http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۵، شماره ۲ (۱۳۹۹)، صص. ۲۸-۱۷

http://www.ui.ac.ir

توصیفی شهودی از خمیدگی

محمد مقدسی

چکیده. در این مقاله می‌خواهیم با بیانی ساده و مبتنی‌بر برداشت‌های نسبتاً شهودی، مفاهیم خمیدگی را بررسی کنیم. خواهیم دید که خمیدگی از نگاه ساکنان یک دنیای مسطح با آنچه افراد بیرون از آن می‌بینند تفاوت دارد و این خمیدگی با استفاده از مفهوم فاصله تعریف می‌شود. به‌ویژه می‌توان براساس مفاهیم هندسی کمیتی تعریف کرد که صاف یا خمیده بودن سطح برحسب صفر بودن یا نبودن آن کمیت معین شود.

۱. مقدمه

هر نظریه‌ای جزئیات خاص خود را دارد و باید این جزئیات به زبان دقیقی بیان شوند؛ معمولاً این زبان دقیق بر پیچیدگی‌های نظریه می‌افزاید. اما این مطلب مانعی بر سر راه شرح نظریه‌های به‌ظاهر پیچیده به زبانی ساده و تاحدودی غیردقیق نیست. عملا هم هیچ‌وقت دانسته‌های بشر از بررسی‌های پیچیده آغاز نشده‌اند؛ بشر همواره با ایده‌های ساده شروع کرده است و عموماً تلاش کرده است تا در کنار گزاره‌های دقیق، تصویری شهودی از نظریه‌ها حاصل کند. آشکارا چنین تصویری خیلی دقیق و خالی از اشتباه نیست، اما راهنمای ما برای رسیدن به گزاره‌های دقیق است. علاوه بر این وقتی تصویریی شهودی حاصل شود، احساس خوشایندی نسبت به آن موضوع در ما پدید می‌آید و به آنچه «لذت فهمیدن» می‌نامند دست می‌یابیم.

یکی از نظریه‌های پرهیاهو، نظریه نسبیت عام است. این نظریه بخشی از طبیعت را توصیف می‌کند و از این منظر نظریه‌ای فیزیکی به شمار می‌آید. با این حال، چون در بدو تولدش با زبان تازه‌ای سخن گفت و مجردترین بخش‌های ریاضیات را به‌کار گرفت، ریاضیدانان نیز جذب آن شدند. در ادامه می‌خواهیم به مبانی ریاضی نسبیت عام بپردازیم و آنها را با زبانی ساده و شهودی شرح دهیم. مهم‌ترین مطلب ریاضی نهفته در نسبیت عام، مفهوم خمیدگی سطوح است.

ترتیب مطالب این مقاله به این شرح است. در بخش ۲ با ساده‌ترین «سطح»، یعنی منحنی یک‌بعدی، کار را شروع می‌کنیم و خمیدگی را با توجه به مفاهیم سرعت و شتاب توضیح می‌دهیم. در بخش ۳ شاهدی برای تبیین خمیدگی از دید ساکنان یک دنیای مسطح می‌آوریم. این شاهد برحسب فاصله بیان می‌شود ولی باید به‌گونه‌ای با فاصله پیوند یابد که مفهوم خمیدگی از هر دستگاه مختصاتی مستقل باشد. در اینجا شهود هندسی ما به قضیه‌ای شگفت‌انگیز می‌انجامد که نقش فاصله را در خمیدگی روشن می‌کند. سپس در بخش ۴ از مفاهیم بنیادی هندسی، همچون انتقال یا خطوط

عبارات و کلمات کلیدی: استدلال شهودی، خمیدگی، نسبیت عام، گاوس
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۱/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۸
نوع مقاله: ترویجی

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

موازی، کمک می‌گیریم و خواهیم گفت که چرا انتقال موازی در سطوح خمیده به مسیر حرکت بستگی دارد. با توجه به این نتیجه، کمیتی معرفی می‌کنیم که بر اساس آن میزان خمیدگی سطح مشخص می‌گردد.

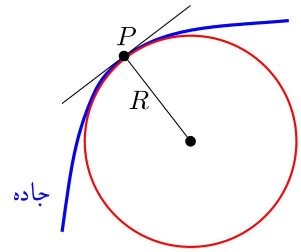
۲. ساده‌ترین مفهوم خمیدگی

شاید ساده‌ترین چیزی که مفهوم خمیدگی را به ذهن می‌آورد کره باشد؛ شیئی که خمیدگی‌اش تقارن خاصی دارد و از هر طرف به آن نگاه کنیم آن‌را «کروی» و «خمیده» می‌بینیم. اما اگرچه همه به کروی‌بودن توپ اذعان دارند، در مورد کروی‌بودن زمین این چنین نیست و مثلا چنین ادعایی مطرح می‌شود

> **ادعا:** چرا بعضی‌ها می‌گویند زمین گرد است؟ ما که هرچه نگاه می‌کنیم زمین را صاف می‌بینیم! گردبودن توپ والیبال را به‌آسانی متوجه می‌شویم و می‌فهمیم که توپ «خمیده» است و دیوار اتاق «صاف». پس شهودا باید بگوییم زمین هم (فارغ از پستی و بلندی‌های معمولش) صاف است!

اما آیا این درک شهودی درست است؟ در این ادعا نکته ظریفی نهفته است که نباید از آن غافل شد. وقتی توپ را گرد می‌نامیم نگاه ما به آن از بیرون است. مفاهیم «خمیده» و «صاف» که به‌طور عادی در ذهن ما شکل گرفته‌اند، یا از دید ناظری تعریف شده‌اند که خودش روی سطحی که شیء در آن قرار گرفته است، **نیست** یا با توجه به جهان دربرگیرنده آن سطح ادراک شده‌اند. پس نمی‌توانیم آنها را بی‌درنگ به زمینی تعمیم دهیم که روی آن زندگی می‌کنیم. در واقع، باید راهی یافت تا خمیدگی سطوح را از دید ساکنان روی آن سطح تعریف کرد. برای انجام این کار بحث را از منحنی‌های یک‌بعدی شروع می‌کنیم و قدم‌به‌قدم پیش می‌رویم.

