

نظریه مجموعه‌های نامتوازن: رویکردی متفاوت به عدم قطعیت

قاسم احمدی

چکیده. یکی از مباحث مهم در علوم و مهندسی بیان عدم قطعیت به زبان ریاضیات است. برای این کار نظریه‌های مختلفی مانند نظریه احتمالات، مجموعه‌های فازی، و حساب بازه‌ای مطرح شده است. نظریه مجموعه‌های نامتوازن رویکرد دیگری است که اخیراً در این موضوع مطرح شده است. در این نظریه، یک مجموعه نامتوازن با کران‌های بالا و پایین مشخص می‌گردد و یک ناحیه مرزی نیز برای آن در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله، به معرفی این نظریه و برخی از تعمیم‌های آن می‌پردازیم و برتری‌های این رویکرد را در مقایسه با سایر نظریه‌های مربوط بیان می‌کنیم. همچنین، به برخی از کاربردهای مجموعه‌های نامتوازن اشاره می‌کنیم و شبکه‌های عصبی نامتوازن را به‌منزله نمونه‌ای از رویکردهای ترکیبی در زمینه محاسبات نرم شرح خواهیم داد.

۱. مقدمه

مفهوم مجموعه یکی از مفاهیم پایه‌ای در ریاضیات است که بسیاری از ساختارهای ریاضی براساس آن تعریف می‌شود. تعریف این مفهوم و خلق نظریه مجموعه‌ها به دست کانتور در اواخر قرن نوزدهم صورت گرفت. طبق نظریه کانتور، مجموعه گردایه‌ای از اشیاء است. اشیاء ریاضی مانند رابطه‌ها، توابع، و اعداد مثال‌هایی از مجموعه‌ها هستند. مفهوم مجموعه نه تنها مبنایی برای تمام ریاضیات است بلکه نقش مهمی در زبان طبیعی ایفا می‌کند؛ مثلاً ما اغلب در مورد مجموعه‌هایی از اشیاء گوناگون مانند کتاب‌ها، گل‌ها، و انسان‌ها صحبت می‌کنیم.

در اوایل قرن بیستم، برتراند راسل نشان داد که مفهوم کانتوری مجموعه به تناقضات منطقی منجر می‌شود. یک راهکار برای رفع این اشکال، طرح اصول جدید برای نظریه مجموعه بود که به تعبیری فرار از نظریه مجموعه‌های کلاسیک محسوب می‌شد. موضوع پیدا کردن جایگزین برای نظریه مجموعه‌ها تاکنون بدون راه حل باقی مانده است؛ البته تناقضات مطرح شده در این باره بیشتر فلسفی هستند در حالی که مجموعه‌های مورد استفاده در ریاضیات از تناقضات مطرح شده مصون‌اند و به همین دلیل در استفاده از ریاضیات جاری با مشکلات اساسی مواجه نمی‌شویم [۶، ۲۸].

در ریاضیات لازم است که همه مفاهیم ریاضی از جمله مفهوم مجموعه به دقت تعریف شده باشد؛ در غیر این صورت استدلال دقیق غیرممکن خواهد بود [۲۰]. به‌هرحال، فیلسوفان، ریاضیدانان، و دانشمندان علوم کامپیوتر به مطالعه مفاهیم نادقیق علاقه‌مندند. در نظریه کلاسیک مجموعه‌ها، هر مجموعه به‌طور کامل توسط اعضایش مشخص می‌شود. به عبارت دیگر، هر عضو یا درون مجموعه است یا بیرون آن؛ پس ما با یک مجموعه قطعی سروکار داریم.

عبارات و کلمات کلیدی: عدم قطعیت، مجموعه نامتوازن، مجموعه فازی، شبکه عصبی نامتوازن

دبیرتخصصی رابط: محمدصادق مصلحیان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۳/۱۸

نوع مقاله: مروری

برای مثال مجموعه اعداد زوج یک مجموعه قطعی است. برخلاف اعداد زوج، مجموعه انسان‌های دانا قطعی نیست؛ زیرا ما قادر نیستیم همه انسان‌ها را به دو دسته دانا و نادان تقسیم کنیم. بعضی از انسان‌ها را نمی‌توان دانا یا نادان نامید و لذا در ناحیه تردید باقی می‌مانند؛ پس، دانایی مفهومی دقیق نیست.

تقریباً تمام مفاهیمی که در زبان طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند دقیق نیستند. لذا، استدلال عقل سلیم بر اساس زبان طبیعی باید بر مبنای مفاهیم غیرقطعی باشد و نه بر مبنای منطق کلاسیک [۱۹]. موضوع عدم قطعیت^۱ را برای اولین بار اقلیدس (۴۰۰ سال قبل از میلاد) با پارادوکس مرد طاس مطرح کرد. پارادوکس مرد طاس به این شرح است: فرض کنیم سر مردی ۱۰۰۰۰۰ مو داشته باشد. حذف یک مو از سر این مرد مطمئناً او را طاس نخواهد کرد. با تکرار این گام به این نتیجه می‌رسیم که چنین فردی بدون مو هم طاس نباید باشد.

عدم قطعیت را می‌توان ناتوانی در انتخاب یک شیء بهینه از میان مجموعه‌ای با بیش از یک شیء دلخواه تعریف کرد [۲۴]. یک مثال معروف از عدم قطعیت، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است [۱۰]: مقدار دقیق موقعیت و انرژی یک الکترون به‌طور همزمان مشخص نیست. البته این عدم قطعیت ناشی از طبیعت است. به طور کلی در تمام سیستم‌ها عدم قطعیت وجود دارد؛ زیرا وسایل اندازه‌گیری ما خیلی دقیق نیستند و همچنین در محیط اغتشاش وجود دارد و اطلاعات ما درباره جزئیات سیستم‌ها کامل نیست. به طور کلی، عدم قطعیت در ریاضیات مجاز نیست، برای فیلسوف‌ها جذاب است و برای زبان طبیعی، علم تشخیص، هوش مصنوعی، یادگیری ماشین، و علم کامپیوتر مفهومی سرکش است [۱۹]. عدم قطعیت معمولاً با مفهوم ناحیه مرزی (یعنی وجود اشیائی که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت یکتا به یک مجموعه یا مکملش نسبت داد) مرتبط است. این مفهوم را برای اولین بار فرگه^۲، منطق‌دان آلمانی و پدر منطق جدید، در ۱۸۹۳ مطرح کرد. طبق نظریه او هر مفهومی باید مرز مشخصی داشته باشد. ریاضیات باید از مفاهیم قطعی استفاده کند، در غیر این صورت استدلال دقیق ممکن نیست.

در سال ۱۹۸۲ پاولاک^۳، متخصص لهستانی علوم کامپیوتر، نظریه مجموعه‌های نامتوازن^۴ را مطرح کرد؛ این نظریه ابزار ریاضی جدیدی برای غلبه بر مشکل عدم قطعیت و دانش ناقص است. این نظریه کاربردهای زیادی در زمینه‌های مهندسی، بانکداری، پزشکی و غیره پیدا کرده است. در این مقاله، به معرفی نظریه مجموعه‌های نامتوازن و برخی از تعمیم‌های آن به عنوان رویکردی جالب و ارزشمند برای رفع مشکل عدم قطعیت می‌پردازیم.

در بخش ۲، مطالب مقدماتی نظریه مجموعه‌های نامتوازن را مطرح و به برخی از خواص این مجموعه‌ها اشاره می‌کنیم. در بخش ۳، تابع عضویت نامتوازن را تعریف می‌کنیم و در بخش ۴، عدم قطعیت از مرتبه‌های بالا را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش‌های ۵ و ۶، به ترتیب مجموعه‌های نامتوازن احتمالاتی و نظریه تصمیم‌های سه‌جانبه^۵ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش ۷، به مقایسه نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه مجموعه‌های نامتوازن می‌پردازیم و در بخش ۸، به کاربردهایی از نظریه مجموعه‌های نامتوازن اشاره می‌کنیم. در بخش ۹، شبکه‌های عصبی نامتوازن را مطرح می‌کنیم و در بخش آخر نتیجه و خلاصه این مطالب را بیان می‌کنیم.

