ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۵، شماره ۱ (۱۳۹۹)، صص. ۶۸-۵۵

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

حساب دیفرانسیل و انتگرال فرکتالی؛ از نظریه تا کاربرد

امیر پیشکو * و علیرضا خلیلی گلمانخانه

چکیده. در این مقاله، مفاهیم اولیه حساب دیفرانسیل و انتگرال فرکتالی را معرفی می‌کنیم و همچنین شباهتها و تفاوتهای آن را با حساب دیفرانسیل و انتگرال کلاسیک و کسری بیان می‌کنیم؛ از جمله خواهیم دید که حساب دیفرانسیل و انتگرال فرکتالی و کلاسیک از نوع موضعی و حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری از نوع غیرموضعی است.

۱. مقدمه

دانشمندان علوم تجربی همیشه به‌دنبال نظریه‌های مناسب برای شرح مشاهدات خود هستند زیرا نظریه‌ها به تبیین پدیده‌ها کمک می‌کنند. یک نظریه دقیق می‌تواند پیش‌بینی‌های دقیقی هم به‌دنبال داشته باشد. اگر رفتار یک سیستم دقیق باشد می‌توان از معادلات متناسب با دقت سیستم برای توصیف آن استفاده کرد؛ اما سیستم هایی هم وجود دارند که رفتاری آماری و های فرکتالی در خیلی از پدیده‌های طبیعی ظاهر می‌شوند. فرکتالها دارای ساختاری پیچیده هستند و حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی یا کلاسیک را نمی‌توان برای آنها به‌کار گرفت؛ درست همان‌گونه که پدیده‌های زیادی در طبیعت وجود دارند که پیچیدگی و نامنظمی در اشکال و ظاهر آنها باعث گردیده است که نتوان هندسه اقلیدسی را برای مدل‌سازی دقیق آنها به‌کار گرفت.

فرکتال ساختاری هندسی متشکل از اجزایی است که با بزرگ کردن هر جزء آن به نسبت معین، همان ساختار اولیه به‌دست آید. به عبارتی دیگر، فرکتال ساختاری است که هر جزء آن با کل آن شبیه و همانند است. فرکتالها شکلهایی هستند که بر خلاف شکلهای هندسی اقلیدسی به هیچ وجه منظم نیستند. اجسام فرکتالی از دور و نزدیک یکسان دیده می‌شوند و به‌اصطلاح دارای خاصیت خودتشابهی هستند. به زبان فنی‌تر، فرکتال زیرمجموعه‌ای از فضای اقلیدسی است که بعد هاسدورف [۱] آن اکیدا از بعد توپولوژیک آن بیشتر است. برای تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال کلاسیک به حساب دیفرانسیل و انتگرالی روی فرکتالها از نظریه هندسی اندازه[۲] استفاده می‌شود و باید توجه کرد که این روش الگوریتمی نیست، به این معنی‌که روش عددی حاصل از این نظریه طی یک فرآیند تکراری و با تولید یک دنباله ما را به‌تدریج به جواب نزدیک نمی‌کند. آنالیز روی فرکتالها نقش ویژه‌ای در کاربردها و مدل‌سازی فرآیندهای دارای ساختار فرکتالی دارد. تاکنون محققین روشهای مختلفی را برای بنا کردن آنالیز روی فرکتالها پیشنهاد داده‌اند که می‌توان روش احتمالاتی، آنالیز هارمونیکی، فضاهای کسری، حسابان

عبارات و کلمات کلیدی. فرکتال، مشتق‌گیری فرکتالی، انتگرال‌گیری فرکتالی، خاصیت موضعی، بعد هاسدورف.
دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۸/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۲۷
نوع مقاله: مروری
* نویسنده مسئول

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

[1]Hausdorff dimension [2]geometric measure theory

کسری و روشهای مقیاس زمانی را نام برد [۳]. با استفاده از مفهوم فرکتال تعداد زیادی از پدیده‌های شناخته شده در حوزه‌های علوم انسانی، علوم پایه، علوم پزشکی و مهندسی را که در آنها اشکال پیچیده ظاهر می‌شود می‌توان توسط هندسه فرکتالها مدل‌سازی کرد [۱۹].

