

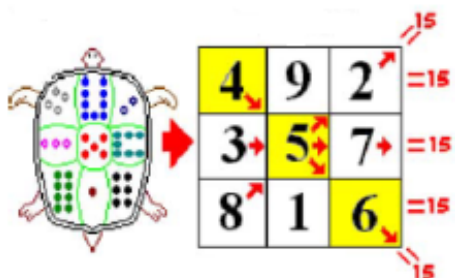
مربع‌های جادویی و جبرخطی

عفت گلپیر رابوکی* و هدی پورمند

چکیده. مربع جادویی جدولی از اعداد حقیقی است که مجموع هرسطر، ستون، و قطر اصلی آن عددی ثابت به نام عدد ثابت جادویی است. مربع‌های جادویی انواع مختلفی دارند که از متداول‌ترین آن‌ها می‌توان به مربع جادویی صفر، منظم، نرمال، و مورب اشاره کرد. این مربع‌ها از جهات مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. روش‌های پر کردن آن‌ها بحث جالب و مفصلی است که تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. ما در این مقاله به بررسی خواص مربع‌های جادویی از نظر رتبه، وارون‌پذیری، بعد فضای برداری تشکیل‌دهنده و مقادیر ویژه می‌پردازیم.

۱. مقدمه و تاریخچه

اولین نمونه مربع‌های جادویی در چین کهن کشف شده است که متعلق به دست‌نوشته‌ای قدیمی مربوط به ۲۲۰۰ سال قبل از میلاد است. براساس افسانه‌ای پادشاه یو^۱ مشاهده کرد که لاک‌پشتی از رودخانه زرد خارج شده که پوسته لاک آن یک الگوی بسیار غیرمعمول به صورت یک شبکه سه در سه از تعداد مختلفی از لکه‌ها است [۹، ۱]. چون هیچ شاهد عینی نداریم پس فقط با حدس و گمان می‌توان گفت که لاک‌پشت احتمالا به این شکل بوده است:



عبارات و کلمات کلیدی. مربع جادویی، فضای برداری، رتبه، مقدار ویژه، بردار ویژه، مقدار تکین.

دبیر تخصصی رابط: علیرضا عبدالهی

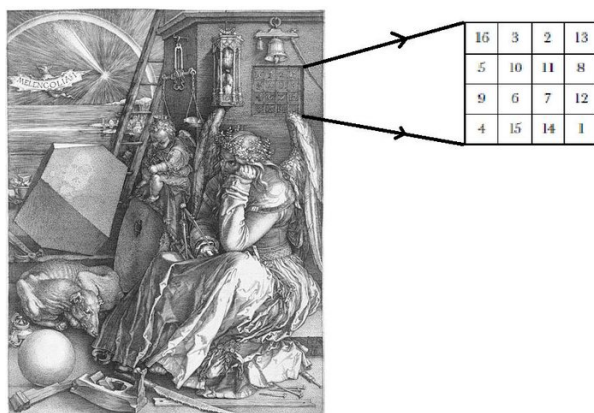
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۲۹

نوع مقاله: ترویجی

* نویسنده مسئول

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.126556.1408>

این مربع را مربع جادویی لوشیو^۲ می‌نامند و در فنگ‌شویی، فلسفه تعادل و هماهنگی در محیط و زندگی ما، مورد استفاده قرار می‌گیرد. مربع‌های جادویی بار معنوی داشتند و در پوشاک، نقاب‌ها، و صنایع دستی مذهبی به کار می‌رفتند و با مفاهیم پیشگویی، کیمیاگری، و ستاره‌شناسی آمیخته بوده‌اند. مستنداتی در دست است که نشان می‌دهد مربع‌های جادویی در هند، چین، آفریقا، ایران، و در بین اعراب شناخته شده و مورد توجه بوده‌اند. یک نمونه مشهور از مربع جادویی توسط آلبرشت دورر^۳ مطرح شد. این مربع در یک نقاشی و پشت سر فرشته‌ای کشیده شده است:



مربع‌های جادویی در ریاضیات ترکیبیاتی، ماتریس‌ها و هندسه بکار برده شده‌اند و البته همچنان تحقیق در مورد ویژگی مربع‌های جادویی توسط ریاضیدانان ادامه دارد، با این تفاوت که مربع‌های جادویی جای خود را به مکعب‌ها و حتی ابرمکعب‌های چهاربعدی جادویی داده‌اند. در بخش ۲ی این مقاله به تعریف مربع جادویی و بعضی ثابت‌های مهم وابسته به آن و طرز تولید بعضی از مربع‌های جادویی می‌پردازیم. در بخش ۳ و ۴ بعضی از خواص مربع‌های جادویی و چند دسته از این مربع‌ها را معرفی می‌کنیم. و در آخر یکی از ویژگی‌های مربع جادویی نرمال را با استفاده از نرم افزار MATLAB بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه از قضیه پرون-فروبنیوس در بیان برخی ویژگی‌های مربع جادویی استفاده خواهیم کرد این قضیه را یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱ (قضیه پرون-فروبنیوس). فرض کنید A ماتریسی مثبت $n \times n$ باشد. در این صورت شعاع طیفی A یک مقدار ویژه ساده A است که مقدار ویژه پرون-فروبنیوس و بردار ویژه نظیر با درایه‌های مثبت را بردار ویژه پرون-فروبنیوس می‌نامند.