۲. مجموعه‌های نامتوازن

نظریه مجموعه‌های نامتوازن رویکرد ریاضی جدید در مواجهه با مفاهیم غیرقطعی به حساب می‌آید [۱۹، ۲۲]. اساس مفهوم مجموعه نامتوازن بر این فرض استوار است که به هر شیء در عالم سخن مجموعه‌ای از اطلاعات نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر اشیاء مورد بحث ما بیمارانی باشند که به بیماری خاصی مبتلا هستند، علائم آن بیماری مجموعه‌ای از اطلاعات به آن بیماران نسبت می‌دهد. در این نظریه اشیائی که با مجموعه دانش یا اطلاعاتی یکسان مشخص می‌شوند (با توجه به دانش موجود در باره آن‌ها) آن اشیاء غیرقابل تشخیص از هم^۶ (یا مشابه) نامیده می‌شوند.

¹Uncertainty ²Frege ³Z. Pawlak ⁴Rough set theory ⁵Three-way decisions theory ⁶Indiscernible

رابطه غیرقابل تشخیص بودن از هم که بدین طریق تعریف می‌شود، مبنای ریاضی نظریه مجموعه‌های نامتوازن است. این درک از رابطه غیرقابل تشخیص بودن از هم با اندیشه‌های لایب‌نیتس^۷ مطابقت دارد که طبق آن اشیاء غیرقابل تشخیص از هم هستند اگر و تنها اگر همه تابع‌های موجود روی آن‌ها مقادیر یکسانی به خود بگیرند [۵].

در رویکرد مجموعه نامتوازن، غیرقابل تشخیص بودن از هم نسبت به مجموعه داده شده از تابع‌ها (خصوصیات) تعریف می‌شود. به هر مجموعه از اشیاء غیرقابل تشخیص از هم یک مجموعه مقدماتی گفته می‌شود و یک گرانول یا دانه‌واره^۸ (یعنی یک گروه، کلاس یا خوشه) از دانش در مورد جهان اشیاء مورد بحث تشکیل می‌دهد. به هر اجتماعی از مجموعه‌های مقدماتی یک مجموعه قطعی گفته می‌شود. هرگاه یک مجموعه قطعی نباشد، نامتوازن (غیرقطعی) نامیده می‌شود؛ پس، هر مجموعه نامتوازن دارای ناحیه‌ای مرزی است، یعنی اشیائی که نمی‌توان آن‌ها را با اطمینان جزء اعضای مجموعه یا مکمل آن دسته‌بندی کرد. این مطلب بدین معنی است که اشیاء موجود در ناحیه مرزی را با دانش موجود نمی‌توان به درستی دسته‌بندی کرد. واضح است که مجموعه‌های قطعی دارای عضو مرزی نیستند. در این رویکرد، هر مجموعه غیرقطعی با یک زوج از مجموعه‌های قطعی که تقریب بالا و پایین برای آن مجموعه غیرقطعی گفته می‌شود، جایگزین می‌شود. تقریب پایین شامل اشیائی است که مطمئناً متعلق به مجموعه‌اند و تقریب بالا شامل همه اشیائی است که ممکن است متعلق به مجموعه باشند. اختلاف بین تقریب بالا و پایین ناحیه مرزی مجموعه غیرقطعی است. باید توجه کرد که این ناحیه مرزی بنا به دانش داده‌شده درباره یک مجموعه از خصوصیات یا یک نمونه از اشیاء تعریف شده است. این ناحیه مرزی قطعی است. در هر حال وقتی بعضی از خصوصیات حذف شود یا خصوصیات جدیدی اضافه شود یا تغییراتی در نمونه داده‌شده ایجاد شود ناحیه مرزی تغییر خواهد کرد.

نظریه مجموعه‌های نامتوازن به بیان عدم قطعیت نه از طریق عضویت بلکه با استفاده از ناحیه مرزی یک مجموعه می‌پردازد. اگر ناحیه مرزی یک مجموعه تهی باشد، آن‌گاه آن مجموعه قطعی است و در غیر این صورت مجموعه نامتوازن است. ناحیه مرزی ناتهی یک مجموعه بدین معنی است که دانش ما در مورد آن مجموعه برای تعریف دقیق آن کافی نیست. نظریه مجموعه‌های نامتوازن توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. هرچند این رویکرد اشتراک‌هایی با سایر نظریه‌های مرتبط با عدم قطعیت دارد، می‌توان آن‌را به عنوان یک زمینه مستقل نیز مورد بررسی قرار داد.

در ادامه این بخش، به معرفی مفهوم مجموعه نامتوازن با استفاده از مفهوم سیستم اطلاعاتی می‌پردازیم. سپس درباره خواص مجموعه‌های نامتوازن و مفاهیم مرتبط با آن‌ها بحث خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲. [۲۰] فرض کنیم زوج (U, A) از مجموعه‌های متناهی و ناتهی U و A داده شده است که در آن U جهان اشیاء و A مجموعه‌ای شامل خصوصیات^۹ (صفات) اشیاء است. به خصوصیت دلخواه $a \in A$ مجموعه‌ای مانند V_a از مقادیر مربوط به آن نظیر می‌کنیم که دامنه a نامیده می‌شود. زوج (U, A) را سیستم اطلاعاتی می‌گویند. هر زیر مجموعه B از A یک رابطه دوتایی $\sim_B$ روی U ، به صورت زیر تعریف می‌کند

$$x \sim_B y \text{ اگر و تنها اگر برای هر } a \in B, a(x) = a(y) \text{ داشته باشیم}$$

که در آن $a(x)$ نمایانگر مقدار خصوصیت a برای شیء x است. این رابطه را رابطه غیرقابل تشخیص بودن از هم^{۱۰} می‌گویند.

هر سیستم اطلاعاتی را می‌توان به وسیله یک جدول اطلاعاتی شامل سطرهایی با عنوان اشیاء و ستون‌هایی با عنوان خصوصیات نمایش داد. در این جدول، درایه متناظر با زوج (x, a) که در آن $x \in U$ و $a \in A$ ، مقدار $a(x)$ را نشان می‌دهد.

⁷Leibniz ⁸Granule ⁹attributes ¹⁰Indiscernibility

مثال ۲.۲. اشیاء در یک جدول اطلاعاتی مربوط به بیمارانی با بیماری مشخص بیمارها هستند و خصوصیات می تواند سن، جنسیت یا علائم مربوط به آن بیماری مانند فشار خون، دمای بدن و غیره باشد. در اینجا یک جدول اطلاعاتی از داده های مربوط به شش بیمار آورده شده است.

جدول ۱: جدول اطلاعات بیماران

بیمار	سن	سر درد	درد عضلانی	دمای بدن	فشار خون
p_1	سالمند	خیر	بله	بالا	بالا
p_2	سالمند	بله	خیر	بالا	بالا
p_3	میانسال	بله	بله	بسیار بالا	بالا
p_4	جوان	خیر	بله	نرمال	متوسط
p_5	جوان	بله	خیر	بالا	متوسط
p_6	سالمند	خیر	بله	بسیار بالا	بالا

در جدول ۱، بیمارانی p_1, p_2 و p_3 نسبت به خصوصیت فشار خون و همچنین بیمارانی p_3 و p_6 نسبت به خصوصیات درد عضلانی، دمای بدن و فشار خون، و بیمارانی p_1 و p_6 نسبت به خصوصیات سن، سر درد، درد عضلانی، و فشار خون و بیمارانی p_2 و p_5 نسبت به خصوصیات سر درد، درد عضلانی و دمای بدن غیر قابل تشخیص از هم هستند.

واضح است که $\sim_B$ رابطه هم ارزی است. این رابطه اشیاء را طبق اطلاعات موجود در سیستم (U, B) دسته بندی می کند. خانواده همه رده های هم ارزی رابطه $\sim_B$ ، یعنی افراز ایجاد شده توسط B ، به صورت U/B نشان داده می شود. یک کلاس هم ارزی این رابطه به صورت زیر است

$$(1) \quad [x]_B = \{y \in U \mid y \sim_B x\}.$$

هر کلاس هم ارزی از رابطه $\sim_B$ یا هر بلوک از افراز U/B را مجموعه B - مقدماتی^{۱۱} می گوئیم. در نظریه مجموعه های نامتوازن، مجموعه های مقدماتی بلوک های اساسی دانش ما از واقعیت هستند. اجتماع مجموعه های B - مقدماتی را مجموعه های B - تعریف پذیر^{۱۲} می گویند.