۱.۲. خمیدگی در یک بُعد. نخستین گام در درک مفهوم خمیدگی توجه به منحنی‌های یک‌بعدی است. ما به دو روش درباره خط صاف بحث می‌کنیم. در روش نخست به ویژگی‌های فیزیکی توجه داریم. فرض کنید داخل ماشین در حال حرکتی هستید و عقربه کیلومترشمار روی عدد ۱۰۰ ثابت شده است. وقتی راحت نشسته‌اید و تخمه می‌شکنید با خود می‌گویید «عجب جاده صافی!» ولی به محض اینکه ماشین به سمتی بپیچد، شما هم چرخش ماشین را حس می‌کنید و می‌گویید «عجب جاده پر پیچ و خمی!» هرچه پیچ شدیدتر باشد، احساس شما از «خمیدگی» بیشتر می‌شود. این احساس همان نیرو است و می‌دانیم که نیرو با شتاب، یا تغییرات سرعت در واحد زمان، متناسب است. یعنی شتاب خمیدگی منحنی را نشان می‌دهد. البته این خمیدگی را به‌طور ذاتی درک نمی‌کنیم. گرچه ماشین روی مسیر یک‌بعدی‌اش پیش می‌رود، جهت نیرو در راستای مسیر (پیچ) نیست، بلکه عمود بر آن است. به بیانی دیگر، این نوع خمیدگی به‌واسطه صفحه دربرگیرنده جاده درک می‌شود. طبعاً اگر پیچ را بخشی از دایره تصور کنیم (یعنی پیچ بر دایره‌ای مماس باشد)، تند بودن پیچ متناظر با کاهش شعاع دایره است؛ چنانکه در اصطلاح عامیانه هم از تعبیر «پیچ تیز» استفاده می‌شود. پس خمیدگی با معکوس شعاع پیچ متناسب است (شکل ۱) [۳].



$$\text{خمیدگی} \equiv k = \frac{1}{R}$$

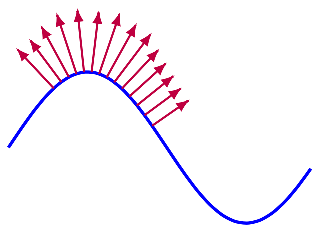
شکل ۱. خمیدگی جاده (منحنی آبی) به لحاظ عددی با شتاب مرکزگرا توصیف می‌شود و شتاب هم با معکوس شعاع منحنی متناسب است. منحنی قرمز، دایره‌ای فرضی است که جاده در نقطه P بر آن مماس است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

اما در روش دوم، از ویژگی‌های هندسی منحنی‌ها بهره می‌بریم. یکی از معیارهای نسبتاً بدیهی برای سنجش خمیدگی این است که ببینیم آیا جهت خط مماس بر منحنی در طول منحنی عوض می‌شود یا نه. البته می‌توان به‌جای خط مماس هر خط دیگری را که زاویه ثابتی با خط مماس دارد در نظر گرفت؛ زیرا تغییر جهت این سنجه مهم است و نه خود سنجه. از آنجاکه قصد داریم این مطالب را به ابعاد بالاتر تعمیم دهیم و با توجه به اینکه خط مماس روی صفحه یکتا نیست، بنابراین سنجه را به‌صورت خط عمود در نظر می‌گیریم. پس اگر روی منحنی به اندازه بسیار کوچک dl جابه‌جا بشویم و بردار عمود بر منحنی به اندازه بسیار کوچک $d\theta$ بچرخد، آنگاه خمیدگی منحنی را برابر کسر

$$k \equiv \frac{d\theta}{dl} \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم [۳]. این تعریف معقول است، چون که هرچه منحنی خمیده‌تر باشد، خط عمود بر منحنی با جابه‌جایی کمتری، می‌چرخد (شکل ۲).



شکل ۲. بردارهای قرمز بر منحنی عمودند. هرجا که خمیدگی منحنی بیشتر باشد، چرخش بردارها حین جابه‌جایی روی منحنی، بیشتر است. در ناحیه‌هایی که منحنی تقریباً صاف به نظرمی‌رسد، بردارها تقریباً هم‌جهت‌اند.

در ضمن، اگر $d\theta$ را روبه‌روی کمان dl_G از دایره‌ای با شعاع واحد فرض کنیم، می‌توان طول آن کمان را جایگزین زاویه کرد. چنین دایره‌ای را معمولاً دایره گاوسی می‌نامند و با توجه به رابطه (۱) داریم

$$k = \frac{dl_G}{dl}. \tag{۲}$$

با توجه به اینکه «چرخش» در یک بعد معنا ندارد، پس این تعریف نیز همانند تعریف فیزیکی خمیدگی به جهان دربرگیرندهٔ منحنی بستگی دارد. به‌علاوه باید به نکته‌ای بسیار مهم توجه داشت: ما در تمام استدلال‌های این مقاله از مفهوم «مماس» استفاده می‌کنیم ؛ بنابراین به منحنی‌ها یا سطوحی که دارای نقطه تیز هستند و نمی‌توان خط مماس در آن نقطه تعریف کرد نمی‌پردازیم. این نکته از دیدگاه فیزیکی قابل درک است، زیرا نقطه تیز متناظر با جایی است که متحرک در آن متوقف شده است.

۲.۲. خمیدگی در دو بعد. اکنون در گام دوم به سراغ سطوح دوبعدی می‌رویم. فرض کنید سطحی به نام Σ در فضا قرار گرفته است. در هر نقطه $P \in \Sigma$، صفحه‌ای به نام Σ_T وجود دارد که بر Σ مماس است و برداری به نام $\hat{n}$ وجود دارد که بر Σ_T عمود است. حالا منحنی‌های مختلفی را در نظر بگیرید که از P می‌گذرند و روی هر کدام از آنها مورچه‌ای با تندی ثابت حرکت می‌کند. با توجه به تغییرات بردار سرعت مورچه‌ها می‌توانیم به هر کدام شتابی نسبت دهیم و طبق آنچه در بالا گفتیم اندازه این شتاب همان مقدار خمیدگی است. همچنین می‌توانیم به خمیدگی جهتی نسبت دهیم؛ مثلا آن‌را هم‌راستا با جهت شتاب (شتاب مرکزگرا) و به سمت مرکز دایره پیچ در نظر بگیریم. پس برای هر مورچه

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

و در هر نقطه سه بردار خاص وجود دارد: یکی $\hat{n}$، دیگری بردار خمیدگی، و سومی بردار سرعت که داخل صفحه Σ و مماس بر مسیر حرکت است. چون دو بردار $\hat{n}$ و سرعت همواره بر هم عمودند، می‌توانیم صفحه‌ای را به نام Σ_N از آن دو بردار دیگر عبور دهیم. تصویر بردار خمیدگی را روی Σ_N، **خمیدگی نرمال** می‌نامیم. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترینِ خمیدگی نرمال، **خمیدگی‌های اصلی** نامیده می‌شوند و آنها را با $k_۱$ و $k_۲$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که خمیدگی‌های نرمال با توجه به جهان دربرگیرنده سطح Σ تعریف شده‌اند؛ زیراکه از جنس شتاب‌اند و از روی منحنی‌های یک‌بعدی به‌دست آمده‌اند.

