$	$\frac{3^n + 2^n}{5}$	$\frac{5^n - 2^n}{7}$	$\frac{5^n + 2^n}{7}$
۲۱	$1/0.46E + 10$	$1/0.462E + 10$	2.91651210	2.9249007
۲۲	$3/138E + 10$	$3/385 + 10$	62753730.61	62770.50783
۲۳	$9/413E + 10$	$9/4152E + 10$	188269580.44	18830.313487
۲۴	$2/824E + 10$	$2/8245E + 11$	56482551853	56489262739
۲۵	$8/473E + 11$	$8/4732E + 11$	$1/69451E + 11$	$1/69464E + 11$
۲۶	$2/542E + 12$	$2/5419E + 12$	$5/0836E + 11$	$5/08387E + 11$
۲۷	$7/625E + 12$	$7/6257E + 12$	$1/52509E + 12$	$1/52515E + 12$
۲۸	$2/288E + 13$	$2/2877E + 13$	$2/5753E + 12$	$2/E + 1257541$
۲۹	$6/863E + 13$	$6/8631E + 13$	$1/3726E + 13$	$1/37263E + 13$
۳۰	$2/059E + 14$	$2/0589E + 14$	$4/1178E + 13$	$4/1178E + 13$

۶. کاربرد حدس کولاتس در تحلیل اعداد اول دوقلو

اعداد اولی را که دارای اختلاف ۲ باشند اعداد اول دوقلو یا زوج‌های دوقلو می‌نامند، مانند اعداد ۳ و ۵ یا اعداد ۱۱ و ۱۳. بزرگ‌ترین اعداد اول دوقلوی کشف شده اعداد ۳۸۸۳۴۲ رقمی $1 \pm 290000 \times 2996863034895$ هستند. البته هنوز برای سؤالات زیر در مورد اعداد دوقلو پاسخی یافت نشده است:

(۱) آیا بی‌نهایت عدد اول دوقلو وجود دارد؟

(۲) آیا رابطه‌ای برای به‌دست آوردن اعداد اول دوقلو وجود دارد؟

معادله (۸) از حدس کولاتس به‌ازای $a > b$ را می‌توان به‌صورت

$$\begin{cases} b^n + (a - b)^n = am, & n = 2k + 1 \\ b^n - (a - b)^n = al, & n = 2k \end{cases}$$

بیان نمود که برای اعداد اول دوقلو $d = b - a = 2$ و می‌توان آنرا به‌صورت

$$\begin{cases} b^n + 2^n = (b + 2)m, & n = 2k + 1 \\ b^n - 2^n = (b + 2)l, & n = 2k \end{cases}$$

بازنویسی کرد. حالا می‌توان m و l را از معادله

$$\begin{cases} b^{2k+1} + 2^{2k+1} = (b + 2)m, & n = 2k + 1 \\ b^{2k} - 2^{2k} = (b + 2)l, & n = 2k \end{cases}$$

به صورت

$$(10) \quad m = \frac{b^{2k+1} + 2^{2k+1}}{b + 2}, \quad l = \frac{b^{2k} - 2^{2k}}{b + 2}$$

به دست آورد. همچنین می توان b را به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m}{l} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^{2k+1} + 2^{2k+1}}{b+2}}{\frac{b^{2k} - 2^{2k}}{b+2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+1} + 2^{2k+1}}{b^{2k} - 2^{2k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+1}}{b^{2k} - 2^{2k}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k+1}}{b^{2k} - 2^{2k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} b + 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k}}{b^{2k}} \\ &= b + 0 \\ &= b.\end{aligned}$$

پس برای اعداد دوقلوی بسیار بزرگ داریم

$$\frac{m}{l} \sim b \quad (k \rightarrow \infty).$$

توجه کنید که اعداد اول دوقلو معمولاً بسیار بزرگ اند پس $b \gg 2$ و لذا $b^{2k} \gg 2^{2k}$.
در ادامه چند حالت خاص برای اعداد بسیار بزرگ (یعنی $b \gg 2$) را بررسی می کنیم.
• گیریم k زوج باشد، برای دو مقدار k و $k+1$ می توان m_1 و l_1 را از دستگاه زیر یافت

$$\begin{cases} b^{2k+1} + 2^{2k+1} = (b+2)m_1 \\ b^{2k} - 2^{2k} = (b+2)l_1 \end{cases}$$

پس

$$\begin{cases} b^{2(k+1)+1} + 2^{2(k+1)+1} = (b+2)m_1 \\ b^{2k} - 2^{2k} = (b+2)l_1 \end{cases}$$

و بنابراین

$$\begin{cases} b^{2k+3} + 2^{2k+3} = (b+2)m_1 \\ b^{2k} - 2^{2k} = (b+2)l_1 \end{cases}$$

در نتیجه

$$(11) \quad m_1 = \frac{b^{2k+3} + 2^{2k+3}}{b+2}, \quad l_1 = \frac{b^{2k} - 2^{2k}}{b+2}.$$