۲. مربع‌های جادویی

با یک تعریف اساسی شروع می‌کنیم.

تعریف ۲. یک مربع جادویی از مرتبه n ، مربعی با n سطر و n ستون است به طوری که مجموع اعداد سطرها، ستون‌ها، و قطرهای آن مقداری ثابت به نام ثابت جادویی است که با $\mu(A)$ یا به طور مختصر μ نشان داده می‌شود.

چند مثال از مربع‌های جادویی می‌آوریم: یک مربع جادویی 3×3 را می‌توان با استفاده از اعداد

۴، ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۰، ۲۴، ۲۸، ۳۲، ۳۶

² Lo Shu ³ Albrecht Durer

به صورت زیر ساخت.

۲۴	۴	۳۲
۲۸	۲۰	۱۲
۸	۳۶	۱۶

در این حالت عدد جادویی برابر است با

$$\mu = ۳۲ + ۴ + ۲۴ = ۱۲ + ۲۰ + ۲۸ = ۱۶ + ۳۶ + ۸ = ۶۰$$

دنباله اعداد $a + (k-1)d$ برای $k = 1, 2, \dots, n^2$ را در نظر بگیرید. با اعداد $a + (n-1)d$ می‌توان یک مربع جادویی n در n ساخت. برای مثال دنباله اعداد $۷ + (k-1)۳$ را برای $k = 1, 2, \dots, ۱۶$ در نظر بگیرید. اعداد این دنباله عبارت است از $۷, ۱۰, \dots, ۵۲$ که یک مربع جادویی با عدد جادویی ۱۱۸ می‌سازند:

۵۲	۱۰	۱۳	۴۳
۱۹	۳۷	۳۴	۲۸
۳۱	۲۵	۲۲	۴۰
۱۶	۴۶	۴۹	۷

یک مربع جادویی دیگر از مرتبه ۴ با اعداد ۱ تا ۱۶ عبارت است از

۱۶	۵	۹	۴
۲	۱۱	۷	۱۴
۳	۱۰	۶	۱۵
۱۳	۸	۱۲	۱

عدد جادویی این مربع برابر ۳۴ است.

تعریف ۳. ماتریس جایگشت J را ماتریس برگردان^۴ می‌نامند هرگاه از بازنویسی سطرها و ستون‌های ماتریس همانی به ترتیب عکس حاصل شود.

درایه‌های یک ماتریس برگردان از مرتبه n به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \end{cases}$$

درایه‌های قطر فرعی J برابر ۱ و بقیه درایه‌ها برابر صفر است. ماتریس برگردان برای برعکس کردن سطرها یا ستون‌های بردارها و ماتریس‌ها به کار می‌رود. ضرب J از سمت چپ ترتیب سطرها و ضرب آن از سمت راست ترتیب ستون‌های ماتریس را برعکس می‌کند. برای ماتریس A ، JA بازتاب عمودی A و AJ بازتاب افقی آن است. به علاوه، $J^2 = I$ و در نتیجه $J = J^{-1} = J^T$ که نشان می‌دهد J ماتریسی متعامد است.

^۴ reverse matrix

تعریف ۴. فرض کنید $e = (1, \dots, 1)^T$ یک بردار ستونی از مرتبه n و e_k ستون k ام ماتریس همانی $n \times n$ باشد. یک مربع جادویی از مرتبه n ، یک ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه n است که دارای خواص زیر باشد.

$$e_i^T A e = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \mu \quad (M_1) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$e^T A e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} = \mu \quad (M_2) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \mu \quad (M_3)$$

$$\text{trace}(JA) = \sum_{i=1}^n a_{i(n-i+1)} = \mu \quad (M_4)$$

عدد μ ثابت جادویی نامیده می‌شود. معادلات M_1 و M_2 نشان می‌دهد که مجموع سطرها و ستون‌ها و معادلات M_3 و M_4 بیان می‌کند که مجموع درایه‌های قطرهای اصلی و فرعی برابر μ یند. ثابت جادویی در رابطه

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}{n}$$

صدق می‌کند.

۳. ویژگی‌های مربع‌های جادویی

مجموعه تمام مربع‌های جادویی از مرتبه n را با $MS(n)$ نشان می‌دهیم. برخی خواص مربع‌های جادویی از جمله مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن‌ها در [۲، ۳، ۴، ۹] مورد بررسی قرار گرفته است. ما در ادامه چند خاصیت مهم آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

خاصیت ۱. فرض کنید A و B دو مربع جادویی با ثابت‌های جادویی μ_A و μ_B و α اسکالری باشد. در این صورت $\alpha A + B$ مربعی جادویی با ثابت جادویی $\alpha \mu_A + \mu_B$ است. بنابراین، $MS(n)$ ، زیرفضایی برداری از فضای ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط است. بعد این فضا برابر $n(n-2)$ است.