پس از این مقدمه، در بخش دوم با مرور مختصر حسابان کسری و بیان مفاهیم مشتق موضعی و غیرموضعی خواننده آماده می‌شود تا با حسابان فرکتالی، که از نوع موضعی است، آشنا شود. چون عملگرها در حسابان کسری از نوع دیفرانسیلی–انتگرالی‌اند لذا این حسابان از نوع غیرموضعی است. به دلیل آنکه در حسابان فرکتالی از مفاهیمی در هندسه فرکتالها استفاده می شود لذا بخش سوم برای بیان مفاهیم خودتشابهی مجموعه فرکتالها، بعد توپولوژیک و بعد هاسدورف تنظیم شده است. در بخش چهارم، بخش اصلی مقاله، ابتدا به بیان مفاهیم بنیادی تعریف شده در حسابان فرکتالی شامل تابع پرچم، تابع جرم، تابع پلکانی صحیح، تابع مشخصه و مجموعه فشرده می‌پردازیم و در ادامه مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری فرکتالی روی مجموعه‌های فرکتالی را بیان می‌کنیم.

۲. مروری بر مفاهیم مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری کسری

نظریه مشتق و انتگرال از مرتبه غیرصحیح (کسری) دارای تاریخچه‌ای طولانی است[۲۶، ۲۷]. مشتقهای کسری زیادی تعریف شده است، ازجمله مشتقهای کسری ریمان، لیوویل [3]، و کاپوتو[4]. بیشتر آنها بصورت عملگرهای دیفرانسیلی–انتگرالی‌اند و تعدادی از آنها هم با استفاده از مفهوم حد تعریف شده‌اند. قبل از آنکه به تعریف مشتق کسری بپردازیم لازم است که در مورد مفاهیم مشتق موضعی و مشتق غیرموضعی توضیحی بدهیم. اگر تعیین ویژگی‌ای و یا تعریفی مبتنی بر بررسی رفتار شیئ در همسایگی‌های نقاطی خاص باشد به آن تعریف یا ویژگی موضعی گفته می‌شود و در غیر این صورت آن را غیرموضعی می‌نامند.

در اینجا سه تعریف معمول برای مشتقِ مرتبه کسری را که در حسابان کسری به کار می‌رود می‌آوریم. فرض کنید تابع f روی $[a,b]$ تعریف شده باشد و α عددی حقیقی و n عددی صحیح نامنفی باشد که $n-۱\leq\alpha<n$. با فرض اینکه انتگرالهای زیر وجود داشته باشد تعریف می‌کنیم:

(۱) **مشتق ریمان–لیوویل:**

$$ {}_{a}^{RL}D_t^{\alpha}f(t)=\frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d^n}{dt^n})\int_a^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+۱}}d\tau. $$

(۲) **مشتق‌کاپوتو:**

$$ {}_{a}^{C}D_t^{\alpha}f(t)=\frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+۱}}d\tau. $$

برای مثال داریم $ {}_{۰}^{C}D_t^{\frac{۱}{۲}}t=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{۱}{۲}}$. همچنین، برای $a=۰$ ، $\alpha=\frac{۱}{۲}$ و $f(t)=t$ مشتق کاپوتوی تابع $f(t)$ از مرتبه $\frac{۱}{۲}$ را به شرح زیر محاسبه می‌کنیم: داریم $n=۱$ و بنابراین

$$ {}_{۰}^{C}D_t^{\frac{۱}{۲}}t^p=\frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)}\int_۰^t\frac{[\tau^p]^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha+۱-n}}d\tau=\frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)}\int_۰^t\frac{\Gamma(p+۱)}{\Gamma(p-n+۱)}(t^{p-n})(t-\tau)^{n-\alpha-۱}d\tau $$

[3] Liouville [4] M. Caputo

با تعویض متغیر $\tau = \lambda t$ که در آن $0 < \lambda < 1$ داریم

$$\begin{aligned}
{}_{0}^{C}D_t^{\frac{1}{2}} t^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_0^1 (\lambda t)^{p-n}((1-\lambda)t)^{n-\alpha-1} t d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \int_0^1 \lambda^{(p-n)}(1-\lambda)^{n-\alpha-1} d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} B(p-n+1, n-\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} t^{p-\alpha} \frac{\Gamma(p-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(P-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

(۳) **مشتق کولوانکار و گانگال** : برای تابع $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ و $0 < q < 1$ این مشتق با حد زیر تعریف می‌شود

$$D^q f(y) = \lim_{x \to y} \frac{d^q(f(x) - f(y))}{d(x-y)^q}.$$

اگر حد بالا وجود داشته و متناهی باشد، در آن‌صورت می‌گوییم مشتق کسری–موضعی در نقطه y وجود دارد. در اینجا $\frac{d^q(\cdot)}{d(\cdot)^q}$ مشتق لیوویل–ریمان است.