اکنون دو قاعده بیان می‌کنیم:

(الف) اگر $K_M \equiv \frac{k_۱+k_۲}{۲}$ صفر شود، سطح از **دید ما** تخت است و با توجه به جهان دربرگیرنده سطح تعریف می‌شود؛

(ب) اگر $K_G \equiv k_۱ \times k_۲$ صفر شود، سطح از **دید مورچه‌ها** تخت است و ویژگی ذاتی سطح محسوب می‌شود.

K_M و K_G را به‌ترتیب **خمیدگی متوسط** و **خمیدگی گاوسی** نامیده‌اند [۳، ۲]. صفر نبودن این دو مقدار (به‌ترتیب) بدین معناست که سطح از دید ناظر بیرون از سطح و ناظر روی سطح خمیده است. اینکه K_M خمیدگی سطح را با توجه به جهان دربرگیرنده سطح نشان دهد کاملاً معقول است. در واقع، K_M نوعی متوسط‌گیری از خمیدگی‌های نرمال محسوب می‌شود و خمیدگی نرمال هم با توجه به جهان بیرون از سطح (از دید ناظر بیرونی) تعریف می‌شود. با این حال، خیلی عجیب است که K_G به خواص ذاتی سطح مربوط می‌شود. برای اینکه بفهمیم ایده ضرب کردن خمیدگی‌های اصلی از کجا می‌آید، به سراغ دیدگاه هندسی حاکم بر خمیدگی می‌رویم.

در بالا دیدیم که خمیدگی برحسب چرخش خط عمود بر منحنی تعریف می‌شود. قاعدتاً این تعریف را، با کمی تغییر، برای سطح دوبعدی نیز می‌توان به‌کار برد. پس می‌توان گفت اگر سطح بسیار کوچکی را در نظر بگیریم و بردار عمود بر آن در نقاط مختلف سطح بچرخد، آنگاه سطح خمیده است. عنصر سطح، روبه‌روی زاویه فضایی است و می‌توان کره‌ای را طوری بر آن مماس کرد که آن ناحیه از سطح با بخشی از کره معادل شود. سپس با توجه به تعریف خمیدگی در یک‌بعد، خمیدگی سطح دوبعدی را با نسبت $\frac{d\Omega}{dA}$ تعریف می‌کنیم، که در اینجا $d\Omega$ زاویه فضایی متناظر با عنصر سطح و dA مساحت عنصر سطح است. همچنین، اگر زاویه فضایی روبه‌روی عنصر سطح dA_G از کره‌ای با شعاع واحد ــ موسوم به **کره گاوسی** ــ باشد؛ پس

$$\text{خمیدگی} = \frac{dA_G}{dA}. \qquad (۳)$$

عنصر سطح dA آن‌قدر کوچک است که می‌توانیم آن‌را با کمی تغییر (مثلاً چرخاندن اضلاع) بر منحنی‌های متناظر با خمیدگی‌های اصلی منطبق کنیم. در این فرایند مساحت dA چندان تغییر نمی‌کند و متناسب با حاصل‌ضرب اضلاع عنصر است. از سوی دیگر، مساحت عنصر dA_G با حاصل‌ضرب کمان‌های متناظر با اضلاع dA، متناسب است. بنابراین

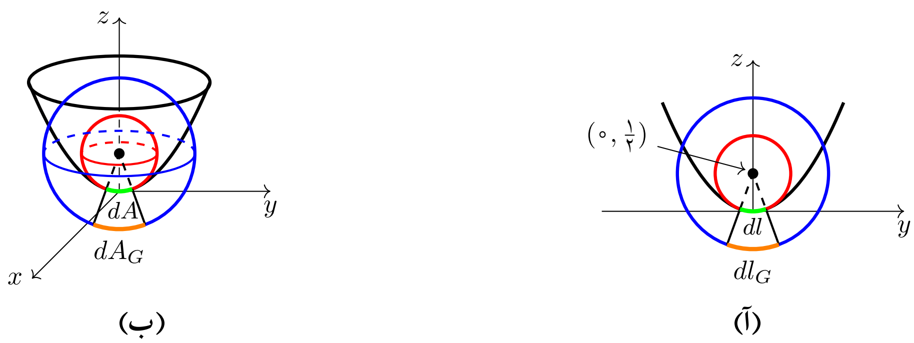
$$\frac{dA_G}{dA} \approx \frac{dl_{G۱}dl_{G۲}}{dl_۱ dl_۲} = \left(\frac{dl_{G۱}}{dl_۱}\right)\left(\frac{dl_{G۲}}{dl_۲}\right) = k_۱ k_۲. \qquad (۴)$$

در رابطه (۴) داریم

- $dl_۱$ طول یکی از اضلاع عنصر سطح است که متناظر با کوچک‌ترین خمیدگی نرمال است.
- $dl_۲$ طول یکی دیگر از اضلاع عنصر سطح است که متناظر با بزرگ‌ترین خمیدگی نرمال است.
- $dl_{G۱}$ طول کمان متناظر با $dl_۱$ روی کره گاوسی است.
- $dl_{G۲}$ طول کمان متناظر با $dl_۲$ روی کره گاوسی است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

به عنوان مثال، منحنی یک‌بعدی $z = y^۲$ را در نظر بگیرید (شکل ۳آ). با کمی آزمون‌وخطا درمی‌یابیم که دایره‌ای با شعاع ۰/۵ و مرکز $(۰, ۰/۵)$، بر بخش میانی منحنی منطبق است. یعنی معکوس شعاع این دایره که برابر با ۲ است خمیدگی این قسمت از منحنی را توصیف می‌کند. حال اگر منحنی را حول محور z دوران دهیم، آن منحنی به رویهٔ $z = x^۲ + y^۲$ و آن دایره به کره‌ای با شعاع ۰/۵ و مرکز $(۰, ۰, ۰/۵)$، تبدیل می‌شود (شکل ۳ب). مساحت عنصر dA از رویه یادشده، با مساحت بخشی از این کره معادل است و برای رسیدن به کره گاوسی باید کره‌ای هم‌مرکز با این کره و شعاع واحد در نظر بگیریم. چون شعاع کره گاوسی دو برابر شعاع این کره است، سطح گاوسیِ متناظر با عنصر dA، چهار برابر dA خواهد بود. یعنی خمیدگی این بخش از رویه ۴ است. همچنین می‌توانیم این نتیجه را با محاسبه خمیدگی‌های اصلی به‌دست آوریم. چون رویه مورد نظر متقارن است، خمیدگی‌های اصلی با هم برابرند و هر دوی آنها همان مقداری را دارند که برای منحنی $z = y^۲$ به‌دست آوردیم. بنابراین حاصل‌ضرب خمیدگی‌های اصلی ۴ می‌شود و تساوی $\frac{dA_G}{dA} = k_۱k_۲$ را تأیید می‌کند.