اثبات. چهار خاصیت مربع جادویی را برای ترکیب $\alpha A + B$ بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^n (\alpha a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} = \alpha \mu_A + \mu_B \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^n \alpha a_{ij} + \sum_{i=1}^n b_{ij} = \alpha \mu_A + \mu_B \quad (2)$$

$$(\alpha A + B) = (\alpha A) + (B) = \alpha \mu_A + \mu_B \quad (3)$$

$$(J(\alpha A + B)) = (J(\alpha A)) + (JB) = \alpha \mu_A + \mu_B \quad (4)$$

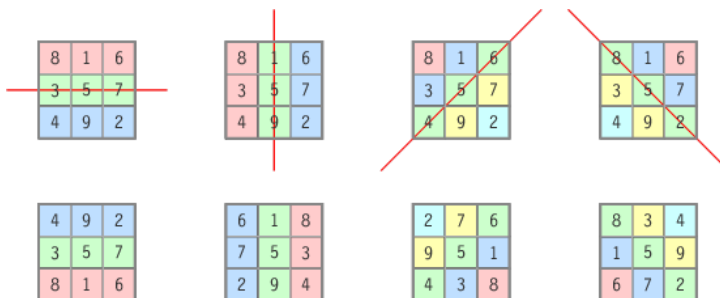
□

برای دیدن اثباتی از بعد $MS(n)$ به [۹] مراجعه کنید.

خاصیت ۲. ترانواده هر مربع جادویی مربعی جادویی با همان ثابت جادویی است.

خاصیت ۳. فرض کنید B ماتریسی باشد که درایه‌های آن از A با اضافه، کم، ضرب یا تقسیم کردن بر یک عدد مشخص (بجز صفر برای ضرب و تقسیم) به‌دست آمده باشد. در این صورت $B = \beta A + \alpha E$ ، که در آن E یک ماتریس با درایه‌های ۱ است. اگر A مربعی جادویی با ثابت جادویی μ_A باشد B نیز مربعی جادویی است که ثابت جادویی آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mu_B = \beta \mu_A + \alpha n.$$



شکل ۱: انعکاس مربع جادویی

خاصیت ۴. با توجه به اینکه، مجموع سطرها و ستون‌های ماتریس جادویی برابر عدد جادویی است، بنابراین

$$(۱) \quad Ae = \mu e, \quad e^T A = \mu e^T,$$

که نشان می‌دهد μ یک مقدار ویژه و e بردار ویژه چپ و راست نظیر μ برای ماتریس A است. از آنجاکه درایه‌های مربع جادویی همگی مثبت‌اند، طبق قضیه پرون-فروبنیوس μ دارای مرتبه جبری ۱ و بقیه مقادیر ویژه A اندازه‌ای اکیداً کمتر از μ دارند.

خاصیت ۵. فرض کنید A یک مربع جادویی از مرتبه n و $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه آن باشند. آنگاه

$$(۲) \quad (A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \mu.$$

خاصیت ۶. ۱- نرم و نرم بی‌نهایت هر مربع جادویی برای ثابت جادویی آن است:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} = \mu, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} = \mu.$$

قضیه ۵. اگر A مربع جادویی باشد، $JA^T J, A^T J, JA^T, A^T, JAJ, AJ, JA$ نیز مربع جادویی‌اند.

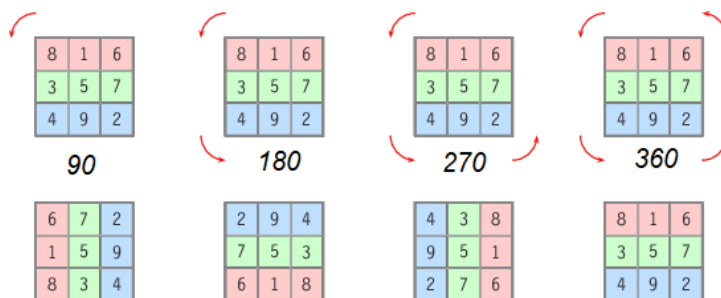
اثبات. نشان می‌دهیم JA چهار ویژگی مربع جادویی، M_1 تا M_4 را دارد:

$$e_i^T (JA) e = (e_i^T J) A e = e_{n-i+1}^T A e = \mu \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

توجه داریم که از چینش عکس درایه‌های e_i بردار e_{n-i+1} به دست می‌آید، بنابراین $e_i^T J = e_{n-i+1}^T$. به طور مشابه

$$e^T (JA) e_i = (e^T J) A e_i = e^T A e_i = \mu \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

خاصیت M_3 روی JA همان خاصیت M_4 روی A و خاصیت M_4 روی JA همان خاصیت M_3 روی A است. پس JA مربع جادویی است. به طور مشابه برای بقیه موارد هم می‌توان برقراری خواص مربع جادویی را نشان داد. □



شکل ۲: دوران مربع جادویی

خاصیت ۷. فرض کنید A مربع جادویی و A' تبدیل یافته A تحت تبدیلات دوران و یا انعکاس باشد A' نیز مربع جادویی با ثابت جادویی برابر A است؛ زیرا مکان درایه‌ها نسبت به هم در A و A' تغییر نکرده است. در شکل ۱ انعکاس‌های مربع جادویی لوشیو را مشاهده می‌کنیم. همچنین دوران مربع جادویی لوشیو با زوایای 90° ، 180° ، 270° و 360° منجر به تولید مربع جادویی می‌شود (شکل ۲).