لذا برای اعداد بزرگ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_1}{l_1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^{2k+3} + 2^{2k+3}}{b+2}}{b^{2k} - 2^{2k}} \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+3} + 2^{2k+3}}{b^{2k} - 2^{2k}} \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+3}}{b^{2k} - 2^{2k}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k+3}}{b^{2k} - 2^{2k}} \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k}}{b^{2k}} \\&= b^3 + 0 \\&= b^3\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\frac{m_1}{l_1} \sim b^3 \quad (k \rightarrow \infty).$$

• گیریم k فرد باشد، برای دو مقدار k و $k+1$ می‌توان m_2 و l_2 را از دستگاه زیر یافت

$$\begin{cases} b^{2k+1} + 2^{2k+1} = (b+2)m_2 \\ b^{2k} - 2^{2k} = (b+2)l_2 \end{cases}$$

پس

$$\begin{cases} b^{2k+1} + 2^{2k+1} = (b+2)m_2 \\ b^{2(k+1)} - 2^{2(k+1)} = (b+2)l_2 \end{cases}$$

و بنابراین

$$\begin{cases} b^{2k+1} + 2^{2k+1} = (b+2)m_2 \\ b^{2k+2} - 2^{2k+2} = (b+2)l_2 \end{cases}$$

در نتیجه

$$(۱۲) \quad m_2 = \frac{b^{2k+1} + 2^{2k+1}}{b+2}, \quad l_2 = \frac{b^{2k+2} - 2^{2k+2}}{b+2}.$$

لذا برای اعداد بزرگ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_2}{l_2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^{2k+1} + 2^{2k+1}}{b+2}}{\frac{b^{2k+2} - 2^{2k+2}}{b+2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+1} + 2^{2k+1}}{b^{2k+2} - 2^{2k+2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+1}}{b^{2k+2} - 2^{2k+2}} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k+1}}{b^{2k+2} - 2^{2k+2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+1}}{b^{2k+2}} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k+1}}{b^{2k+2}} \\ &= \frac{1}{b} + 0 \\ &= \frac{1}{b}\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\frac{m_2}{l_2} \sim \frac{1}{b} \quad (k \rightarrow \infty).$$

گیریم

• k فرد باشد، برای دو مقدار k و $k+2$ می توان m_1 و m_2 را از دستگاه زیر یافت

$$\begin{cases} b^{2k+3} + 2^{2k+3} = (b+2)m_1 \\ b^{2k+1} - 2^{2k+1} = (b+2)m_2 \end{cases}$$

پس

$$(۱۳) \quad m_1 = \frac{b^{2k+3} + 2^{2k+3}}{b+2}, \quad m_2 = \frac{b^{2k+1} - 2^{2k+1}}{b+2}.$$

لذا برای اعداد بزرگ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_1}{m_2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^{2k+3} + 2^{2k+3}}{b+2}}{\frac{b^{2k+1} - 2^{2k+1}}{b+2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+3} + 2^{2k+3}}{b^{2k+1} - 2^{2k+1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{2k+3}}{b^{2k+1} - 2^{2k+1}} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k+3}}{b^{2k+1} - 2^{2k+1}} \\ &= b^2 + 0 \\ &= b^2\end{aligned}$$

پس

$$\frac{m_1}{m_2} \sim b^2 \quad (k \rightarrow \infty)$$

• گیریم k زوج باشد، برای دو مقدار k و $k+2$ می‌توان l_1 و l_2 را از دستگاه زیر یافت

$$\begin{cases} b^{4k} + 2^{4k} = (b+2)l_1 \\ b^{2k+1} - 2^{2k+1} = (b+2)l_2 \end{cases}$$

پس

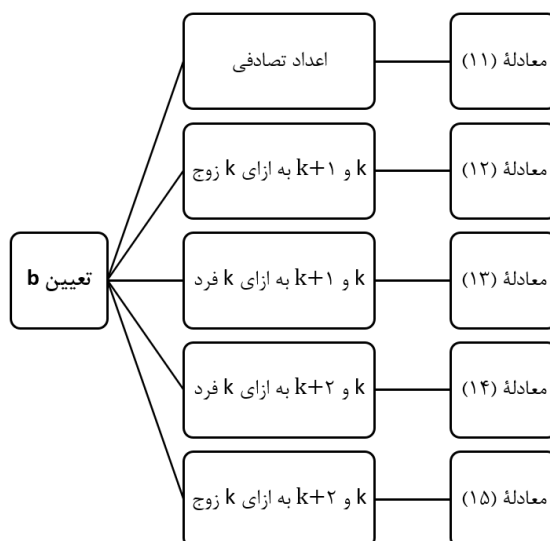
$$(14) \quad l_1 = \frac{b^{4k} + 2^{4k}}{b+2}, \quad l_2 = \frac{b^{4k} - 2^{4k}}{b+2}.$$

در نتیجه برای اعداد بزرگ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l_1}{l_2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^{4k} + 2^{4k}}{b+2}}{\frac{b^{4k} - 2^{4k}}{b+2}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{4k} + 2^{4k}}{b^{4k} - 2^{4k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b^{4k}}{b^{4k} - 2^{4k}} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{4k}}{b^{4k} - 2^{4k}} \\ &= b^2 - 0 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