مثال ۳.۲. در مثال قبل، خصوصیت سر درد مجموعه های مقدماتی زیر را تولید می کند:

$$\{p_2, p_3, p_5\}, \quad \{p_1, p_4, p_6\}.$$

خصوصیات سر درد و درد عضلانی مجموعه های مقدماتی زیر را تولید می کنند:

$$\{p_1, p_4, p_6\}, \quad \{p_2, p_5\}, \quad \{p_3\}.$$

خصوصیات سر درد، درد عضلانی و دمای بدن مجموعه های مقدماتی زیر را تولید می کنند:

$$\{p_1\}, \quad \{p_2, p_5\}, \quad \{p_3\}, \quad \{p_4\}, \quad \{p_6\}.$$

¹¹ B-Elementary ¹² B-Definable

تعریف ۴.۲. [۲۲] فرض کنیم $X \subseteq U$. مجموعه‌های

$$(۲) \quad \underline{B}(X) = \{x \in U \mid [x]_B \subseteq X\},$$

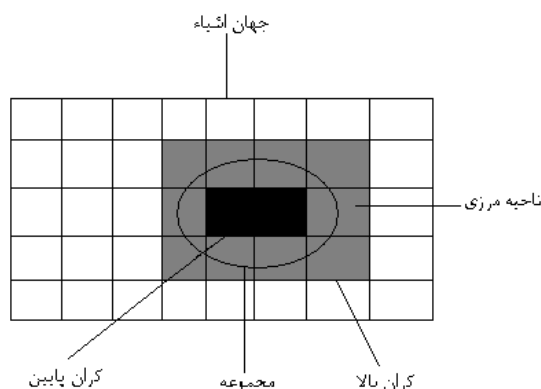
$$(۳) \quad \overline{B}(X) = \{x \in U \mid [x]_B \cap X \neq \emptyset\}$$

را به ترتیب، B -تقریب پایین و B -تقریب بالا برای X می‌گویند. همچنین، مجموعه

$$(۴) \quad BN_B(X) = \overline{B}(X) - \underline{B}(X)$$

B -ناحیه مرزی برای X گفته می‌شود.

طبق تعریف، تقریب پایین X نسبت به B مجموعه همه اشیائی است که با توجه به B مطمئناً در X هستند. تقریب بالای X نسبت به B مجموعه همه اشیائی است که با توجه به B ممکن است در X باشند. ناحیه مرزی مجموعه X نسبت به B مجموعه همه اشیائی است که با توجه به B نمی‌توان آن‌ها را در X یا در خارج X دسته‌بندی کرد (شکل ۱).



شکل ۱: یک مجموعه نامتوازن. درون بیضی مجموعه موردنظر ما است. مستطیل‌ها کلاس‌های هم‌ارزی هستند. مستطیل‌های سیاه کران پایین، مستطیل‌های سیاه و خاکستری کران بالا و مستطیل‌های خاکستری ناحیه مرزی را تشکیل می‌دهند [۱۷].

تعریف ۵.۲. [۲۲] چنانچه ناحیه مرزی X تهی باشد، یعنی $BN_B(X) = \emptyset$ ، مجموعه X نسبت به B یک مجموعه کلاسیک گفته می‌شود و برعکس، چنانچه ناحیه مرزی X ناتهی باشد، یعنی $BN_B(X) \neq \emptyset$ ، مجموعه X نسبت به B نامتوازن گفته می‌شود.

مثال ۶.۲. مجموعه $X = \{p_1, p_2, p_3, p_6\}$ از بیماران و مجموعه B از خصوصیات سردرد، درد عضلانی و دمای بدن را در نظر می‌گیریم. در این صورت، با توجه به رده‌های هم‌ارزی (مجموعه‌های B -مقدماتی) به‌دست آمده در مثال قبل داریم

$$\underline{B}(X) = \{p_1, p_3, p_6\}, \quad \overline{B}(X) = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}, \quad BN_B(X) = \{p_2, p_5\}.$$

از آنجا که $BN_B(X) \neq \emptyset$ ، مجموعه X نسبت به B نامتوازن است.

با توجه به تعریف مجموعه‌های $\underline{B}(X)$ و $\overline{B}(X)$ داریم: $\underline{B}(X) \subseteq X \subseteq \overline{B}(X)$ ، بدین معنی که X بین تقریب‌های پایین و بالایش قرار می‌گیرد. لذا، این تعریف دارای تعبیر فیزیکی بسیار جالبی است. یک روش دیگر برای تعریف تقریب‌های مجموعه نامتوازن استفاده از سه مجموعه دوبه‌دو مجزای مثبت، منفی و مرزی است [۳۷]:

$$(۵) \quad POS_B(X) = \{x \in U | [x]_B \subseteq X\},$$

$$(۶) \quad NEG_B(X) = \{x \in U | [x]_B \subseteq X^c\},$$

$$(۷) \quad BND_B(X) = \{x \in U | [x]_B \not\subseteq X, [x]_B \not\subseteq X^c\}.$$

با توجه به تعریف، این نواحی دوبه‌دو مجزا هستند و اجتماع آن‌ها برابر مجموعه جهانی U است. البته این مجموعه‌ها یک افراز برای U نیستند؛ زیرا ممکن است برخی از این نواحی تهی باشند. اگر یک جفت از این نواحی را داشته باشیم، دیگری را نیز می‌توانیم به دست آوریم. بین این دو نمایش از نواحی مربوط به مجموعه نامتوازن روابط زیر وجود دارد:

$$(۸) \quad POS_B(X) = \underline{B}(X), \quad NEG_B(X) = (\overline{B}(X))^c,$$

$$(۹) \quad BND_B(X) = \overline{B}(X) - \underline{B}(X),$$

$$(۱۰) \quad \overline{B}(X) = POS(X) \cup BND(X);$$

این نمایش‌ها معادل‌اند. مزیت تعریف از طریق رابطه شمول $\subseteq$ این است که تعمیم تقریب‌های توصیفی به تقریب‌های کمی با در نظر گرفتن یک درجه عضویت خاص امکان‌پذیر خواهد بود [۲۳]. مجموعه‌های نامتوازن احتمالاتی نمونه‌ای از تعمیم‌های کمی برای مجموعه‌های نامتوازن‌اند.

برخی از خصوصیات تقریب‌ها برای مجموعه‌های نامتوازن به صورت زیر است [۲۲]:

$$(۱۱) \quad \underline{B}(X) \subseteq X \subseteq \overline{B}(X),$$

$$(۱۲) \quad \overline{B}(X \cup Y) = \overline{B}(X) \cup \overline{B}(Y),$$

$$(۱۳) \quad \overline{B}(X \cap Y) = \overline{B}(X) \cap \overline{B}(Y),$$

$$(۱۴) \quad \underline{B}(X \cup Y) \supseteq \underline{B}(X) \cup \underline{B}(Y),$$

$$(۱۵) \quad \underline{B}(X \cap Y) \subseteq \underline{B}(X) \cap \underline{B}(Y),$$

$$(۱۶) \quad \underline{B}(X^c) = (\overline{B}(X))^c,$$

$$(۱۷) \quad \overline{B}(X^c) = (\underline{B}(X))^c.$$

به‌سادگی دیده می‌شود تقریب‌ها در واقع عملیات درون و بستر در توپولوژی تولیدشده توسط داده‌ها هستند. بنابراین نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه مجموعه‌های نامتوازن به بحث و زمینه ریاضی کاملاً متفاوتی نیاز دارند. دسته‌های اساسی زیر از مجموعه‌های نامتوازن را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۹، ۶]:

$$\bullet B, X - \text{تعریف‌پذیر نامتوازن است اگر و تنها اگر } \underline{B}(X) \neq \emptyset \text{ و } \overline{B}(X) \neq U;$$

$$\bullet B, X - \text{تعریف‌پذیر درونی است اگر و تنها اگر } \underline{B}(X) = \emptyset \text{ و } \overline{B}(X) \neq U;$$

$$\bullet B, X - \text{تعریف‌پذیر بیرونی است اگر و تنها اگر } \underline{B}(X) \neq \emptyset \text{ و } \overline{B}(X) = U;$$

$$\bullet B, X - \text{تعریف‌پذیر تام است اگر و تنها اگر } \underline{B}(X) = \emptyset \text{ و } \overline{B}(X) = U.$$

دسته‌بندی فوق را می‌توان به صورت زیر تفسیر کرد:

- اگر B, X - تعریف‌پذیر نامتوازن باشد، آن‌گاه با توجه به B ، عضوهایی از U وجود دارند که مشخصاً در X هستند و عضوهایی از U وجود دارند که مشخصاً در X^c هستند.