تعریف ۶. ماتریس A را متقارن گویند هرگاه $A = A^T$ و مرکزمتقارن نامند هرگاه $JAJ = A$.

۴. مربع نیمه‌جادویی

اگر یک شرط از تعریف مربع جادویی را حذف کنیم اشیایی به دست می‌آید که به خودی خود جالب توجه‌اند.

تعریف ۷. یک مربع نیمه‌جادویی^۵ یک ماتریس $n \times n$ از اعداد حقیقی است که مجموع سطرها و ستون‌های آن برابر عدد ثابت μ باشد [۲].

قضیه ۸. مجموعه مربع‌های نیمه‌جادویی از مرتبه n زیرفضای $\mathbb{R}^{n \times n}$ است. اگر A و B دو مربع نیمه‌جادویی با ثابت‌های جادویی μ_A و μ_B باشد. آنگاه AB یک مربع نیمه‌جادویی با ثابت جادویی $\mu_A \mu_B$ است.

اثبات. اثبات زیرفضا بودن مشابه مربع‌های جادویی است. نشان می‌دهیم حاصل ضرب دو مربع نیمه‌جادویی، مربعی نیمه‌جادویی است. فرض کنید $D = AB$ ، در این صورت

$$(۳) \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

مجموع درایه‌های هر سطر عبارت است از

$$(۴) \quad \sum_{j=1}^n d_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n b_{kj} = \mu_B \sum_{k=1}^n a_{ik} = \mu_B \mu_A$$

و مجموع درایه‌های هر ستون عبارت است از

$$(۵) \quad \sum_{i=1}^n d_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{kj} \sum_{i=1}^n a_{ik} = \mu_A \sum_{k=1}^n b_{kj} = \mu_A \mu_B.$$

□

در ادامه تاثیر ماتریس‌های جایگشت را روی مربع‌های نیمه‌جادویی بررسی می‌کنیم.

⁵ semi-magic square

قضیه ۹. اگر P یک ماتریس جایگشت و A یک مربع نیمه‌جادویی باشد، AP ، PA و PAP نیز نیمه‌جادویی‌اند.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که PA در خواص M_1 و M_2 صدق می‌کنند. داریم

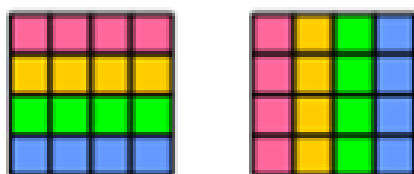
$$e_i^T PAe = (P^T e_i)^T Ae = e_k^T Ae = \mu,$$

بنابراین $P^T e_i = e_k$ به همین ترتیب

$$e^T (PA)e_j = (e^T P)Ae_j = e^T Ae_j = \mu$$

اثبات اینکه AP نیمه‌جادویی است مشابه است و از آنجا که PA و AP نیمه‌جادویی‌اند پس PAP نیز نیمه‌جادویی است. $\square$

فرض کنید E یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های یک باشد. در این صورت، E مربعی جادویی با ثابت جادویی n است که مقدارویژه ساده آن نیز است. همچنین، صفر یک مقدارویژه از مرتبه $n - 1$ برای E است. اگر A یک ماتریس نیمه‌جادویی باشد و $p \in \mathbb{C}$ ، آنگاه، مقدارویژه ماتریس $A + pE$ با مقدارویژه A برابر است بجز مقدارویژه نظیر μ که برابر $\mu + pn$ است. به علاوه، اگر درایه‌های A نامنفی باشد، آنگاه اندازه مقدارویژه کمتر یا مساوی ثابت جادویی است. اگر اعداد به کاررفته در یک مربع نیمه‌جادویی عبارت از $1, 2, \dots, n^2$ باشد، آنرا مربع نیمه‌جادویی طبیعی^۶ می‌نامند. اگر درایه‌های یک ماتریس نیمه‌جادویی مثبت باشد، طبق قضیه پرون-فروبنیوس، ثابت جادویی یک مقدارویژه ساده آن است (یعنی تکراری نیست).



شکل ۳: مربع نیمه‌جادویی

۵. برخی انواع مربع جادویی

انواع مختلفی از مربع‌های جادویی با خواص ویژه تعریف شده‌اند. در ادامه به معرفی مربع جادویی صفر، مورب، منظم، و نرمال می‌پردازیم.

مربع جادویی صفر. اگر ثابت جادویی مربعی جادویی برابر صفر باشد، آنرا مربع جادویی صفر می‌نامیم. نظیر هر مربع جادویی A از مرتبه n با ثابت جادویی μ یک مربع جادویی صفر با رابطه $M = A - \frac{\mu}{n}E$ وجود دارد که در اینجا E یک ماتریس با درایه‌های ۱ است. به سادگی می‌توان نشان داد که مربع‌های جادویی صفر تشکیل زیرفضا می‌دهند.

قضیه ۱۰. [۹] بعد فضای مربع‌های جادویی صفر از مرتبه n برابر $n^2 - 2n - 1$ است.

^۶ natural semi-magic square

مربع جادویی نرمال. اگر اعدادی که در مربع جادویی به کار می‌بریم $1, 2, \dots, n^2$ باشد، آنگاه $\mu = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$ و آن مربع جادویی را مربع جادویی نرمال یا طبیعی^۷ می‌نامند.
 شکل ۴ یک مربع جادویی نرمال از مرتبه ۴ را نشان می‌دهد.