این تعریف مشتق را می‌توان به مرتبه‌های دیگر تعمیم داد [۱۶]. این مشتق را کولوانکار و گانگال در [۱۵] برای بررسی رفتار تابعهای پیوسته‌ای که هیچ‌جا مشتق‌پذیرند تعریف کرده‌اند. بعنوان مثال تابع معروف وایرشتراس را درنظر بگیرید. این تابع با اینکه پیوسته است اما در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر (معمولی) نیست. اما آیا می‌توان مشتق جدیدی تعریف کرد که تابع وایرشتراس در نقاط مختلف مشتق‌پذیر بشود؟

در پایان این بخش اجازه دهید نکاتی را متذکر شویم. حسابان کسری کاربردهای گسترده‌ای در نظریه سیستم‌های دینامیکی دارد و دلیل آن این است که می‌توان با استفاده از این حسابان، سیستم‌ها و محیطهایی را توصیف کرد که مشخصه آنها قانون توانی، غیرموضعی بودن و حافظه طولانی مدت است. به‌عنوان نمونه مدلهای متنوعی که بر اساس مشتقها و انتگرال‌های از مرتبه کسری پایه‌ریزی شده‌اند برای توصیف رفتار فرآیندهای مالی و اقتصادی ارائه شده‌اند [۱].

از سوی دیگر، تعریفهای ریمان و کاپوتو غیرموضعی‌اند و برخی ریاضی‌دانان این تعریفها را مناسب کاربردها نمی‌دانند. مثلا با استفاده از تعریفهای بالا می‌بینیم که

$$\frac{d^q f(\beta x)}{dx^q} = \beta^q \frac{d^q f(\beta x)}{d(\beta x)^q}$$

و این خاصیتی مناسب مقیاس‌بندی[5] است[۱۶]. در نتیجه تعریفهای مشتق از نوع غیرموضعی نامناسب‌اند و باید اصلاح شوند. علاوه بر این، مشتق کسری تابع ثابت، صفر نیست و لذا اضافه کردن یک مقدار ثابت به تابع، مشتق کسری آن را تغییر می‌دهد. مثلا در رابطه زیر قرار دهید $p = 0$،

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} x^{p-q} \qquad p > -1.$$

[5] scaling

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

کولوانکار و گانگال در مقاله‌های [۱۶، ۱۷، ۱۸] مقدمات حسابان کسری–موضعی را مطرح و اندازه فرکتالی را تعریف کردند. مفهوم مشتق کسری–موضعی با این انگیزه مطرح شد که برای تقریب موضعی توابع مقیاس‌بندی از سری تیلور کسری استفاده شود. اخیرا حسابان کسری–موضعی در حوزه‌های مختلفی به‌کار گرفته شده است اما متاسفانه مشکل اساسی این است که تعریفهای آن الگوریتمی نیستند. اساسا روشی را «الگوریتمی» می‌نامند که با آن روش بتوان از نرم‌افزار استفاده کرد و کمیت‌هایی مثل مشتق و انتگرال را محاسبه نمود. از دیدگاه تئوری وقتی فرآیندی الگوریتمی است می‌توان هر محاسبه‌ای را انجام داد. ساختار الگوریتمی، استفاده از کامپیوتر را برای محاسبات امکان‌پذیر می‌کند.