و بنابراین

$$\frac{l_1}{l_2} \sim b^2 \quad (k \rightarrow \infty).$$



شکل ۱: روش‌های تعیین اعداد دوقلوی بزرگ

تمامی این خاصیت‌های به‌دست آمده که در شکل ۱ خلاصه شده است. برای تمامی اعداد اول بزرگ به‌ازای a و b و با این شرط که $b > d = a - b$ برقرار خواهد بود. به این ترتیب اگر بتوان رابطه‌هایی بین b و k به‌ازای $k \in \mathbb{N}$ به‌دست آورد، آنگاه به‌ازای هر k می‌توان b را یافت و از روی آن $a = b + ۲$ نیز تعیین می‌شود.

۷. تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند مراتب قدردانی و سپاسگزاری خود را از سردبیر محترم، داوران محترم و هیات تحریریه محترم نشریه وزین ریاضی و جامعه که با ارائه نقطه‌نظرات سازنده و داوری دقیق و موشکافانه زمینه ارتقای نوشته حاضر را فراهم آورده‌اند، اعلام نمایند.

مراجع

- [1] S. Andrei and C. Masalagiu, About the Collatz conjecture, *Acta Inform.*, **35** (1998) 167–179.
- [2] A. M. Ben-Amram, Mortality of iterated piecewise affine functions over the integers: decidability and complexity, *Computability*, **4** (2015) 19–56.
- [3] L. Berg and G. Meinardus, Functional equations connected with the Collatz problem, *Results Math.*, **25** (1994) 1–12.
- [4] S. Eliahou, The $\forall x + ۱$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, *Discrete Math.*, **118** (1993) 45–56.
- [5] S. S. Hassan, P. P. Choudhury, R. Singh, S. Das and B. Nayak, Collatz function like integral value transformations, *Alexandria J. Math.*, **1** (2010) 31–35.
- [6] S. A. Kurtz and J. Simon, *The undecidability of the generalized Collatz problem*, Theory and applications of models of computation, Lecture Notes in Comput. Sci., 4484, Springer, Berlin, 2007 542–553.
- [7] J. Lagarias, The set of rational cycles for the $\forall x + ۱$ problem, *Acta Arith.*, **56** (1990) 33–53.
- [8] J. C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The $\forall x + ۱$ Problem*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [9] J. C. Lagarias, The $\forall x + ۱$ problem: An annotated bibliography, ii (2000–2009) (2012), available at <https://arxiv.org/abs/math/0608208>.
- [10] K. S. LaTourette, Explorations of the Collatz conjecture (2007), available at <http://www.math.moravian.edu/mfraboni/math/LatouretteHonors.pdf>.
- [11] H. Ma, C. Jia, S. Li, W. Zheng and D. Wu, Xmark, dynamic software watermarking using Collatz conjecture, *IEEE Trans. Inform. Forensics and Security*, **14** (2019) 2859–2874.
- [12] J. A. T. Machado, A. Galhano and D. Cao Labora, A clustering perspective of the Collatz conjecture, *Mathematics*, **9** (2021).
- [13] W. Ren, A new approach on proving Collatz conjecture, *J. Math.*, 2019 12 pp.
- [14] W. Ren, Reduced Collatz dynamics data reveals properties for the future proof of Collatz conjecture, *Data*, **4** (2019).

محسن فتحی آقبلاغ مصطفی خان

دانشکده فنی فومن، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران، فومن، ایران
mohsen.fathi.agb@ut.ac.ir

محسن فتحی آقبلاغ مصطفی خان دانش آموخته دانشگاه تهران، پردیس دانشکده های فنی، دانشکده فنی فومن در سال ۱۳۹۹ در رشته مهندسی نفت است. وی از دانش آموختگان برتر دانشگاه تهران و حائز رتبه اول بیست و پنجمین المپیاد علمی دانشجویی کشور در سال ۱۳۹۹ در رشته مهندسی شیمی می باشد و هم اکنون در مقطع کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیرکبیر در رشته مهندسی شیمی مشغول به تحصیل است.



عاطفه حسن زاده

دانشکده فنی فومن، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران، فومن، ایران
hasanzadeh.a@ut.ac.ir

عاطفه حسن زاده دانش آموخته دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۹۴ در زمینه تخصصی هندسه، آنالیز و توپولوژی است. وی هم اکنون عضو هیات علمی دانشگاه تهران، پردیس دانشکده های فنی، دانشکده فنی فومن است همچنین به دلیل فعالیت در دانشکده فنی فعالیت های آموزشی و پژوهشی خود را به سمت کاربرد ریاضیات و پژوهش های بین رشته ای معطوف نموده و در تعامل با دانشجویان و اساتید رشته های گوناگون مهندسی (و دایر در محل خدمت خود) از جمله مهندسی شیمی، مهندسی نفت، مهندسی صنایع و مهندسی کامپیوتر به انجام امور آموزشی و تحقیقاتی خود می پردازد.