- اگر X, B - تعریف‌پذیر درونی باشد، آن‌گاه با توجه به B ، عضوهایی از U وجود دارند که مشخصاً در X^c هستند ولی در مورد اعضای X نمی‌توان نظر قطعی داد؛ به عبارت دیگر عضوی وجود ندارد که با اطمینان بگوییم در X است.
 - اگر X, B - تعریف‌پذیر بیرونی باشد، آن‌گاه با توجه به B ، عضوهایی از U وجود دارند که مشخصاً در X هستند ولی در مورد اعضای X^c نمی‌توان نظر قطعی داد؛ به عبارت دیگر عضوی وجود ندارد که با اطمینان بگوییم در X^c است.
 - اگر X, B - تعریف‌پذیر تام باشد، آن‌گاه با توجه به B ، در مورد اعضای X و X^c نمی‌توان نظر قطعی داد؛ به عبارت دیگر عضوی وجود ندارد که با اطمینان بگوییم در X یا در X^c است.
- بنابراین، یک مجموعه نامتوازن است اگر دارای ناحیه مرزی ناتهی باشد؛ در غیر این صورت این مجموعه قطعی است. همچنین، یک مجموعه نامتوازن را می‌توان به صورت عددی با ضریب

$$\alpha_B(X) = \frac{|B(X)|}{|\overline{B}(X)|} \quad (18)$$

مشخص کرد که دقت تقریب نامیده می‌شود و در آن X یک مجموعه ناتهی است و $|S|$ تعداد عضوهای S را نشان می‌دهد. به‌وضوح $0 \leq \alpha_B(X) \leq 1$. اگر $\alpha_B(X) = 1$ ، آن‌گاه X نسبت به B قطعی است و در غیر این صورت اگر $\alpha_B(X) < 1$ ، آن‌گاه X نسبت به B نامتوازن است.

۳. تابع عضویت نامتوازن

مجموعه‌های نامتوازن را می‌توان با به‌کارگیری تابع عضویت نامتوازن به جای دقت تقریب تعریف کرد [۲۳]. تابع $\mu_X^B : U \rightarrow [0, 1]$ تعریف‌شده با

$$\mu_X^B(x) = \frac{|[x]_B \cap X|}{|[x]_B|} \quad (19)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $x \in X \subseteq U$. مقدار $\mu_X^B(x)$ را می‌توان به عنوان درجه اطمینان (یا $1 - \mu_X^B(x)$) را به عنوان درجه عدم قطعیت) عضویت x در X ، با توجه به دانش موجود در باره x که با B بیان شده است، تفسیر کرد. تابع عضویت نامتوازن را می‌توان به عنوان احتمال شرطی تعلق x در X به شرط B تفسیر کرد. این تابع را می‌توان برای تعریف تقریب‌ها و ناحیه مرزی یک مجموعه استفاده کرد [۲۰]:

$$\underline{B}(X) = \{x \in U | \mu_X^B(x) = 1\}, \quad (20)$$

$$\overline{B}(X) = \{x \in U | \mu_X^B(x) > 0\}, \quad (21)$$

$$BN_B(X) = \{x \in U | 0 < \mu_X^B(x) < 1\}. \quad (22)$$

برخی از خصوصیات تابع عضویت نامتوازن به صورت زیر است [۲۳]:

$$\mu_X^B(x) = 1 \iff x \in \underline{B}(X), \quad (23)$$

$$\mu_X^B(x) = 0 \iff x \in (\overline{B}(X))^c, \quad (24)$$

$$0 < \mu_X^B(x) < 1 \iff x \in BN_B(X), \quad (25)$$

$$\forall x \in U, \quad \mu_{X \cup Y}^B(x) \geq \max(\mu_X^B(x), \mu_Y^B(x)), \quad (26)$$

$$\forall x \in U, \quad \mu_{X \cap Y}^B(x) \leq \min(\mu_X^B(x), \mu_Y^B(x)). \quad (27)$$

خواص (۲۶) و (۲۷) نشان می‌دهند که به طور کلی، تابع عضویت نامتوازن برای اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، برخلاف مجموعه‌های فازی، با استفاده از تابع عضویت مجموعه‌های تشکیل‌دهنده قابل محاسبه نیست. بنابراین اساساً عضویت نامتوازن با عضویت فازی متفاوت است. به علاوه، عضویت نامتوازن به دانش موجود (که با خواص موجود در B نشان داده می‌شود) وابسته است و برخلاف تابع عضویت فازی، دارای ماهیتی احتمالاتی است.

۴. مجموعه‌های نامتوازن و عدم قطعیت مراتب بالاتر

اساساً مرزهای مجموعه‌های غیرقطعی نباید قطعی باشند [۱۴]. در تعریفی که بیان شد ناحیه مرزی به صورت مجموعه قطعی $BN_B(X)$ تعریف شد. این تعریف نسبت به دانش بیان‌شده توسط مجموعه خصوصیات B بیان شده است. منابع اطلاعاتی متفاوت می‌توانند از مجموعه خصوصیات متفاوتی برای تقریب مجموعه استفاده کنند. بنابراین، با این دیدگاه ممکن است ناحیه مرزی تغییر کند.

ساختارهای ثابت مانند تقریب‌ها یا مدل‌های به دست آمده از یک نمونه نمی‌توانند مفاهیم غیرقطعی را با کیفیت رضایت بخشی تقریب بزنند. درک یک مفهوم غیرقطعی فقط در فرآیندی تحقق می‌پذیرد که مدل‌ها در آن با مفاهیم در یک محیط دینامیکی متغیر تصدیق شوند. این موضوع می‌تواند نتایج مهمی برای توسعه بیشتر نظریه مجموعه‌های نامتوازن در ترکیب با نظریه مجموعه‌های فازی و نمونه‌های دیگر از محاسبات نرم در زمینه تقریب تطبیقی در پی داشته باشد.

۵. مجموعه‌های نامتوازن احتمالاتی

یکی از زمینه‌های پژوهشی درباره مجموعه‌های نامتوازن، تعمیم مفاهیم این نظریه است. ترکیب این نظریه با روش‌ها و نظریه‌های دیگر در علوم و رشته‌های مهندسی منجر به کشف مفاهیم و راهکارهای زیادی در درک و حل مسائل گوناگون به‌ویژه مسأله عدم قطعیت شده است. در این بخش، مجموعه‌های نامتوازن احتمالاتی را توضیح می‌دهیم.

در نظریه مجموعه‌های نامتوازن کلاسیک، برای تقریب پایین لازم است کلاس‌های هم‌ارزی زیرمجموعه‌ای از مجموعه نامتوازن باشد و برای تقریب بالا لازم است اشتراک کلاس‌های هم‌ارزی با مجموعه نامتوازن ناتهی باشد. عدم توجه به درجه هم‌پوشانی آن‌ها کاربردهای نظریه مجموعه‌های نامتوازن کلاسیک را کاهش می‌دهد؛ به همین دلیل تعمیم‌های احتمالاتی این نظریه مطرح شده است [۳۶].