با توجه به موضعی‌بودن قوانین فیزیک، حسابانی تحت عنوان «حسابان فرکتالی» ابداع شده است[۲۰، ۲۱، ۲۲]. این حسابان بر اساس یک روش شبه‌ریمانی پایه‌ریزی شده است و می‌توان مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از توابع تعریف‌شده روی مجموعه‌های کانتور و منحنی‌های فرکتالی را با آن انجام داد. حسابان فرکتالی تعمیم حسابان کلاسیک است و در مواردی که حسابان کلاسیک را نمی‌توان به‌کار برد، می‌شود از حسابان فرکتالی استفاده نمود. از جمله موارد برتری حسابان فرکتالی عبارت است از: ۱) مشتق فرکتالی از نوع موضعی و در فیزیک بسیارمهم است. وقتی در فیزیک اندازه گیری انجام می‌دهیم به این معنی است که مقدار یک کمیت مثل دما، میدان الکتریکی را در یک «نقطه» اندازه گیری می‌کنیم؛ یعنی توجه ما به یک نقطه است و از نقاط مجاور به آن نزدیک می‌شویم (مثل فرآیند مشتق تابع در یک نقطه). دلیل موضعی بودن این است که از یک سو اصل علیت را نقض نمی‌کند و از سوی دیگر اندازه‌گیریها در فیزیک همه از نوع موضعی‌اند؛ ۲) مرتبه مشتق فرکتالی از نوع غیرصحیح است و دارای معنای هندسی است و دقیقا مقدار آن برابر با بعد تابعی است که آن را توصیف می‌کند؛ ۳) مرتبه مشتق فرکتالی به‌خاطر داشتن رابطه با بعد طیفی دارای معنای فیزیکی است[۱۰، ۱۳]. حسابان فرکتالی چارچوبی را فراهم می‌کند که بتوانیم معادلات دیفرانسیل روی مجموعه‌های فرکتالی به‌دست آوریم. اولین رده از توابعی که در حسابان فرکتالی تعریف شده است روی مجموعه‌های شبه–کانتوری نازک می‌باشد که اندازه لبگ آنها صفر است. برای اطلاعات بیشتر به مراجع [۹، ۱۲، ۱۱] مراجعه کنید.

مفاهیم مشابه حسابان کلاسیک در حسابان فرکتالی عبارت‌اند از: F^α–حد، F^α–پیوستگی، F^α–مشتق، F^α–انتگرال. در بخشهای بعد حسابان فرکتالی را معرفی می‌کنیم و کاربردهایی از آن را تشریح می‌کنیم؛ اما قبل از این کار اجازه دهید فرکتال و تعدادی مفاهیم وابسته را تعریف کنیم.

۳. مروری بر مفاهیم هندسه فرکتالها

در این بخش مفاهیم فرکتال، بعد توپولوژیک و هاسدورف را تعریف می‌کنیم و با آوردن مثالهایی این مفاهیم را توضیح می‌دهیم.

۱.۳. خاصیت خودتشابهی و بعد توپولوژیک. مجموعه فرکتال دارای ساختاری دقیق است و در مقیاسهای کوچک دلخواه دارای جزئیات می‌باشد. چنین مجموعه‌ای چنان بی‌نظم است که با هندسه کلاسیک قابل توصیف و تبیین نیست. مجموعه‌های فرکتال دارای خاصیت خودتشابهی‌اند. مجموعه خودتشابه مجموعه‌ای است که از نسخه‌های کوچک‌شده خودش تشکیل شده است. این ویژگی محاسبه دقیق بعد هاسدورف فرکتالها را ساده می‌کند. اما قبل از تعریفهای دیگر ابتدا مفهوم انقباض را باید تعریف کنیم.

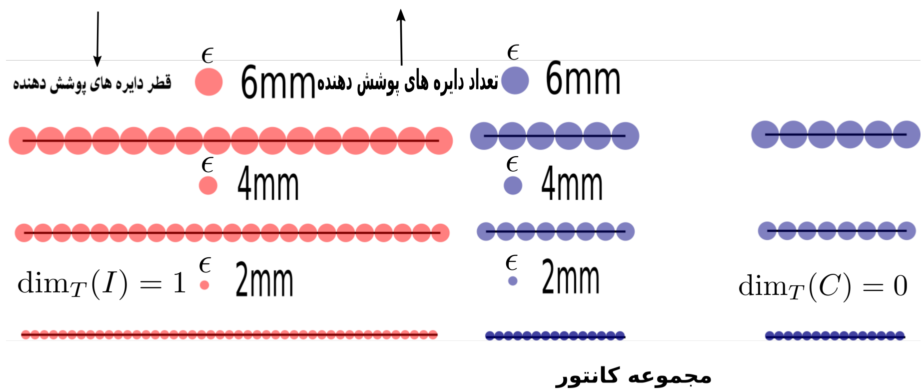
نگاشت $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ یک انقباض است اگر عدد ثابت $c\in(۰,۱)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نامساوی

$$\parallel \psi(x)-\psi(y)\parallel\leq c\parallel x-y\parallel$$

برای $x,y\in\mathbb{R}^n$ برقرار باشد. مجموعه فشرده ناتهی V در $\mathbb{R}^n$ خودمتشابه است اگر $V=\bigcup_{i=۱}^{m}\psi_i(V)$ که در آن $m\geq ۲$ و $\psi_۱,\psi_۲,\dots,\psi_m$ مجموعه‌ای از m انقباض تعریف‌شده روی $\mathbb{R}^n$ است.

 http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. بعد پوششی توپولوژیک X را با $\dim_T(X)$ نمایش می‌دهند و برابر کوچکترین عدد صحیح $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ است که هر پوشش باز متناهی X یک تظریف باز با مرتبه حداکثر n داشته باشد. مقادیر بعد توپولوژیک می‌تواند ۱− (برای مجموعه تهی)، ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد.