شکل ۳. (آ) منحنی بر دایره قرمز مماس است که شعاعش نصف شعاع دایره گاوسی است. لذا dl نصف dl_G و خمیدگی منحنی در این ناحیه، ۲ است. (ب) این رویه و کره‌های رسم‌شده، از دوران منحنی قسمت (آ) حاصل شده‌اند. بنابراین dA یک‌چهارم dA_G و خمیدگی رویه ۴ است.

طبق رابطه (۴)، $k_۱k_۲$ نوعی خمیدگی را تعریف می‌کند، اما هنوز معلوم نیست که خمیدگی ذاتی سطح باشد. گرچه مفهوم «چرخش» از دید ساکنان روی سطح نیز معنادار است و نیازی نیست که حتماً به جهان بیرون از سطح ارجاع داده شود. در هر صورت، برای اطمینان از درستی قاعده (ب)، به قضیه‌ای محکم، بنیادی و شگفت‌انگیز احتیاج داریم که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

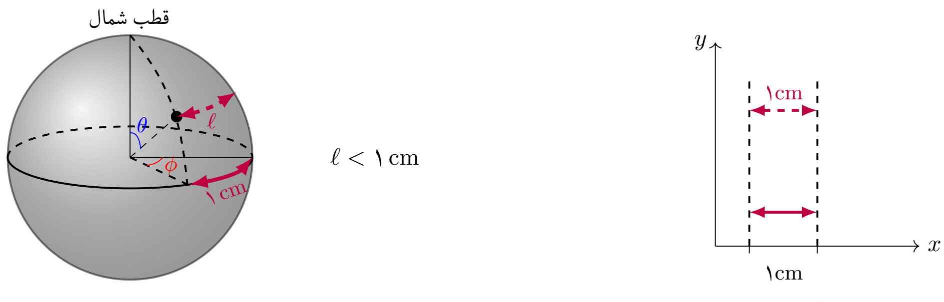
۳. خمیدگی و فاصله

در بخش قبل، تأکید کردیم که درک ما از خمیدگی سطوح، عموماً به جهان دربرگیرندهٔ سطح بستگی دارد. چنین خمیدگی‌هایی را **خمیدگی بیرونی** می‌نامند و در مقابل آن، **خمیدگی ذاتی** تعریف می‌شود که جزء ویژگی‌های ذاتی سطح است و بدون توجه به جهان خارجی تعریف می‌شود. برای مثال، وقتی ما طنابی را در دست می‌گیریم یا به صفحه کاغذ این مجله نگاه می‌کنیم، صاف بودن یا نبودن آنها برایمان روشن است. ولی آیا مورچه‌ای هم که روی آنها راه می‌رود، همین نظر را دارد؟ از نگاه او سطح باید چگونه باشد تا آن‌را خمیده بنامد؟ مسلماً دیدگاه‌های فیزیکی و هندسی‌ای که پیشتر ارائه شد، پاسخ مناسبی برای این سؤال فراهم نمی‌آورند، زیراکه آنها ناظر بر خمیدگی بیرونی بودند. پس باید به دنبال معیاری دیگر باشیم.

فرض کنید مورچه‌ای روی صفحه کاغذ، دستگاه مختصات دکارتی را به دنبال خود می‌کشد و یک سانتی‌متر از تار موی شما را برمی‌دارد و بر محور xها منطبق می‌کند و طوری حرکت می‌کند که تار مو همواره عمود بر محور yها باشد

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

و طول آن‌را صرفاً با محور xها بسنجد (شکل ۴آ). او در تمام طول حرکت، دقیقاً یک سانتی‌متر از محور xها را متناظر با مو می‌بیند، نه ذره‌ای کمتر و نه ذره‌ای بیشتر. حالا همین مورچه را روی توپ والیبال بگذارید. مطابق شکل ۴ب، هر نقطهٔ توپ می‌تواند با دو زاویه θ و ϕ به‌طور یکتا مشخص شود؛ یعنی مورچه می‌تواند این زاویه‌ها را به عنوان مختص‌های دستگاه مختصات در نظر بگیرد.[1] مورچه تار مو را بر بخشی از دایره استوا منطبق می‌کند و بین دو صفحه‌ای که زاویه ϕ را مشخص می‌کنند، به سمت قطب شمال می‌رود (شکل ۴ب). به عبارت دیگر، مورچه در دستگاه دکارتی (شکل ۴آ) طوری حرکت می‌کرد که فقط مختص y افزایش یابد، و در دستگاه کروی (شکل ۴ب) طوری حرکت می‌کند که فقط مختص θ تغییر کند. در این شرایط، هر چه مورچه به قطب شمال توپ نزدیک‌تر می‌شود، فاصله بین صفحات را کمتر از طول تار مو اندازه می‌گیرد؛ به‌طوری‌که وقتی به قطب می‌رسد می‌بیند دو صفحه عملاً به‌هم برخورد کرده‌اند! این اتفاق در مورد شکل ۴آ نمی‌افتاد، ولی در اینجا وقتی یکی از مختص‌ها (ϕ) را ثابت می‌گیریم، «فاصله» به موقعیت مورچه بر روی سطح بستگی پیدا می‌کند؛ یعنی **وابستگی فاصله به مختصات روی سطح** می‌تواند خمیدگی ذاتی سطح را توصیف کند.



شکل ۴. ارتباط فاصله با خمیدگی. (آ) فاصله بین دو خط موازی در فضای تخت تابعِ مختصات نیست. (ب) دو نقطه‌ای که اختلاف ϕ آنها یکسان است، هر چه به قطب‌ها نزدیک‌تر می‌شوند، فاصله طولی کمتری نسبت به یکدیگر پیدا می‌کنند.