به منظور توصیف مجموعه‌های نامتوازن احتمالاتی، مجموعه‌های نامتوازن کلاسیک را با استفاده از احتمالات و دو مقدار حدی احتمالاتی (یعنی ۰ و ۱) تفسیر می‌کنیم و سپس ۰ و ۱ را به زوج (α, β) تعمیم می‌دهیم به طوری که $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ [۳۸]. فرض کنیم $Pr(X|[x])$ احتمال عضویت یک شیء در X را نشان دهد به شرطی که این شیء عضو کلاس هم‌ارزی $[x]$ باشد. بنابراین، شرایط تعریف نواحی مجموعه نامتوازن را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم:

$$(۲۸) \quad [x] \subseteq X \iff Pr(X | [x]) = 1,$$

$$(۲۹) \quad [x] \cap X = \emptyset \iff Pr(X | [x]) = 0,$$

$$(۳۰) \quad [x] \not\subseteq X, [x] \cap X \neq \emptyset \iff 0 < Pr(X | [x]) < 1.$$

با توجه به این شرایط، نواحی مجموعه نامتوازن را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$(۳۱) \quad POS(X) = \{x \in U \mid Pr(X | [x]) = 1\}.$$

$$(۳۲) \quad NEG(X) = \{x \in U \mid Pr(X | [x]) = 0\}.$$

$$(۳۳) \quad BND(X) = \{x \in U \mid 0 < Pr(X | [x]) < 1\}.$$

این روابط نشان می‌دهند که مجموعه نامتوازن کلاسیک صرفاً از مقادیر احتمالاتی حدی ۰ و ۱ استفاده می‌کند. مجموعه‌های نامتوازن کلاسیک را با جایگزینی ۰ و ۱ با α و β تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم α و β را داریم به طوری که $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$. در این صورت نواحی مجموعه نامتوازن احتمالاتی به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۱]:

$$(۳۴) \quad POS_{(\alpha, \beta)}(X) = \{x \in U \mid Pr(X \mid [x]) \geq \alpha\},$$

$$(۳۵) \quad NEG_{(\alpha, \beta)}(X) = \{x \in U \mid Pr(X \mid [x]) \leq \beta\},$$

$$(۳۶) \quad BND_{(\alpha, \beta)}(X) = \{x \in U \mid \beta < Pr(X \mid [x]) < \alpha\}.$$

۶. نظریه تصمیم‌های سه‌جانبه

اخیراً مفهوم تصمیم‌های سه‌جانبه برای تفسیر نواحی مجموعه‌های نامتوازن ارائه شده است [۳۲، ۳۵]. در واقع، نواحی مثبت، منفی، و مرزی به ترتیب به عنوان نواحی پذیرش، رد، و بدون پذیرش یا رد تلقی می‌شوند. نظریه تصمیم‌های سه‌جانبه در زندگی روزمره به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد و به طور گسترده در زمینه‌های مختلفی مانند تصمیم‌گیری‌های پزشکی، آزمون فرض در آمار، علوم قضایی، و مدیریت به کار گرفته شده است [۳۴].

فرض کنیم U مجموعه‌ای ناتهی و متناهی از اشیاء و B مجموعه‌ای متناهی از شرایط باشد. می‌خواهیم اشیای U را براساس این مطلب که در مجموعه شرایط B صدق می‌کنند یا نه، دسته‌بندی کنیم. در مدل‌های تصمیم دو جانبه، صرفاً یک شیء در مجموعه‌ای از شرایط یا صدق می‌کند یا نه؛ بنابراین، مجموعه U به دو ناحیه مجزا به نام‌های ناحیه مثبت POS برای اشیائی که در شرایط B صدق می‌کنند و ناحیه منفی NEG برای اشیائی که در شرایط B صدق نمی‌کنند، تقسیم می‌شود. معمولاً این نوع دسته‌بندی دودویی منجر به اشتباهاتی در دسته‌بندی می‌شود.

در بسیاری از حالات، یک شیء تا حدی در یک مجموعه از شرایط صدق می‌کند. توجه کنید که حتی اگر اشیائی به لحاظ نظری هم به طور دقیق در مجموعه شرایط معینی صدق کنند، در عمل به دلیل وجود عدم قطعیت و اطلاعات ناقص باز هم تشخیص دقیق اشیائی که در آن شرایط صدق می‌کنند مشکل است. لذا، ما فقط می‌توانیم انتظار یک جواب تقریبی را داشته باشیم. بدین منظور می‌توانیم حدود آستانه‌ای را درباره میزان برقراری شرایط به صورت زیر در نظر بگیریم و از آن‌ها استفاده کنیم:

- پذیرش یک شیء هرگاه میزان صادق بودن آن در مجموعه‌ای از شرایط از اندازه خاصی بیشتر باشد؛
- رد یک شیء هرگاه میزان صادق بودن آن در مجموعه‌ای از شرایط از اندازه خاصی کمتر باشد؛
- نه قبول و نه رد یک شیء.

حالت سوم را می‌توانیم تعویق تصمیم‌گیری نیز بنامیم، زیرا نیاز به اطلاعات یا بررسی بیشتر دارد.

۷. مقایسه مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های نامتوازن

لطفی‌زاده رویکرد ظریفی به عدم قطعیت ارائه کرده است که به نظریه مجموعه‌های فازی مشهور است. در این رویکرد تعلق هر عضوی به یک مجموعه با درجه k ، $(0 \leq k \leq 1)$ ، امکان‌پذیر است در حالی که در نظریه کلاسیک مجموعه‌ها هر عضو یا به آن مجموعه متعلق است یا نیست. برای مثال در نظریه کلاسیک مجموعه‌ها یک شخص یا بیمار است یا سالم، در حالی که در نظریه مجموعه‌های فازی می‌توانیم بگوییم یک نفر ۶۰٪ بیمار است (یعنی با درجه ۰/۶). بنابراین تابع عضویت فازی را می‌توان به صورت $\mu_X(x) \in [0, 1]$ نمایش داد که در آن X یک مجموعه است و x یک عضو است. برخی از خصوصیات تابع عضویت فازی به صورت زیر است [۴۰]:

$$(۳۷) \quad \forall x \in U, \quad \mu_{X \cup Y}(x) = \max(\mu_X(x), \mu_Y(x)),$$

$$(38) \quad \forall x \in U, \quad \mu_{X \cap Y}(x) = \min(\mu_X(x), \mu_Y(x)).$$

بنابراین، عضویت یک عنصر در اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها به‌طور یکتا با عضویتش در مجموعه‌های عامل تعیین می‌شود. این یک خاصیت بسیار مطلوب است و انجام اعمال ساده روی مجموعه‌های فازی را میسر می‌کند که هم در عمل و هم در کاربردها خصوصیت بسیار مهمی است. نظریه مجموعه‌های فازی و کاربردهایش طی سال‌های گذشته بسیار گسترش یافته است و توجه مهندسين، منطق‌دانان، و فیلسوفان را به خود جلب کرده است.

مجموعه‌های فازی با استفاده از تابع عضویت فازی تعریف می‌شود و این تعریف ساختارها، اعداد، و توابع پیشرفته ریاضی را شامل می‌شود. مجموعه‌های نامتوازن با تقریب‌ها تعریف می‌شوند و بنابراین این تعریف نیز به مفاهیم پیشرفته ریاضی نیاز دارد. با توجه به خواص مجموعه‌های نامتوازن (روابط ۱۱-۱۷)، تقریب‌ها عملاً عملیات درون و بستر در توپولوژی تولیدشده توسط داده‌ها هستند. بنابراین نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه مجموعه‌های نامتوازن به زمینه و بستر ریاضی کاملاً مجزایی نیاز دارند.

همچنین، با توجه به ویژگی‌های عضویت نامتوازن (روابط ۲۳-۲۷) و عضویت فازی (روابط ۳۷ و ۳۸)، نتیجه می‌گیریم که عضویت نامتوازن اساساً با عضویت فازی متفاوت است. خواص ۲۶ و ۲۷ نشان می‌دهند که عضویت نامتوازن برای اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها کلاً برخلاف مجموعه‌های فازی براساس عضویت مجموعه‌های تشکیل‌دهنده قابل محاسبه نیست. علاوه بر این عضویت نامتوازن به دانش موجود (که با خصوصیات B نشان داده می‌شود) وابسته است و برخلاف تابع عضویت فازی، دارای رنگ و بوی احتمالاتی است؛ زیرا تابع عضویت نامتوازن را می‌توان به عنوان احتمال شرطی تعلق x در X به شرط B تفسیر کرد [۶].