شکل ۱: دایره‌های پوشش‌دهنده مجموعه کانتور (سمت راست) و مجموعه بازه واحد [۰،۱](سمت چپ) و بعد توپولوژیک آنها

۲.۳. بعد هاسدورف. فضای $\mathbb{R}^n$ و زیر مجموعه F از آن را در نظر بگیرید. فرض کنید $\{U_i\}$ یک پوشش شمارا برای مجموعه F باشد. برای $\epsilon > 0$، گوییم $\{U_i\}$ یک ϵ–پوشش برای F است (شکل ۱) هرگاه برای هر i داشته باشیم $\operatorname{diam}(U_i) \leq \epsilon$. منظور از diam قطر مجموعه است. حالا فرض کنید $s \in (0, \infty)$ عددی دلخواه باشد و تعریف کنید

$$H^s_\epsilon(F) = \inf \left\{ \sum_i \operatorname{diam}(U_i)^s \mid \text{است } F \text{ پوشش} - \epsilon \text{ یک } U_i \right\}.$$

توجه کنید $H^s_\epsilon(F)$ عدد حقیقی نامنفی و یا $+\infty$ است و می‌توان دید که $H^s_\epsilon(F)$ نسبت به ϵ نزولی است. بنابراین حد آن موجود است و برابر است با

$$H^s(F) = \lim_{\epsilon \to 0} H^s_\epsilon(F)$$

روشن است که $H^s(\emptyset) = 0$. این مقدار را اندازه هاسدورف مجموعه F می‌نامند [۲۸].

برای هر مجموعه $F \subset \mathbb{R}^n$ یکی از گزاره‌های زیر درست است:

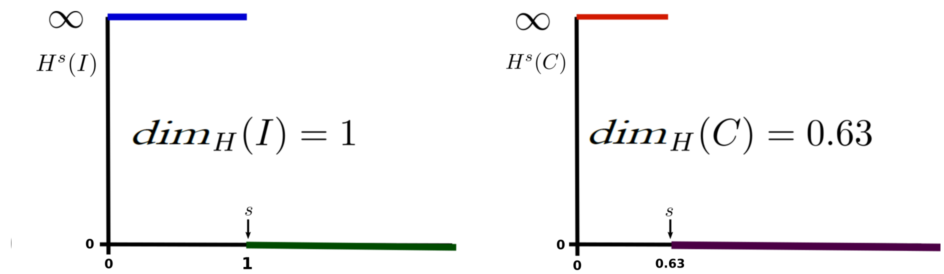
(۱) برای هر $s \geqslant 0$ ، $H^s(F) = 0$ بعد هاسدورف مجموعه F که با $\dim_H(F)$ نشان داده می شود برابراست با $\dim_H(F) = 0$.

(۲) برای هر $s \geqslant 0$ ، $H^s(F) = \infty$ بعد هاسدورف مجموعه Fبرابر است با $\dim_H(F) = \infty$.

(۳) فقط یک عدد s_0 موجود است که $0 < H^{s_0}(F) < \infty$. در این حالت اگر $s < s_0$ ، آنگاه $H^s(F) = \infty$ و اگر $s > s_0$ ، آنگاه $H^s(F) = 0$ است بعد هاسدورف مجموعه F برابر است با عدد یکتای s_0 یعنی $\dim_H(F) = s_0$.

در شکلهای(۱) و (۲) دو مثال از دو مجموعه مختلف با ابعاد توپولوژیکی و هاسدورفی آنها رسم شده است. معلوم است که بعد هاسدورف مجموعه کانتور از بعد توپولوژیک آن بزرگتر است در صورتی که بعد هاسدورف و توپولوژیک مجموعه $I = [0, 1]$ برابر ۱ است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402



شکل ۲: مجموعه کانتور (سمت راست) و بعد هاسدورف بازه واحد (سمت چپ)

۴. حسابان فرکتالی

قبل از معرفی مفاهیم حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال فرکتالی لازم است چند مفهوم پایه‌ای دیگر هم تعریف شوند که عبارت‌اند از: تابع پرچم[۶]، تابع جرم[۷]، تابع پلکانی صحیح[۸] و تابع مشخصه.