البته شاید بپرسید: «چه تضمینی هست که ما مختصات مناسبی انتخاب کرده باشیم؟ شاید اگر به‌جای ϕ و θ مختص‌های دیگری تعریف کنیم، فاصله از مختصات مستقل شود و آن وقت به این نتیجه برسیم که سطح خمیده نیست!» این پرسش بسیار مهم است، ولی فعلاً از آن می‌گذریم و شاهد دیگری برای وابستگی خمیدگی به فاصله می‌آوریم.

فرض کنید مورچه سنجاقی را روی سطح محکم کند و نخی را با طول $1\,\mathrm{cm}$ به خودش و سنجاق ببندد و آن‌قدر از سنجاق دور شود که نخ کاملاً کشیده شود. اگر او روی صفحه تخت باشد و دور سنجاق بچرخد، دایره‌ای به محیط 2π تشکیل می‌شود؛ ولی اگر روی توپ ساکن بود محیط دایره را کمتر از 2π اندازه گیری می‌کرد.[2] همین آزمایش ساده، او را مطمئن می‌سازد که چیزی در **ذات** محیط اطراف او تغییر کرده است و آن چیز به‌نحوی با **فاصله** (یا طول) ارتباط دارد. از طرفی، در بخش قبل گفتیم ممکن است خمیدگی گاوسی یکی از ویژگی‌های ذاتی سطح باشد؛ پس ممکن است خمیدگی گاوسی با فاصله ربط داشته باشد. این موضوع را با آزمایش و کمی محاسبه بررسی می‌کنیم.

صفحه کاغذ تخت دو خمیدگی اصلی دارد که هر دو برابر صفرند؛ زیراکه هیچ‌کدام از خمیدگی‌ها مؤلفه‌ای در صفحه Σ_N ندارد. حال دو ضلع مقابل را به‌هم می‌چسبانیم تا استوانه‌ای ساخته شود. در این فرایند هیچ کشیدگی در کاغذ روی نمی‌دهد و اگر طولی را روی کاغذ در نظر بگیریم، هیچ تغییری در آن مشاهده نمی‌شود. از طرفی، برای محاسبه

[1] انتخاب دستگاه مختصات اساساً در اختیار خود ما است. اگر این دستگاه‌های خاص را انتخاب کرده‌ایم، به دلیل تقارن‌های خاص مسأله است، وگرنه هیچ برتری ذاتی بر یکدیگر ندارند.
[2] برای اطمینان می‌توانید این آزمایش را با پرتقال، نخ، سوزن و ماژیک انجام دهید.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

خمیدگی گاوسی استوانه کافی است دو منحنی را بررسی کنیم: یکی منحنی موازی با محور استوانه و دیگری دایره‌ای که روی پوسته استوانه است. شتاب مرکزگرا برای منحنی اول که صاف است صفر می‌شود. پس خمیدگی گاوسی استوانه در نقاط روی پوسته آن صفر است. حالا سعی می‌کنیم دو سر استوانه را نیز به یکدیگر بچسبانیم تا چنبره‌ای ساخته شود. این کار بدون پارگی کاغذ ممکن نیست، مگر اینکه کاغذمان خاصیت کشسانی داشته باشد! در واقع، پارگی کاغذ حاکی از افزایش فاصله‌های روی کاغذ است. یعنی در فرایند تبدیل استوانه به چنبره، فاصله‌ها افزایش می‌یابد. افزایش فاصله فقط در یک راستا و در نقطه‌ای مانند Q موجود در شکل ۵ب رخ می‌دهد. با توجه به پارامترهای چنبره که در شکل ۵آ می‌بینید، خمیدگی گاوسی در نقطه‌ای مانند Q، برابر با $\frac{1}{a(a+c)}$ است. خلاصه این مشاهدات را در جدول‌های ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنید.

جدول ۱. خمیدگی گاوسی سه سطح دوبعدی

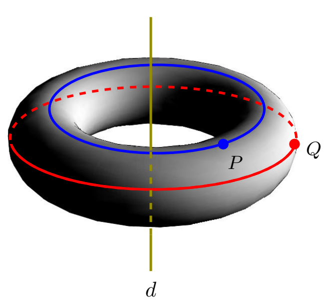
سطح هندسی	خمیدگی گاوسی
صفحه تخت	0
استوانه	0
چنبره	$\frac{1}{a(a+c)}$

جدول ۲. ویژگی‌های فرایند تبدیل صفحه به استوانه و استوانه به چنبره

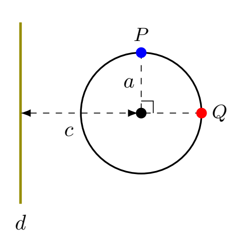
نام تبدیل	پارگی (افزایش طول)	تغییر خمیدگی گاوسی
صفحه به استوانه	ندارد	ندارد
استوانه به چنبره	دارد	دارد

با توجه به جدول ۲ حدس می‌زنیم که طول و خمیدگی گاوسی به‌هم مربوط‌اند. به عبارت دیگر، خمیدگی گاوسی با یکی از ویژگی‌های ذاتی سطح مربوط است و درنتیجه خمیدگی ذاتی سطح را نشان می‌دهد. این ادعای شهودی ما در قضیه زیبای زیر گنجانده شده است و می‌توان آنرا اثبات کرد (که البته اثبات آن هدف این مقاله نیست).

قضیه ۱.۳ ([۲]،قضیه شگفت‌انگیز). *اگر سطحی را طوری خم کنیم که کشیده نشود، خمیدگی گاوسی آن تغییر نمی‌کند.*



(ب)



(آ)

شکل ۵. اگر دایره قسمت (آ) را حول خطی دوران دهیم که بیرون از دایره و در صفحه دایره قرار دارد، چنبره قسمت (ب) ساخته می‌شود. در (ب)، خمیدگی گاوسی چنبره در نقطه P صفر و در نقطه Q برابر با $\frac{1}{a(a+c)}$ است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

یادآوری می‌کنیم که چون خمیدگی متوسط استوانه برابر با عکس شعاع استوانه است، پس استوانه از دید ناظر بیرونی خمیده است، هرچند که خمیدگی گاوسی‌اش صفر می‌شود و ذاتاً خمیده نیست.