نظریه مجموعه‌های فازی و نظریه مجموعه‌های نامتوازن دو رویکرد متفاوت به عدم قطعیت هستند. نظریه مجموعه‌های فازی به درجه‌مند بودن دانش اشاره دارد و با عضویت فازی بیان می‌شود، در حالی که نظریه مجموعه‌های نامتوازن به گرانولی بودن دانش اشاره دارد که با رابطه غیرقابل تشخیص بودن از هم بیان می‌شود. دوبویس^{۱۳} و پراد^{۱۴} در [۷] مثالی عرضه کرده‌اند که این تفاوت را به خوبی نشان می‌دهد: رویکرد نظریه مجموعه‌های فازی در پردازش تصویر به ما می‌گوید که سطح خاکستری درجه‌مند است در حالی که رویکرد نظریه مجموعه‌های نامتوازن ما را به اندازه پیکسل‌ها می‌رساند. در نتیجه دو نظریه با هم در رقابت نیستند بلکه بیشتر مکمل هم هستند. به‌ویژه رویکرد مجموعه‌های نامتوازن ابزارهایی برای ساختن تقریب‌هایی برای توابع عضویت فازی فراهم می‌کند. موفق بودن رویکرد ترکیبی نامتوازن - فازی در بسیاری از کاربردها ثابت شده است [۱۸].

۸. کاربردهای مجموعه‌های نامتوازن

برتری اصلی کاربرد نظریه مجموعه‌های نامتوازن در تحلیل داده‌ها این است که اطلاعات اضافه یا مقدماتی در مورد داده‌ها، مانند احتمال در آمار یا درجه عضویت یا مقدار امکان در نظریه مجموعه‌های فازی، در کار نیست و فرمول‌بندی این اطلاعات آسان است. به کمک این نظریه می‌توانیم تعداد داده‌های اصلی را کاهش دهیم و بدین ترتیب، مجموعه‌های حداقلی از داده‌ها به دست آوریم که از لحاظ دانش و اطلاعات با مجموعه داده‌های اصلی برابرند. اغلب الگوریتم‌های به دست آمده از نظریه مجموعه‌های نامتوازن برای پردازش‌های موازی مناسب هستند.

نظریه مجموعه‌های نامتوازن در زمینه‌های هوش مصنوعی، یادگیری ماشین، داده‌کاوی، تشخیص الگو، سیستم‌های تصمیم‌پشتیبان، سیستم‌های خبره، سیستم‌های هوشمند، سیستم‌های مدیریت ریسک، و پردازش تصویر اهمیت اساسی دارد [۲۷]. روش‌های بسیاری در تحلیل داده‌ها براساس این رویکرد به دست آمده است. در علم مدیریت، با توجه به اینکه تصمیم‌گیری عموماً با عدم قطعیت ناشی از اطلاعات ناکافی همراه است، نظریه‌های عدم قطعیت می‌توانند کمک

¹³Dubois ¹⁴Prade

شایانی در مدل‌سازی و نهایتاً تصمیم‌گیری داشته باشد. نظریه مجموعه‌های نامتوازن بیش از سایر رویکردها در این زمینه نقش ایفا کرده است [۲۹، ۳۴]

در علوم پزشکی، از آنجا که داده‌های پزشکی ناکامل و مبهم هستند، نظریه مجموعه‌های نامتوازن در این زمینه بسیار مفید واقع شده است. پزشک بیمار را ملاقات می‌کند و بدون دسترسی به اطلاعات کامل بهترین راه را برای کمک به بیمار انتخاب می‌کند. تحقیقات فراوانی در زمینه علوم پزشکی بر مبنای نظریه مجموعه‌های نامتوازن صورت گرفته است. برخی از این تحقیقات انجام گرفته در این زمینه عبارت‌اند از: ارائه مدلی بر مبنای نظریه مجموعه نامتوازن برای قوانین تشخیص پزشکی [۳۰] و تحلیل تصاویر پزشکی [۱۱].

یکی از زمینه‌های مهم و مورد توجه محققین شناسایی و مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده مانند آب و هوا، شرکت‌ها، بازارها، دولت‌ها، صنایع، اکوسیستم‌ها، دسته‌های حیوانات، و حشرات اجتماعی مانند زنبور عسل است. یک راهکار اساسی برای دستیابی به مدل‌های کارآمد از سیستم‌های پیچیده استفاده از نظریه مجموعه‌های نامتوازن است [۲۷]. یادگیری ماشین شاخه‌ای از هوش مصنوعی است که به کامپیوترها قابلیت یادگیری می‌بخشد. پاولاک رویکرد مجموعه نامتوازن به یادگیری را با طرح یادگیری استقرایی مطرح کرده است [۲۱]. لینگراس^{۱۵} بر مبنای نظریه مجموعه‌های نامتوازن، شبکه‌های عصبی نامتوازن را معرفی کرده است [۱۶]. در بخش ۹، به معرفی شبکه‌های عصبی نامتوازن می‌پردازیم.

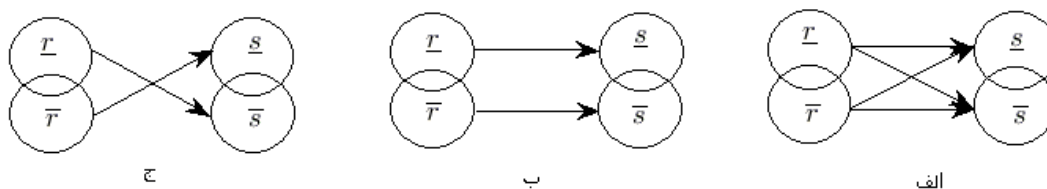
۹. شبکه‌های عصبی نامتوازن

شبکه‌های عصبی ابزارهای مدل‌سازی قدرتمندی هستند و با توجه به خواص منحصر به فردشان کاربردهای روزافزونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده‌اند [۸]. شبکه‌های عصبی تقریب‌گرهای عمومی‌اند و ذاتاً با محاسبات موازی سازگارند. از این‌رو در شناسایی و کنترل سیستم‌های غیرخطی کارایی بالایی دارند. اجزای تشکیل دهنده یک شبکه عصبی نورون‌ها هستند که در یک ساختار مشخص با هم در ارتباطند. به اتصالات بین نورون‌ها وزن‌هایی اختصاص داده می‌شود. به منظور بهره‌برداری از خواص مجموعه‌های نامتوازن می‌توان آن‌ها را با شبکه‌های عصبی ترکیب کرد. مفهوم نورون نامتوازن را لینگراس در سال ۱۹۹۶ مطرح کرد. این مفهوم شامل دو بخش نورون کران بالا و نورون کران پایین است و اطلاعات بین آن‌ها مبادله می‌شود [۱۶]. نورون‌های نامتوازن در زمینه الگوهای نامتوازن مانند آب و هوا و حجم ترافیک ظاهر می‌شوند. الگوهای نامتوازن توسط یک مجموعه متناهی از خصوصیات توصیف می‌شود؛ برای مثال آب و هوا با دما، میزان بارش، و غیره توصیف می‌شود. فرض کنیم c خصوصیتی برابر توصیف یک شیء باشد و $\bar{c}$ و c کران‌های پایین و بالا برای c را نشان دهند. در هر الگوی نامتوازن ارزش خصوصیت c به وسیله $\bar{c}$ و c مشخص می‌شود.

تعریف ۱.۹. نورون نامتوازن r یک زوج مانند $(\bar{r}, r)$ از نورون‌های معمولی است که $\bar{r}$ نورون کران بالا و r نورون کران پایین گفته می‌شوند و اطلاعات بین این دو نورون مبادله می‌شود.