۱.۴. تابع پرچم، تابع جرم و تابع پلکانی صحیح. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از خط حقیقی باشد. در اینجا فرض می‌شود که مجموعه‌ی F فرکتال است. در این بخش مفهوم محتوی یا α–جرم F در فاصله $[a,b]$ را فرمول‌بندی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $۰ < \alpha \leq ۱$، مگر این که خلاف آن تصریح شود.

برای مجموعه F و فاصله I، تابع پرچم $\theta(F,I)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\theta(F,I) = \begin{cases} ۱ & F \cap I \neq \emptyset \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

افراز $P_{[a,b]}$ یا به‌اختصار P برای فاصله $[a,b]$، که $a < b$، عبارت است از مجموعه متناهی از نقاط

$$\{a = x_۰, x_۱, \ldots, x_n = b\},$$

که در آن $x_i < x_{i+۱}$. هر فاصله به‌صورت $[x_i, x_{i+۱}]$ یک فاصله مولفه‌ای یا مولفه افراز P نامیده می‌شود. اگر Q افرازی از $[a,b]$ باشد و $P \subset Q$، آن‌گاه Q تظریفی از P نامیده می‌شود. اگر $a = b$، آن‌گاه $\{a\}$ تنها افراز $[a,b]$ است. برای مجموعه‌ی F و افراز $P_{[a,b]}$، که $a < b$، تعریف زیر را داریم

$$\sigma^\alpha[F,P] = \sum_{i=۰}^{n-۱} \frac{(x_{i+۱} - x_i)^\alpha}{\Gamma(\alpha + ۱)} \theta(F, [x_i, x_{i+۱}]). \qquad (۱)$$

اگر $a = b$، آن‌گاه مقدار $\sigma^\alpha[F,P]$ برابر صفر تعریف می‌شود. توجه می‌کنیم که مجموع ظاهر شده در (۱) شامل عبارتی از یک فاصله مولفه‌ای است اگر و تنها اگر آن مولفه حداقل شامل یک نقطه از F باشد. به‌علاوه برای هر مجموعه F و افراز P از $[a,b]$، $\sigma^\alpha[F,P] \geq ۰$.

حال به تعریف جرم دانه‌بندی‌شده [۹] می‌پردازیم.

[6] flag function [7] mass function [8] integral staircase function [9] coarse-grained mass

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

تعریف ۱.۴. فرض کنید $\delta > 0$ و $a \leq b$ باشد. جرم دانه‌بندی‌شده $\gamma_\delta^\alpha(F, a, b)$ برای $F \cap [a, b]$ با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\gamma_\delta^\alpha(F, a, b) = \inf_{\{P_{[a,b]}:|P|\leq\delta\}} \sigma^\alpha[F, P]. \tag{۲}$$

در این رابطه داریم

$$|P| = \max_{0\leq i\leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

در معادله (۲)، اینفیمم نسبت به همه افرازهای P روی بازه $[a, b]$ با شرط $|P| \leq \delta$ گرفته می‌شود.
تابع جرم $\gamma^\alpha(F, a, b)$ با رابطه $\gamma^\alpha(F, a, b) = \lim_{\delta\to 0} \gamma_\delta^\alpha(F, a, b)$ تعریف می‌شود. توجه می‌کنیم که وقتی δ کاهش می‌یابد، $\gamma_\delta^\alpha(F, a, b)$ افزایش می‌یابد. لذا $\gamma_\delta^\alpha(F, a, b)$ همواره وجود دارد و عددی نامنفی است که ممکن است برابر $+\infty$ نیز باشد.
اکنون خاصیت جمع‌پذیری تابع جرم به‌صورت زیر است.