۴. خمیدگی و خطوط موازی

در حین توضیح مفهوم خمیدگی برحسب فاصله گفتیم که مورچه باید در راستای یکی از مختص‌ها حرکت کند. اگر به شکل ۴ دقت کنید، متوجه می‌شوید که این نوع حرکت با مفهوم **خطوط موازی** ارتباط بسیار نزدیکی دارد. با این حال وقتی مورچه روی کره حرکت می‌کند، مفهوم توازی کمی ابهام پیدا می‌کند. آیا موازی‌بودن به‌معنای عدم تقاطع خطوط یا حرکت در راستای یکی از مختص‌ها است؟ روی کره این دو مفهوم معنای یکسانی ندارند، پس باید آنها را از یکدیگر تفکیک کنیم.

۱.۴. توازی برحسب مشتق. ابتدا دنیای تخت اقلیدسی را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که در این دنیا مهم نیست که ابتدا و انتهای بردار کجای دستگاه مختصات باشد؛ در هر صورت می‌توانیم آنرا **به‌طور موازی جابه‌جا کنیم** و به مبدأ انتقال بدهیم؛ چنانکه برای جمع دو بردار از قاعده متوازی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم. اسم این کار را **انتقال موازی** می‌گذاریم و فرض کنیم منحنی‌ای که بردار را در طول آن انتقال می‌دهیم با τ پارامترسازی شده باشد؛ مثلاً معادلات

$$x(\tau) = \cos\tau\,, \quad y(\tau) = \sin\tau\,, \qquad ۰ \leq \tau \leq \pi$$

نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱ در مختصات دکارتی توصیف می‌کنند. حالا وقتی می‌گوییم بردار $\vec{V}$ بر اثر انتقال تغییر نمی‌کند، معنایش این است که **تغییرات مؤلفه‌های آن نسبت به پارامتر منحنی صفر می‌شود.** معمولاً به جای واژه «تغییرات» از «مشتق» استفاده می‌کنیم. به‌علاوه چون این «تغییرات» حافظ برخی ویژگی‌های بردارند، آنرا **مشتق هموردا** نامگذاری می‌کنیم. بدین ترتیب، معادله‌ای که **انتقال موازی** را توصیف می‌کند، به شکل

$$\frac{D}{d\tau}V_i = ۰\,, \quad i = ۱, ۲, \ldots \qquad (۵)$$

خواهد بود که V_iها مؤلفه‌های بردار $\vec{V}$ هستند [۴]. انتقال موازی بدین معناست که در طول انتقال، فقط یکی از مختص‌های بردار تغییر کند و بقیه ثابت بمانند. چنین انتقالی با مفهوم فاصله پیوند می‌خورد. از طرفی، قضیه ۱.۳ نشان داد که فاصله و خمیدگی به یکدیگر مربوط‌اند. پس رابطه (۵) باید حاوی مفهوم خمیدگی باشد.

برای روشن شدن این موضوع، مجدداً نحوه تبدیل صفحه به چنبره را به یاد می‌آوریم. در آنجا دیدیم که پارگی کاغذ در همه جهات رخ نمی‌دهد. یعنی **تغییرات طول در راستاهای مختلف، متفاوت است.** حال فرض کنید دستگاه مختصاتی روی سطح $\mathcal{N}$ـبعدی داریم و مختص‌های آنرا با X_j، ($j = ۱, ۲, \ldots, \mathcal{N}$)، نشان می‌دهیم. همچنین می‌گوییم $g_i(X_۱, \ldots, X_{\mathcal{N}})$ تابعی است که فاصله را در راستای مختص X_i مقیاس‌بندی می‌کند. این تابع از جنس طول نیست، بلکه تنها مقیاس طول را در راستاهای مختلف (با توجه به ابعاد سطح) تعریف می‌کند. از آنجا که g_i تابعی از همه مختص‌هاست، پس تغییرات آن به‌صورت

$$dg_i = \sum_{j=۱}^{\mathcal{N}} \frac{\partial g_i}{\partial X_j} dX_j \equiv \frac{\partial g_i}{\partial X_j} dX_j\,, \qquad (۶)$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

خواهد بود. (برای سادگی در نوشتن، علامت جمع‌بندی را که روی پانویس‌های تکراری است، حذف می‌کنیم.) ضمناً تابع Γ را به شکل

$$\Gamma_{ij}(X) \equiv \frac{\partial g_i}{\partial X_j} \qquad (۷)$$

تعریف می‌کنیم. قاعدتاً عدم تغییر فاصله به‌معنای عدم تغییر g_i است. به‌علاوه طبق رابطه‌های (۶) و (۷)، عدم تغییر g_i به‌معنای صفر شدن تمام Γ_{ij}هاست. به این ترتیب، اگر تمام $\Gamma_{ij}(X)$ها صفر باشند، سطح مورد نظر تخت است؛ و اگر حداقل یکی از $\Gamma_{ij}(X)$ها صفر نباشد، مقیاس g_i در راستای مختص X_j تغییر می‌کند و این تغییر به‌معنای خمیدگی سطح است.

بنابراین **بخشی از مشتق هموردا به** $\Gamma_{ij}(X)$ **اختصاص دارد**. بخش دیگر مشتق هموردا باید طوری باشد که در فضای تخت، مشتق هموردا با مشتق معمولی برابر شود. بنابراین می‌نویسیم

$$\frac{D}{d\tau}V_i \approx \frac{dV_i}{d\tau} + \Gamma_{rs}(X)\frac{dX_r}{d\tau}V_s g_i\,. \qquad (۸)$$

جمله اول سمت راست تساوی، همان مشتق معمولی است و توضیح خاصی نیاز ندارد. اما چرا سهم خمیدگی را به‌صورتی که می‌بینید، نوشته‌ایم؟ یکی از ترفندهای بسیار زیبای فیزیکی در بررسی معادلات ناشناخته، استفاده از تحلیل ابعادی است. فرض کنید معادله (۸) نوعی معنای فیزیکی دارد. برای مثال، V_i را مؤلفه نیرو، τ را زمان و X_i را طول در نظر بگیرید. سمت چپ معادله از جنس $\frac{\text{نیرو}}{\text{زمان}}$ است، پس جملات سمت راست هم باید از همین جنس باشند. Γ از جنس معکوس طول است و حضورش در معادله الزامی است؛ بنابراین باید آن‌را در $\frac{\text{طول}}{\text{زمان}}$ ضرب کنیم. با این کار، جمع‌بندی روی هر دو پانویس Γ انجام می‌شود و این در حالی است که سمت چپ تساوی درباره مؤلفه iام صحبت می‌کند. بنابراین Γ را در کمیت بی‌بعد g_i ضرب می‌کنیم. البته ما قصد نداریم رابطه دقیق مشتق هموردا را ارائه دهیم، بلکه تنها می‌خواهیم بفهمیم ایده‌های ساده هندسی چگونه ارتباط این مشتق را با خمیدگی نشان می‌دهند. به همین علت، سمت چپ و راست را **تقریباً** مساوی با یکدیگر قرار داده‌ایم.