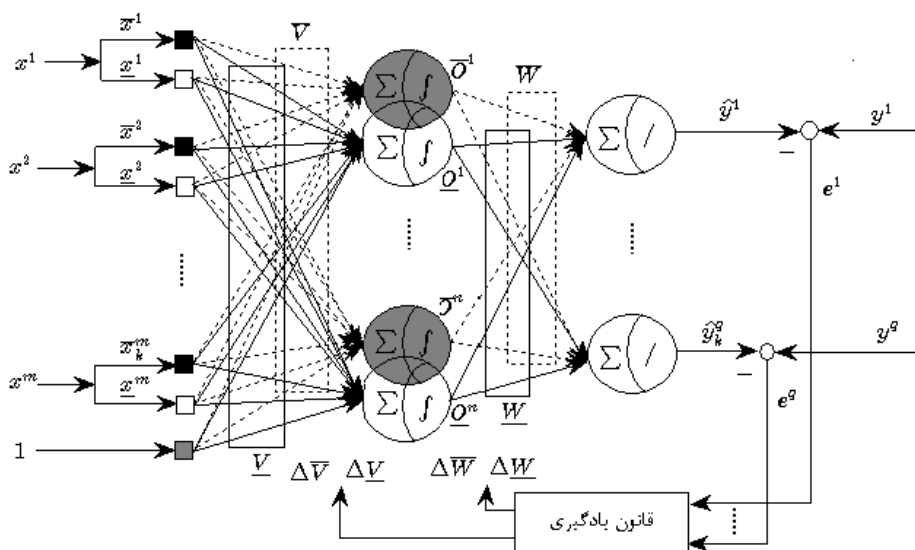
دو نورون نامتوازن از طریق اتصال دوگانه یا چهارگانه به یکدیگر متصل می‌شوند [۱۶]. شکل (۲) سه نوع اتصال ممکن بین دو نورون نامتوازن را نشان می‌دهد. هم‌پوشانی بین نورون‌های کران پایین و کران بالا بدین معنی است که بین آن‌ها تبادل اطلاعات صورت می‌گیرد. شکل (۲) (الف) اتصال کامل بین دو نورون نامتوازن r و s را نشان می‌دهد که در آن $\bar{r}$ و $\bar{s}$ هم‌زمان به $\bar{s}$ متصل شده‌اند. در شکل (۲) (ب) و (۲) (ج) تنها دو اتصال از r به s وجود دارد. اگر اتصال بین دو نورون به صورت شکل (۲) (ب) باشد، آنگاه نورون نامتوازن r نورون نامتوازن s را تحریک می‌کند و اگر اتصال بین دو نورون به صورت شکل (۲) (ج) باشد، نورون نامتوازن r نورون نامتوازن s را مهار می‌کند.

¹⁵Lingras



شکل ۲: سه نوع مختلف از اتصالات بین دو نورون نامتوازن: (الف) اتصال چهارگانه؛ (ب) اتصال تحریک؛ (ج) اتصال مهار [۱۶].

شبکه عصبی نامتوازن (۱۶) یک ساختار عصبی پیشرو با نورون‌های نامتوازن در لایه‌های مختلف آن است. در اینجا، شبکه عصبی نامتوازن با یک لایه پنهان را در نظر می‌گیریم که در آن نورون‌های لایه پنهان نامتوازن و نورون‌های لایه خروجی معمولی است (شکل ۳).



شکل ۳: ساختار شبکه عصبی نامتوازن با یک لایه پنهان.

فرض کنیم $\bar{y}$ بردار خروجی و

$$\mathbf{x} = [\bar{x}^1, x^1, \bar{x}^2, x^2, \dots, \bar{x}^m, x^m, 1]^T \quad (39)$$

بردار ورودی شبکه عصبی نامتوازن باشد که در آن $\bar{x}^i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) کران پایین و x^i ($i = 1, 2, \dots, m$) کران بالای خصوصیت x^i از یک الگوی نامتوازن است. مؤلفه آخر ۱ از $\mathbf{x}$ ورودی متناظر با بایاس نورون‌های لایه پنهان است. فرض کنیم $\bar{V}, V, \bar{W}$ و W به ترتیب وزن‌های اتصالات بین همه ورودی‌ها و نورون‌های کران پایین پنهان، وزن‌های اتصالات بین همه ورودی‌ها و نورون‌های کران بالای پنهان، وزن‌های اتصالات بین نورون‌های کران پایین پنهان و نورون‌های خروجی و وزن‌های اتصالات بین نورون‌های کران بالای پنهان و نورون‌های خروجی هستند. علاوه بر این،

¹⁶Rough-neural network

فرض کنیم $\underline{I}$ ، $\bar{I}$ و $\underline{O}$ و $\bar{O}$ به ترتیب ورودی‌های نورون‌های کران پایین پنهان، ورودی‌های نورون‌های کران بالای پنهان، خروجی‌های نورون‌های کران پایین پنهان و خروجی‌های نورون‌های کران بالای پنهان باشند. همچنین فرض کنیم ϕ تابع فعال‌ساز نورون‌های پنهان باشد در حالی که نورون‌های لایه خروجی را خطی در نظر گرفته‌ایم. فرض کنیم $\underline{V}$ و $\bar{V}$ شامل بایاس‌های لایه پنهان هستند. در این صورت،

$$\underline{I} = \underline{V}\mathbf{x}, \quad \bar{I} = \bar{V}\mathbf{x}, \quad (40)$$

$$\underline{O} = \min(\phi(\underline{I}), \phi(\bar{I})), \quad \bar{O} = \max(\phi(\underline{I}), \phi(\bar{I})) \quad (41)$$

و بردار خروجی $\hat{\mathbf{y}}$ از شبکه عصبی نامتوازن برابر است با

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \underline{W}\underline{O} + \bar{W}\bar{O} \\ &= \underline{W} \min(\phi(\underline{I}), \phi(\bar{I})) + \bar{W} \max(\phi(\underline{I}), \phi(\bar{I})) \end{aligned} \quad (42)$$

شبکه‌های عصبی نامتوازن کاربردهای متنوعی در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی، مانند پیش‌بینی حجم ترافیک، پیش‌بینی سرعت باد، دسته‌بندی و شناسایی سیستم پیدا کرده‌اند [۱، ۲، ۳، ۴، ۹، ۱۲، ۱۶، ۴۱].

۱۰. نتیجه‌گیری

نظریه مجموعه‌های نامتوازن ارزشمندی خود را از طریق کاربردهای فراوانش در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی، مانند یادگیری ماشین، پردازش تصویر، مدیریت، پزشکی و غیره نشان داده است و برای خود در میان رویکردهای غلبه بر عدم قطعیت جایگاهی به دست آورده است. یکی از زمینه‌های مهم تحقیقاتی در این خصوص، توسعه مبنای ریاضیاتی این نظریه است. مجموعه‌های نامتوازن در واقع تعمیمی از مجموعه‌های کلاسیک است. بنابراین، دستیابی به نتایج ریاضی ارزشمند و زیبا در این زمینه دور از انتظار نیست. لازم است توجه داشته باشیم که در این زمینه تحقیقاتی صورت گرفته است ولی به هیچ وجه پاسخگوی نیازهای موجود نیست.

نظریه مجموعه‌های نامتوازن یکی از زمینه‌های مهم محاسبات نرم^{۱۷} است که به حل مسائل محاسباتی با وجود عدم قطعیت می‌پردازد. رویکرد تحقیقاتی دیگر در زمینه نظریه مجموعه‌های نامتوازن ترکیب آن با سایر روش‌های محاسبات نرم یا هوش مصنوعی و دستیابی به مدل‌ها، الگوریتم‌ها و راهکارهای جدید و مفید برای حل مسائل مربوط است. یکی از زمینه‌های مطرح در این خصوص موضوع شبکه‌های عصبی نامتوازن است. این ساختارها قابلیت زیادی در شناسایی و کنترل سیستم‌ها به ویژه با وجود عدم قطعیت دارند. برای دستیابی به مدل‌هایی با کارایی بیشتر، می‌توان آن‌ها را با ساختارهای دیگری مانند شبکه‌های عصبی فازی ترکیب کرد.