قضیه ۲.۴ ([۲۱]،قضیه ۱۰). فرض کنید $a < b < c$ و $\gamma^\alpha(F, a, c) < \infty$. در این صورت داریم

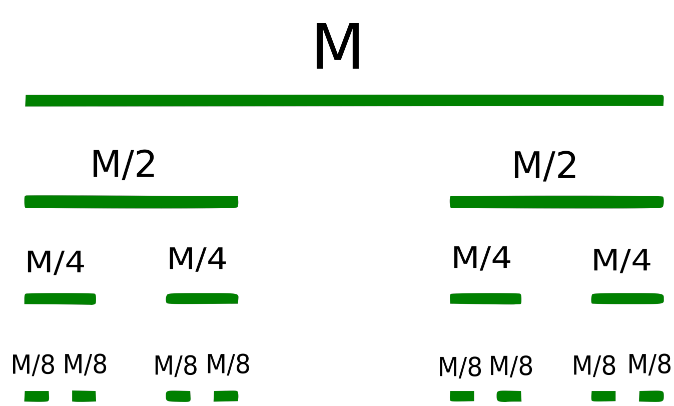
$$\gamma^\alpha(F, a, c) = \gamma^\alpha(F, a, b) + \gamma^\alpha(F, b, c).$$

خواص تغییر مقیاس و انتقال تابع جرم مانند خواص مشابه برای اندازه هاسدورف‌اند.

قضیه ۳.۴. برای $F \subset \mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، تعریف کنید $F + \lambda = \{x + \lambda : x \in F\}$ و $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$. داریم

(۱) انتقال: $\gamma^\alpha(F + \lambda, a + \lambda, b + \lambda) = \gamma^\alpha(F, a, b)$.

(۲) تغییر مقیاس($\lambda \geq 0$): $\gamma^\alpha(\lambda F, \lambda a, \lambda b) = \lambda^\alpha \gamma^\alpha(F, a, b)$.



شکل ۳: جرم توزیع‌شده M روی بازه‌های باقیمانده در مرحله‌های صفرم C_0 ، اول C_1 ، دوم C_2 و سوم C_3 ساختن مجموعه کانتور.

تذکر ۴.۴. اگر F خودمتشابه باشد و برای λ_0ی خاص $\lambda_0 F \cap [\lambda_0 a, \lambda_0 b] = F \cap [\lambda_0 a, \lambda_0 b]$، آنگاه خاصیت تغییر مقیاس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\gamma^\alpha(F, \lambda_0 a, \lambda_0 b) = \lambda_0^\alpha \gamma^\alpha(F, a, b).$$

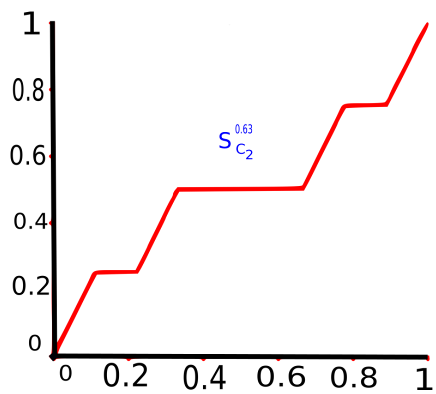
http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

مثالی در این باره مجموعه کانتور C است (شکل ۳)، با $\alpha=\frac{\ln 2}{\ln 3}$، $a=0$ و $b=1$ و $\lambda_0=\frac{1}{3n}$.
حال مفهوم مهم تابع پلکانی صحیح برای مجموعه‌ی F از مرتبه‌ی α را بیان می‌کنیم. این تابع که تعمیمی از توابع پله‌ای لبگ–کانتور است، نشان می‌دهد که چگونه جرم $F\cap[a,b]$ با افزایش b، افزایش می‌یابد.

تعریف ۵.۴. فرض کنید α_0 عددی حقیقی و ثابت باشد. تابع پلکانی صحیح $S_F^\alpha(x)$ از مرتبه α برای مجموعه F به صورت زیر تعریف می‌شود(شکل ۴):

$$S_F^\alpha(x)=\begin{cases}\gamma^\alpha(F,a_0,x) & x\geq a_0\\ -\gamma^\alpha(F,x,a_0) & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

عدد a_0 را می‌توان به‌گونه‌ای ساده‌تر انتخاب کرد.



شکل ۴: نمودار تابع پلکانی صحیح با بعد ۰/۶۳ برای مجموعه C_2

قضیه ۶.۴. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $0<\alpha\leq 1$ باشد. اگر $\gamma^\alpha(F,a,b)$ متناهی باشد، آن‌گاه برای هر $x,y\in(a,b)$ که $x<y$، گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(۱) $S_F^\alpha(x)$ نسبت به متغیر x، صعودی است.

(۲) اگر $F\cap(x,y)=\emptyset$، آن‌گاه S_F^α در فاصله $[x,y]$ ثابت است.

(۳) $S_F^\alpha(y)-S_F^\alpha(x)=\gamma^\alpha(F,x,y)$.