به هر حال، با توجه به دخالت تابع $\Gamma_{rs}(X,\tau)$ در انتقال موازی، بی‌درنگ دو نتیجه مهم می‌گیریم.

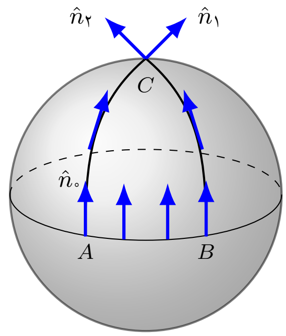
نتیجه ۱.۴. *روی سطوح خمیده، مؤلفه‌های مختلف بردارها به شیوه‌های مختلفی منتقل می‌شوند.*

و دیگری:

نتیجه ۲.۴. *انتقال موازی روی سطوح خمیده، به مسیر حرکت بستگی دارد.*

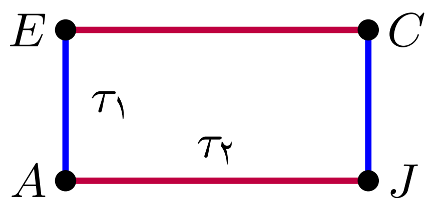
درستی این دو نتیجه از شکل ۶ معلوم است. در این شکل، برداری را به‌طور موازی روی سطح کره انتقال داده‌ایم. چون خمیدگی گاوسی کُره در تمام نقاط آن با مجذور شعاع کره رابطه عکس دارد، پس کره ذاتاً خمیده است. همان‌طورکه می‌بینید، انتقال موازی بردار یکه $\hat{n}_۰$ در مسیر AC به بردار $\hat{n}_۱$، ولی در مسیر ABC به بردار $\hat{n}_۲$ می‌انجامد. هر سه بردار $\hat{n}_۰$، $\hat{n}_۱$ و $\hat{n}_۲$ با هم متفاوت‌اند و نتیجه ما را تأیید می‌کنند[۱].

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414



شکل ۶. انتقال موازی بردار $\hat{n}_\circ$ روی سطح کره از دو مسیر مختلف.

۲.۴. خمیدگی ریمان. نتیجه ۲.۴ بسیار مهم است. برای اینکه محتوای آن‌را راحت‌تر بفهمیم، شکل ۷ را در نظر می‌گیریم. این شکل ناحیه بسیار کوچکی از سطح مورد نظر را نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان فرض کرد تغییرات پارامترهای اضلاع روبه‌رو تقریباً یکسان است. حال بردار $\vec{V}$ را به روش انتقال موازی، روی مسیرهای AJC و AEC، از نقطه A به نقطه C می‌بریم. اگر در نقطه C، بردار انتقال‌یافته از مسیر AJC با بردار انتقال‌یافته از مسیر AEC یکسان بود، بر اساس نتیجه ۲.۴ ادعا می‌کنیم فضا تخت است؛ در غیر این صورت، فضا خمیده خواهد بود.



شکل ۷. دو مسیر مختلف، نقطه A را به نقطه C وصل می‌کنند. این ناحیه به اندازه کافی کوچک است و تغییرات پارامتر اضلاع روبه‌رو یکسان است.

شباهت بردارها در نقطه C، بدین معناست که اختلاف‌شان در این نقطه صفر می‌شود. پس پارامترهای اضلاع آبی و ارغوانی را به‌ترتیب با $\tau_۱$ و $\tau_۲$ نمایش می‌دهیم و اختلاف بردارهای انتقال‌یافته، در نقطه C به صورت رابطه (۹) نوشته می‌شود:

$$\frac{D}{d\tau_۱}\Big(\frac{D}{d\tau_۲}V_i\Big) - \frac{D}{d\tau_۲}\Big(\frac{D}{d\tau_۱}V_i\Big)\,. \qquad (۹)$$

با توجه به رابطه (۸)، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{D}{d\tau_۱}\Big(\frac{D}{d\tau_۲}V_i\Big) - \frac{D}{d\tau_۲}\Big(\frac{D}{d\tau_۱}V_i\Big) \approx \Big(&\frac{d^۲V_i}{d\tau_۱ d\tau_۲} + \frac{d\Gamma_{rs}}{d\tau_۱}\frac{dX_r}{d\tau_۲}V_s g_i + \Gamma_{rs}\frac{d^۲X_r}{d\tau_۱ d\tau_۲}V_s g_i\\ &+ \Gamma_{rs}\frac{dX_r}{d\tau_۲}\frac{d(V_s g_i)}{d\tau_۱} + \Gamma_{rs}\frac{dX_r}{d\tau_۱}\Gamma_{pq}\frac{dX_p}{d\tau_۲}V_q g_s g_i\Big)\\ &- (۱ \rightleftarrows ۲)\,. \qquad (۱۰)\end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

در معادله بالا، نماد (۲ $\rightleftarrows$ ۱) به این معناست که کل عبارت قبل از آن تکرار شود، ولی پانویس ۱ به ۲ و پانویس ۲ به ۱ تبدیل شود. اگر رابطه (۱۰) را ساده کنیم، به معادله (۱۱) می‌رسیم:

$$\text{اختلاف بردارهای انتقال‌یافته} = \Big\{\Big(\frac{d\Gamma_{rs}}{d\tau_1}\frac{dX_r}{d\tau_2} - \frac{d\Gamma_{rs}}{d\tau_2}\frac{dX_r}{d\tau_1} + \Gamma_{rs}\Gamma_{pq}\frac{dX_p}{d\tau_1}\frac{dX_r}{d\tau_2}g_q - \Gamma_{rs}\Gamma_{pq}\frac{dX_p}{d\tau_2}\frac{dX_r}{d\tau_1}g_q\Big)g_iV_s\Big\} + \Big[\Gamma_{rs}\frac{dX_r}{d\tau_2}\frac{d(V_sg_i)}{d\tau_1} - \Gamma_{rs}\frac{dX_r}{d\tau_1}\frac{d(V_sg_i)}{d\tau_2}\Big] \tag{۱۱}$$

در رابطه (۱۱)، عبارت داخل کروشه برحسب مشتق V_s است و تغییر (یا چرخش) مؤلفه‌های بردار را در طول منحنی نشان می‌دهد. البته در این عبارت نیز Γها موجودند، ولی از آنجا که با مشتق بردار سروکار داریم نمی‌توان خمیدگی سطح را از آن استخراج کرد (برای سنجش خمیدگی بنا داشتیم بردارها و نه مشتق آنها را با یکدیگر مقایسه کنیم). از سوی دیگر، عبارت داخل ابروها با مؤلفه‌های بردار متناسب است و ضریب تناسب را به منزله معیاری از خمیدگی، موسوم به **خمیدگی ریمان**، تلقی می‌کنیم.