16	3	2	13	→ 34
5	10	11	8	→ 34
9	6	7	12	→ 34
4	15	14	1	→ 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

شکل ۴: مربع جادویی نرمال از مرتبه ۴

فرض کنید می‌خواهیم یک مربع جادویی نرمال 3×3 بسازیم. پس اعداد ۱ تا ۹ را در ماتریسی قرار می‌دهیم که مجموع سطرها، ستون‌ها، قطر اصلی، و قطر فرعی برابر $\mu = \frac{3(1^2)}{2} = 15$ بشود.

$$\begin{array}{ccc}
 c & b & a \\
 f & e & d \\
 i & h & g
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 a + b + c = 15 \\
 d + e + f = 15 \\
 g + h + i = 15 \\
 a + d + g = 15 \\
 b + e + h = 15 \\
 c + f + i = 15 \\
 a + e + i = 15 \\
 c + e + g = 15
 \end{array}$$

پس باید یک دستگاه معادلات خطی با ۸ معادله و ۹ مجهول به صورت زیر را حل کنیم.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 h \\
 i
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15 \\
 15
 \end{bmatrix}$$

یک جواب این دستگاه عبارت است از

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

^۷ natural, normal

مربع جادویی مورب. مربع جاویی مورب^۸ مربعی جادویی است که مجموع درایه‌های قطرهای شکسته^۹ آن برابر ثابت جادویی باشد. یک قطر شکسته از ماتریس از مرتبه n ، عبارت است از دو قطر شامل n عنصر موازی قطرهای اصلی و فرعی ماتریس. در شکل زیر قطرهای شکسته به صورت خانه‌های هم‌رنگ رسم شده است.



شکل ۵: مربع جادویی مورب

ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 & 6 & 12 \\ 14 & 4 & 9 & 7 \\ 11 & 5 & 16 & 2 \\ 8 & 10 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

مربع جادویی مورب است، زیرا روابط زیر برقرار است.

1	15	6	12
14	4	9	7
11	5	16	2
8	10	3	13

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 16 + 13 &= 34, & 15 + 9 + 2 + 8 &= 34, \\ 6 + 7 + 11 + 10 &= 34, & 14 + 5 + 3 + 12 &= 34, \\ 12 + 9 + 5 + 8 &= 34, & 6 + 4 + 11 + 13 &= 34, \\ 15 + 14 + 2 + 3 &= 34, & 1 + 7 + 16 + 10 &= 34. \end{aligned}$$

مقادیر ویژه این ماتریس برابر 34 ، $2\sqrt{34}$ ، $-2\sqrt{34}$ و 0 است.

هر ماتریس جادویی مورب از مرتبه زوج وارون‌ناپذیر است. مجموع دوماتریس مورب و ضرب در اسکالر در آن یک ماتریس مورب است. در نتیجه مجموعه ماتریس‌های مورب فضایی برداری می‌سازند که بعد آن $n^2 - 4n + 4$ است. همچنین مجموعه مربع‌های مورب با ثابت جادویی صفر فضایی برداری است که بعد آن برابر $n^2 - 4n + 3$ است [۲].

⁸ pandigital ⁹ broken diagonal

مربع جادویی منظم. مربع جادویی A را منظم^{۱۰} گوئیم هرگاه درایه‌های آن دارای خاصیت زیر باشند.

$$a_{ij} + a_{n-i+1, n-j+1} = \frac{2\mu}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n),$$

که در آن μ ثابت جادویی A است. درایه‌های a_{ij} و $a_{n-i+1, n-j+1}$ را مکمل گویند. مربع جادویی منظم را همبسته^{۱۱} یا متقارن^{۱۲} نیز می‌نامند.

مربع جادویی 4×4 مشهور دورر به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که

$$a_{11} + a_{44} = 17, \quad a_{13} + a_{42} = 17, \quad a_{24} + a_{31} = 17$$

در مربع بالا ۱ و ۱۶ مکمل و ۲ و ۱۵ نیز مکمل هستند. هر درایه و مکمل آن در فاصله یکسان از مرکز ولی در مسیرهای مختلفی از ماتریس قرار دارند. یعنی اگر یکی در یک چهارم بالایی سمت چپ قرار گیرد مکمل آن در یک چهارم پایینی سمت راست واقع می‌شود.

توجه کنید که

$$(JAJ)_{ij} = a_{n-i+1, n-j+1}$$

و ثابت جادویی A و JAJ برابر هستند. بنابراین،

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + a_{n-i+1, n-j+1}) = 2\mu.$$

هر ماتریس منظم A در معادله زیر صدق می‌کند.

$$(6) \quad A + JAJ = \frac{2\mu}{n} E$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که جمع دو مربع جادویی منظم و ضرب اسکالر در آن، یک مربع جادویی منظم است. بنابراین، مجموعه مربع‌های جادویی منظم از مرتبه n زیرفضایی برداری است و بعد آن برابر $\frac{(n-1)^2}{2} + 1$ است اگر n فرد و برابر $\frac{n(n-2)}{2} + 1$ است اگر n زوج باشد.