مراجع

- [1] G. Ahmadi, Stable rough extreme learning machines for the identification of uncertain continuous-time nonlinear systems, *Control and Optimization in Appl. Math.* **4** (2019) 83–101.
- [2] G. Ahmadi and M. Teshnehlal, Designing and implementation of stable sinusoidal rough-neural identifier, *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, **28** (2017) 1774–1786.
- [3] G. Ahmadi and M. Teshnehlal, Identification of multiple input-multiple output non-linear system cement rotary kiln using stochastic gradient-based rough-neural network, *Journal of AI and Data Mining*, **8** (2020) 417–425.
- [4] G. Ahmadi, M. Teshnehlal and F. Soltanian, A higher order online Lyapunov-based emotional learning for rough-neural identifiers, *Control and Optimization in Appl. Math.*, **3** (2018) 87–108.

¹⁷Soft computing

- [5] R. Ariew, D. Garber and G. W. Leibniz, *Philosophical Essays*, Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1989.
- [6] I. Chikalov, V. Lozin, I. Lozina, M. Moshkov, H. S. Nguyen, A. Skowron and B. Zielosko, *Three Approaches to Data Analysis Test Theory, Rough Sets and Logical Analysis of Data*, Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [7] D. Dubois and H. Prade, *Foreword*, Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data, System Theory, Knowledge Engineering and Problem Solving, **9**, Kluwer, Dordrecht, the Netherlands, 1992.
- [8] M. M. Gupta, L. Jin and N. Homma, *Static and Dynamic Neural Networks from Fundamentals to Advanced Theory*, John Wiley & Sons Inc, Hoboken, NJ, 2003.
- [9] Y. F. Hassan, Rough neural networks in adapting cellular automata rule for reducing image noise, *International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering*, **8** (2014) 71-74.
- [10] W. Heisenberg, Ueber den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik, *Zeitschrift für Physik*, **43** (1927) 172-198.
- [11] S. Hirano and S. Tsumoto, Rough representation of a region of interest in medical images, *Int. J. Approx. Reason.*, **40** (2005) 23-34.
- [12] H. Jahangir, M. A. Golkar, F. Alhameli, A. Mazouz, A. Ahmadian and A. Elkamel, Short-term wind speed forecasting framework based on stacked denoising auto-encoders with rough ANN, *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, **38** (2020) 100601.
- [13] G. Jeon, Anisetti, E. Damiani and O. Monga, Real-time image processing systems using fuzzy and rough sets techniques, *Soft Computing*, **22** (2018) 1381-1384.
- [14] R. Keefe, *Theories of Vagueness*, Cambridge Studies in Philosophy, Cambridge, UK, 2000.
- [15] Y. Lin and S. Liu, A historical introduction to grey systems theory, *Proc. IEEE Int. Conf. Syst., Man Cybern.*, The Hague, The Netherlands, 2004, 2403-2408.
- [16] P. J. Lingras, Rough-neural networks, *Proc. 6th Int. Conf. IPMU*, Granada, 1996, 1445-1450.
- [17] H. S. Nguyen and A. Skowron, *Rough sets: from rudiments to challenges*, Rough Sets and Intelligent Systems – Professor Zdzisław Pawlak in Memoriam, A. Skowron, Z. Suraj, eds., Springer-Verlag, Berlin, 2013, 75-173.
- [18] S. K. Pal and A. Skowron, *Rough Fuzzy Hybridization: A New Trend in Decision-Making*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.
- [19] Z. Pawlak and A. Skowron, Rudiments of rough sets, *Information Sciences*, **177** (2007) 3-27.
- [20] Z. Pawlak, *Rough Sets*, University of Information Technology and Management, Warsaw, Poland, available at <http://bcpw.bg.pw.edu.pl/Content/2026/RoughSetsRep29.pdf>, 2019.
- [21] Z. Pawlak, *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1991.
- [22] Z. Pawlak, Rough sets, *Internat. J. Comput. Inform. Sci.*, **11** (1982) 341-356.
- [23] Z. Pawlak and A. Skowron, Rough membership functions, in *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence*, R. Yager, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk, eds., John Wiley & Sons, New York, 1994, 251-271.
- [24] L. Polkowski, *Rough Sets, Rough Mereology and Uncertainty*, Thriving Rough Sets, Studies in Computational Intelligence, **708**, G. Wang, A. Skowron, Y. Yao, D. Ślęzak and L. Polkowski, eds., Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2017, 49-85.
- [25] B. Russell, *The Principles of Mathematics*, 2nd ed., George Allen & Unwin Ltd., London, Great Britain, 1937.
- [26] A. Skowron, Rough sets and vague concepts, *Fund. Inform.*, **64** (2005) 417-431.
- [27] A. Skowron and S. Dutta, Rough sets: past, present, and future, *Nat. Comput.*, **17** (2018) 855-876.
- [28] A. Skowron and J. F. Peters, *Rough-granular computing*, Handbook of Granular Computing, W. Pedrycz, A. Skowron, V. Kreinovich, eds., John Wiley & Sons, USA, 2008, 285-327.

- [29] R. Slowinski, S. Greco and B. Matarazzo, *Rough sets and decision making*, in Encyclopedia of Complexity and Systems Science, R. Meyers, ed., Springer, Heidelberg, 2009, 7753–7787.
- [30] S. Tsumoto, *Modelling medical diagnostic rules based on rough sets*, Proceeding of International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, Warsaw, Poland, 1998 475–482.
- [31] S. K. M. Wong and W. Ziarko, *A probabilistic model of approximate classification and decision rules with uncertainty in inductive learning*, Technical Report CS-85-23, Department of Computer Science, University of Regina, 1985.
- [32] Y. Yao, Three-way decision and granular computing, *Int. J. Approx. Reason.* **103** (2018) 107–123.
- [33] Y. Yao, *Rough sets and three-way decisions*, International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, LNCS (LNAI) 9436, D. Ciucci, G. Y. Wang, S. Mitra and W. Z. Wu, eds., Tianjin, China, 2015 62–73.
- [34] Y. Yao, *An outline of a theory of three-way decisions*, RSCTC 2012, LNCS (LNAI) 7413, J. Yao, Y. Yang, R. Slowinski, S. Greco, H. Li, S. Mitra and L. Polkowski, eds., Springer, Heidelberg, 2012 1–17.
- [35] Y. Yao, *Three-way decision: An interpretation of rules in rough set theory*, RSKT 2009, LNCS (LNAI), 5589, P. Wen, Y. Li, L. Polkowski, Y. Yao, H. Tsumoto and G. Wang, eds., Springer, Heidelberg, 2009 642–649.
- [36] Y. Yao, Probabilistic rough set approximations, *International Journal of Approximation Reasoning*, **49** (2008) 255–271.
- [37] Y. Yao and X. F. Deng, Quantitative rough sets based on subethood measures, *Inform. Sci.*, **267** (2014) 306–322.
- [38] Y. Yao, S. Greco and R. Slowinski, *Probabilistic rough sets*, Springer Handbook of Computational Intelligence, J. Kacprzyk and W. Pedrycz, eds., Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2015 387–411.
- [39] L. A. Zadeh, A new direction in AI: Toward a computational theory of perceptions, *AI Magazine*, **22** (2001) 73–84.
- [40] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and Control*, **8** (1965) 338–353.
- [41] Q. Zhang, Q. Xie and G. Wang, A survey on rough set theory and its applications, *CAAI Trans. Intell. Technol.*, **1** (2016) 323–333.

قاسم احمدی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
g.ahmadi@pnu.ac.ir

قاسم احمدی در سال ۱۳۸۲، مدرک کارشناسی خود را در رشته ریاضی کاربردی از دانشگاه کاشان و در سال ۱۳۸۴، مدرک کارشناسی ارشد خود را در رشته ریاضی کاربردی از دانشگاه صنعتی اصفهان گرفت. وی در سال ۱۳۹۵، از رساله دکترای خود در رشته ریاضی کاربردی (کنترل و بهینه‌سازی)، در مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام‌نور دفاع کرد و در حال حاضر، استادیار دانشگاه پیام‌نور است. زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه وی، شناسایی و کنترل هوشمند، شبکه‌های عصبی و نظریه مجموعه‌های نامتوازن است.