خمیدگی ریمان با خمیدگی گاوسی ارتباط تنگاتنگی باید داشته باشد؛ چرا که هر دوی آنها خمیدگی ذاتی سطح را نشان می‌دهند. اگرچه مقدار آنها در هر نقطه لزوماً برابر نیست، نباید در نتیجه نهایی، یعنی خمیده بودن یا نبودن سطح ، اختلافی داشته باشند. صفر شدن آنها به‌معنای تخت بودن ذاتی سطح، و صفر نشدن آنها به‌معنای خمیده بودن ذاتی سطح است. ضمناً ما در استدلال اخیرمان قیدی روی بُعد سطوح نگذاشتیم. لذا این مطالب برای هر بعدی درست‌اند.

اکنون دوباره آن پرسش مهم مطرح می‌شود که آیا ما دستگاه مختصات مناسبی انتخاب کرده‌ایم یا نه. پیشتر نمی‌توانستیم به‌سادگی در این باره نظری اظهار کنیم، ولی حالا که خمیدگی ریمان را در اختیار داریم، پاسخ دادن به این سوال آسان است.

۳.۴. خمیدگی ریمان و دستگاه مختصات. نقطه شروع بحث ما برای رسیدن به مفهوم خمیدگی ریمان این بود که فاصله تابعی از مختصات است و در نهایت هم خمیدگی ریمان به شکل

$$R_{is}(\tau_1,\tau_2) \equiv \Big(\frac{d\Gamma_{rs}}{d\tau_1}\frac{dX_r}{d\tau_2} + \Gamma_{rs}\Gamma_{pq}\frac{dX_p}{d\tau_1}\frac{dX_r}{d\tau_2}g_q\Big)g_i - (1 \leftrightarrows 2) \tag{۱۲}$$

تعریف شد. این رابطه دو پانویس آزاد دارد که با توجه به رابطه (۱۱)، هر دوی آنها پانویس‌های برداری هستند؛ گو اینکه خمیدگی ریمان مؤلفه‌های یک بردار است.

مسلماً اگر تمام مؤلفه‌های برداری در دستگاه مختصات دلخواهی صفر باشند، آنگاه چرخاندن یا انتقال دستگاه مختصات هیچ اثری روی بردار ندارد. همچنین اگر تمام مؤلفه‌های خمیدگی ریمان در دستگاه مختصات خاصی صفر شدند، در بقیه دستگاه‌ها هم صفر می‌شوند و درنتیجه در تمام دستگاه‌های مختصات روی یک سطح، سطح تخت است [۴، ۱].

حالا فرض کنید در دستگاه خاصی، مؤلفه‌های بردار صفر نیستند، پس مؤلفه‌های بردار با چرخاندن یا انتقال دستگاه مختصات عوض می‌شوند؛ اما طول بردار هرگز عوض نمی‌شود. به همین ترتیب، می‌توانیم کمیتی از جنس «اندازه خمیدگی» تعریف کنیم که در همه دستگاه‌های مختصات یکسان است.

شاید تصور شود که در مورد Γ_{ij} نیز می‌شد چنین ادعایی کرد، ولی این طور نیست. اگر رابطه (۸) به‌طور دقیق نوشته شود، می‌بینیم که Γها شبیه مؤلفه‌های بردار رفتار نمی‌کنند. در واقع، توصیف شهودی ما تعبیر دقیق و کاملی از Γها به دست نمی‌دهد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414

۵. خلاصه و نتیجه‌گیری

مهم‌ترین نکته‌ای که در درک خمیدگی سطوح ضروری است، این است که مشخص کنیم آیا این مفهوم را باتوجه به فضای دربرگیرنده سطح تعریف می‌کنیم یا اینکه ذاتاً بر روی خود سطح تعریف می‌شود. از این رو، خمیدگی را با توصیف‌های «بیرونی» یا «ذاتی» همراه می‌کنیم تا تمایز میان این دو تعریف روشن شود. گفتیم که خمیدگی ذاتی حاکی از این است که فاصله به مختصات روی سطح بستگی دارد. همچنین مفهوم انتقال موازی را که به‌طور معمول در جبر بردارها به‌کار می‌رود، با این مطلب که مفهوم فاصله به مختصات وابسته است ترکیب کردیم و کمیتی یافتیم که صفر شدن آن به معنای تخت بودن یک سطح است؛ این کمیت مهم خمیدگی ریمان نام دارد.

ما در این مقاله، برای رسیدن به خمیدگی ریمان مسیری شهودی طی کردیم. در واقع، با استفاده از فهمی که از شتاب و فاصله داشتیم بدون ورود به جزئیات دقیق ریاضی، خمیدگی را توضیح دادیم. گرچه توضیحات ما خالی از اشکال نیست و مثلا ضرورت تعریف خمیدگی ریمان را توضیح نمی‌دهند، ایده کلی آنرا به‌خوبی تبیین می‌کند.

مراجع

[1] S. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, New York, 2004.

[2] K. F. Gauss, *General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825*, translated by A. Hiltebeitel and J. Morehead, The Princeton Library Publishing Association, Princeton, NJ, 1902.

[3] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, London, 2001.

[4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principle and Applications of General Ttheory of Relativity*, John Wiley and Sons, New York, 1972.

محمد مقدسی

گروه فیریک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور، نیشابور، ایران

m.moghadassi@chmail.ir

محمد مقدسی مدرک کارشناسی فیزیک را در سال ۱۳۸۷ از دانشگاه تهران اخذ نمود. همچنین مدرک کارشناسی ارشد و دکتری فیزیک را به ترتیب در سال های ۱۳۸۹ و ۱۳۹۶ از دانشگاه فردوسی مشهد اخذ کرد. علایق پژوهشی وی گرانش، دوگانگی AdS/CFT، و تاریخ علم است.

 http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127330.1414