¹⁰ regular ¹¹ associated ¹² symmetrical

مجموع دو مربع جادویی منظم با ثابت جادویی صفر و ضرب اسکالر در آن، یک مربع جادویی منظم صفر است. در نتیجه مجموعه مربع‌های جادویی منظم صفر زیرفضایی برداری است و بعد آن برای های n فرد برابر $\frac{(n-1)^2}{2}$ و برای های n زوج برابر $\frac{n(n-2)}{2}$ است [۲].
به مثال زیر توجه کنید. فرض کنید A مربع جادویی منظم 4×4 دورر باشد. مقادیر ویژه آن عبارت‌اند از:

$$\lambda_1 = 34, \quad \lambda_2 = 8, \quad \lambda_3 = -8, \quad \lambda_4 = 0,$$

و بردارهای ویژه نظیر آن‌ها عبارت است از

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ثابت جادویی برابر λ_1 و u_1 بردار ویژه نظیر آن است. مجموع درایه‌های بردارهای ویژه بجز u_1 برابر صفرند یعنی بر بردار e عمودند. ماتریس A ، دو مقدار ویژه متقارن 8 و -8 دارد که درایه بردار ویژه نظیر آن‌ها برعکس یکدیگر است و اگر درایه‌های u_4 را از انتها به ابتدا بچینیم $-u_4$ به دست می‌آید. اکنون ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$(V) \quad Z = A - \left(\frac{\mu}{n}\right)E$$

قضیه بعد نشان می‌دهد بجز μ مقدار ویژه A و Z یکسان‌اند. Z را مربع جادویی صفر نظیر A می‌نامند.

قضیه ۱۱. فرض کنید A یک مربع جادویی منظم $n \times n$ و Z طبق رابطه (۷) تعریف شده باشد. آنگاه A و Z دارای مقادیر ویژه یکسان بجز μ اند. به علاوه، Z دارای یک مقدار ویژه صفر بجای مقدار ویژه μ برای A است. A و Z بردارهای ویژه یکسان دارند.

اثبات. اول اینکه e بردار ویژه Z نظیر مقدار ویژه صفر است، زیرا

$$Ze = Ae - \left(\frac{\mu}{n}\right)Ee = \mu e - \frac{\mu}{n}ne = 0.$$

حال فرض کنید λ یک مقدار ویژه A ، متمایز از μ ، و x بردار ویژه نظیر آن باشد. در این صورت x و e متعامدند، زیرا

$$e^T A = \mu e^T \implies e^T A x = \mu e^T x \implies \lambda e^T x = \mu e^T x \implies (\lambda - \mu)e^T x = 0,$$

در نتیجه $e^T x = 0$. به علاوه، λ یک مقدار ویژه و x بردار ویژه نظیر آن برای ماتریس Z است، زیرا

$$Zx = Ax - \underbrace{\left(\frac{\mu}{n}\right)e^T x}_0 = \lambda x.$$

□

قضیه ۱۲. مقادیر ویژه غیر صفر Z قرینه‌اند.

اثبات. با ضرب طرفین رابطه (۷) از چپ و راست در J ، داریم

$$(۸) \quad JZJ = JAJ - \left(\frac{\mu}{n}\right)JEJ$$

از جمع روابط (۷) و (۸) و توجه به این نکته که $JEJ = E$ داریم

$$(۹) \quad Z + JZJ = A + JAJ - 2\left(\frac{\mu}{n}\right)E.$$

طبق رابطه (۶)، سمت راست (۹) برابر صفر است. پس

$$(۱۰) \quad JZJ = -Z.$$

از آنجا که $J = J^{-1}$ ، بنابراین، JZJ و Z متشابه‌اند و مقادیر ویژه یکسان دارند. در نتیجه مقادیر ویژه Z و $-Z$ برابرند. از طرفی مقادیر ویژه $-Z$ قرینه مقادیر ویژه Z است. در نتیجه مقادیر ویژه غیر صفر Z قرینه هستند. □

ماتریس‌هایی را که در رابطه (۱۰) صدق می‌کنند مرکزمتقارن-کج^{۱۳} می‌نامند. در قضیه زیر یک ویژگی مهم این ماتریس‌ها آمده است.

قضیه ۱۳. فرض کنید λ یک مقدار ویژه ماتریس مرکزمتقارن-کج Z باشد، آنگاه $-\lambda$ نیز یک مقدار ویژه آن است. به علاوه، اگر $Zx = \lambda x$ آنگاه $Z(Jx) = -\lambda(Jx)$.

اثبات. در اثبات قضیه قبل نشان دادیم که مقادیر ویژه Z و $-Z$ یکسان هستند. بنابراین اگر λ یک مقدار ویژه Z باشد $-\lambda$ نیز یک مقدار ویژه آن است. حال فرض کنید λ یک مقدار ویژه Z و x بردار ویژه نظیر آن باشد، یعنی $Zx = \lambda x$. در نتیجه

$$JZJx = -\lambda Jx, \quad JZJx = -Zx = -\lambda x.$$

□

در ادامه نشان می‌دهیم مربع‌های جادویی منظم از مرتبه زوج دارای مقادیر ویژه صفر و در نتیجه وارون‌ناپذیرند.

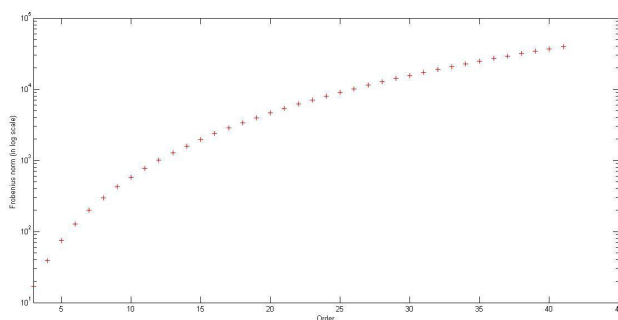
قضیه ۱۴. فرض کنید ماتریس مربعی مختلط B متشابه با $-B$ باشد. اگر یک بلوک ژوردان $J_K(\lambda)$ در صورت کانونی ژوردان B ، m بار تکرار شود، بلوک ژوردان $J_K(-\lambda)$ نیز m بار تکرار می‌شود.

چون B و $-B$ متشابه‌اند، صورت کانونی ژوردان آن‌ها مشابه یکدیگر است. از طرفی، مقادیر ویژه B و $-B$ قرینه‌اند. در نتیجه در صورت ژوردان ماتریس B مقادیر ویژه قرینه، مرتبه تکرار یکسان دارند.

قضیه ۱۵. اگر A یک مربع جادویی منظم از مرتبه زوج باشد، آنگاه A وارون‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنید Z طبق (۷) تعریف شده است. نظیر هر مقدار ویژه مثبت، قرینه آن با همان مرتبه جبری نیز یک مقدار ویژه Z است. برای هر مقدار ویژه غیر صفر λ از Z ، بلوک‌های ژوردان λ و $-\lambda$ مشابه یکدیگر است، پس مجموع مرتبه جبری مقادیر ویژه غیر صفر Z زوج است. اما صفر نیز یک مقدار ویژه Z از مرتبه زوج است. در نتیجه A حداقل یک مقدار ویژه صفر دارد. □

¹³ skew-centrosymmetric, centroskew



شکل ۶: نرم فروبنیوس برخی مربع‌های جادویی

۶. بررسی بعضی ویژگی‌های مربع جادویی نرمال با استفاده از MATLAB

مولر در [۵، ۶] بعضی خواص مربع‌های جادویی نرمال را که با استفاده از الگوریتم‌های استاندارد در نرم‌افزار MATLAB با دستور magic تولید می‌شود بررسی کرده است. دستور $A = \text{magic}(n)$ در نرم‌افزار MATLAB مربع جادویی نرمال مانند A از مرتبه $n > 0$ بجز $n = 2$ تولید می‌کند. مربع جادویی A اگر n زوج باشد وارون‌ناپذیر و اگر فرد باشد وارون‌پذیر است. نیومن [۷] مربع‌های جادویی از مرتبه $n = 4k$ را مورد بررسی قرار داد و مشاهده کرد که رتبه این گروه برابر ۳ است و مقادیر ویژه برابر μ و $\pm \frac{n}{2} \sqrt{\frac{n(n^2-1)}{3}}$ و بردارهای تکین آن برابر μ و $\frac{n}{2} \sqrt{\frac{n^2(n^2-1)}{3}}$ و $\frac{n}{2} \sqrt{\frac{n^2(n^2-1)}{3}}$ می‌باشد. به‌عنوان مثال داریم

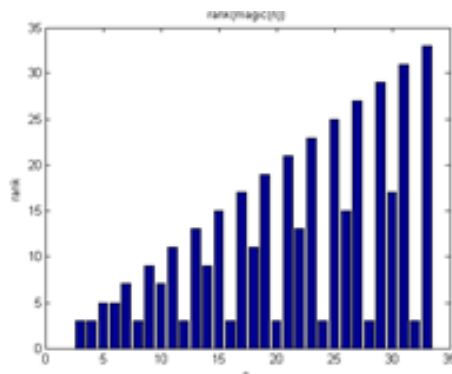
$$(4) = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

که دترمینان آن برابر صفر و چندجمله‌ای مشخصه آن $x(x-34)(x^2-80)$ است. در ادامه با استفاده از آزمایش‌های عددی به بررسی برخی ویژگی‌های مربع جادویی نرمال که توسط نرم‌افزار MATLAB تولید می‌شود می‌پردازیم.

- ۱- نرم، ۲- نرم و نرم بی‌نهایت مربع جادویی نرمال A برابر ثابت جادویی آن است:

$$\|A\|_1 = \|A\|_2 = \|A\|_\infty = \mu.$$

- شکل ۶ نرم فروبنیوس مربع‌های جادویی از مرتبه‌های مختلف را نشان می‌دهد.
- آزمایش‌های کامپیوتری نشان می‌دهد مربع جادویی مرتبه فرد دارای رتبه کامل و در نتیجه وارون‌پذیرند. مربع‌های جادویی از مرتبه زوج که مرتبه آن‌ها مضرب ۴ باشد، مانند $n = 4, 8, 12, 16, \dots$ حتی برای n ‌های بزرگ دارای رتبه ۳ هستند. مربع جادویی از مرتبه زوج که مضرب ۲ بوده ولی مضرب ۴ نباشد، مانند $n = 6, 10, 14, \dots$ دارای رتبه $n/2 + 2$ است. این ماتریس‌ها نیز وارون‌ناپذیرند ولی وابستگی خطی سطری و ستونی کمتری نسبت به مربع‌های از مرتبه مضرب ۴ دارند [۸]. به شکل ۷ توجه کنید.



شکل ۷: رتبه مربع‌های جادویی نرمال

- وارون مربع‌های جادویی از مرتبه فرد یک مربع جادویی است اما درایه‌های آن الزاما عدد صحیح نیستند. اگر ثابت جادویی یک مربع جادویی نرمال از مرتبه فرد μ باشد، ثابت جادویی وارون آن برابر $1/\mu$ است. به‌عنوان مثال مربع جادویی از مرتبه ۵ که با دستور (۵) محاسبه می‌شود دارای ثابت جادویی برابر ۶۵ است و ثابت جادویی A^{-1} برابر $1/65 = 0.0154$ است.
- بزرگترین مقدارویژه مربع جادویی نرمال برابر ثابت جادویی آن است.
- برای هر عدد زوج n ، مربع جادویی نرمال از مرتبه n ، بجز بزرگترین مقدارویژه μ و مقدارویژه صفر، بقیه مقدارویژه آن دوبه‌دو قرینه‌اند. برای هر عدد فرد n ، مربع جادویی نرمال از مرتبه n بجز بزرگترین مقدارویژه، بقیه مقدارویژه آن دوبه‌دو قرینه‌اند. به‌علاوه $\mu = (A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.
- همه مقادیر تکین مربع‌های جادویی نرمال مرتبه فرد، اعداد مثبت‌اند.
- بزرگترین مقدار تکین مربع جادویی نرمال، برابر ثابت جادویی آن است.
- صفر مقدار تکین مربع جادویی نرمال از مرتبه زوج است و وارون‌ناپذیری آن را نشان می‌دهد.
- عدد حالت مربع جادویی نرمال نسبت به ۲-نرم که با استفاده از نسبت بزرگترین مقدار تکین به کوچک‌ترین آن محاسبه می‌شود، برای n فرد بجز ۳ در بازه $[n, n + 0.47]$ قرار می‌گیرد. عدد حالت مربع جادویی مرتبه ۳ برابر $4/3301$ است. به‌عنوان مثال عدد حالت مربع جادویی زوج بسیار بزرگ است به‌طوری‌که عدد حالت مربع جادویی از مرتبه ۶ برابر $10^{17} \times 223/5$ است.

مرتبه	عدد حالت
۵	۵/۴۶۱۸
۹	۹/۱۰۱۷
۹۳	۹۳/۰۰۸۱
۱۰۳	۱۰۳/۰۰۷۶

مراجع

[1] W. S. Andrews, *Magic Squares and Cubes*, Open Court Publishing Company, Chicago, 1917.

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.126556.1408>

- [2] M. Lee, E. Love and E. Wascher, *Linear Algebra of Magic Squares*, Undergraduate Research, Central Michigan University, Mount Pleasant, Michigan, 2006.
- [3] P. Loly, I. Cameron, W. Trump and D. Schindel, Magic square spectra, *Linear Algebra Appl.*, **430** (2009) 2659–2680.
- [4] R. B. Mattingly, Even order regular magic squares are singular, *Amer. Math. Monthly*, **107** (2000) 777–782.
- [5] C. B. Moler, *Numerical Computing with MATLAB*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2004.
- [6] C. B. Moler, *Experiments with MATLAB*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2011.
- [7] B. Newman, MATLAB Magic, contributed presentation, in *1997 MATLAB Conference*, Sydney, Australia, 1997.
- [8] A. K., Thander, C. Ghosh and G. Mandal, Normal magic square and its some matrix properties, *Internat. J. Math. Trends Tech.*, **3** (2012) 91–94.
- [9] J. E. Ward, Vector spaces of magic squares, *Math. Mag.*, **53** (1980) 108–111.

عفت گلپر رابوکی

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران
g.raboky@qom.ac.ir

عفت گلپر رابوکی عضو هیأت علمی دانشگاه قم، دانش‌آموخته رشته ریاضی کاربردی دانشگاه صنعتی شریف است که در سال ۱۳۹۰ از رساله دکتری خود با عنوان فرمول کاهش رتبه تعمیم‌یافته و کاربرد آن در تجزیه‌های ماتریسی حقیقی و صحیح، تحت راهنمایی دکتر نظام‌الدین مهدوی امیری دفاع کرد. ایشان دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی را در دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۷۵ و دوره کارشناسی ریاضی کاربردی در کامپیوتر را در دانشگاه صنعتی امیرکبیر در سال ۱۳۷۳ به اتمام رسانده است.



هدی پورمند

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران
hodapourmand@gmail.com

هدی پورمند سال ۱۳۹۸ مدرک کارشناسی خود را از دانشگاه قم در رشته ریاضی کاربردی دریافت کرد. هم‌اکنون دانشجوی کارشناسی ارشد گرایش آنالیز عددی دانشگاه صنعتی قم است.