(۴) S_F^α در فاصله (a,b) پیوسته است.

۲.۴. بعد γ. همان‌طورکه با استفاده از اندازه هاسدورف می‌توان بعد هاسدورف را تعریف کرد، با استفاده از تابع جرم نیز می‌توان بعد گاما را تعریف نمود. اگر $0<\alpha<\beta\leq 1$، آن‌گاه $\sigma^\beta[F,P]\leq|P|^{\beta-\alpha}\sigma^\alpha[F,P]\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}$، و بنابراین $\gamma_\delta^\beta(F,a,b)\leq\delta^{\beta-\alpha}\gamma_\delta^\alpha(F,a,b)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}$. پس وقتی $\delta\to 0$، با شرط $\gamma^\alpha(F,a,b)<\infty$ و $\alpha<\beta$، داریم $\gamma^\beta(F,a,b)=0$. به‌ازای مقادیری از α، کوچکتر α_0، $\gamma^\alpha(F,a,b)$ نامتناهی است و به سمت صفر $\alpha>\alpha_0$ جهش می‌کند (اگر $\alpha_0<1$). این عدد را بعد γ برای F می‌نامیم. برای دقیقتر کردن مفهوم بعد، تصریح می‌کنیم که $\gamma^{\alpha_0}(F,a,b)$ ممکن است مقادیر صفر، متناهی ناصفر و یا نامتناهی باشد.

 http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

تعریف ۷.۴. بعد γ برای $F \cap [a,b]$ را با نماد $\dim_\gamma(F \cap [a,b])$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\dim_\gamma(F \cap [a,b]) = \inf\{\alpha : \gamma^\alpha(F,a,b) = 0\} = \sup\{\alpha : \gamma^\alpha(F,a,b) = \infty\}.$$

۳.۴. F^α–پیوستگی. در این بخش مفهوم حد و پیوستگی را به کمک توپولوژی القایی از متریک $\mathbb{R}$ روی $F \subset \mathbb{R}$ معرفی می‌کنیم. هدف از انجام این کار ایجاد تمایز بین این مفاهیم و مشابه آنها روی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۸.۴. فرض کنید $F \subset \mathbb{R}$، $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $x \in F$. عدد ℓ حد f از طریق نقاط F یا F–حد، وقتی $y \to x$، نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد که $y \in F$ و

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - \ell| < \varepsilon.$$

اگر عدد فوق موجود باشد، با نماد $\ell = F^\alpha\text{–}\lim_{y \to x} f(y)$ نشان داده می‌شود.

در این تعریف مقادیر تابع در y، وقتی $y \notin F$،درنظر گرفته نمی‌شود. همچنین F^α–حد در نقاطی که $x \notin F$، تعریف نمی‌شود. همچنین توجه می‌کنیم که چون F^α–حد وقتی $x \to y$، شامل نقاطی حول x که در Fاند می‌شود، ممکن است در برخی نقاط دارای حد یک طرفه باشد (مانند نقاط $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}$ وقتی $F = C$ مجموعه کانتور).

تعریف ۹.۴. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ در $x \in F$، F^α–پیوسته است اگر $f(x) = F^\alpha\text{–}\lim_{y \to x} f(y)$.

توجه می‌کنیم که مفهوم F^α–پیوستگی در $x \notin F$، تعریف نمی‌شود. واضح است که پیوستگی تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، در $x \in F$، F^α–پیوستگی در این نقطه را نتیجه می‌دهد. اما عکس این مطلب صحیح نیست. چند مثال در نظر می‌گیریم. فرض کنید C مجموعه کانتور باشد. در این صورت توابع $f_1(x) = 1$ و $f_2(x) = x$ روی $[0,1]$ پیوسته هستند و همچنین روی $C \cap [0,1]$، C–پیوسته نیز می‌باشند. برعکس، توابع $f_3(x) = \chi_C(x)$ و $f_4(x) = x.\chi_C(x)$، که $\chi_C(x)$ تابع مشخصه C است، را در نظر بگیرید. این توابع C^α–پیوسته هستند، اما پیوسته نیستند.

تعریف ۱۰.۴. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ روی $E \subset F$، F–پیوسته یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای $x \in F$ و $y \in E$ داشته باشیم

$$|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

واضح است که F^α–پیوستگی یکنواخت روی E، F^α–پیوستگی روی E را نتیجه می‌دهد. عکس این مطلب در حالات خاصی برقرار است.

۴.۴. F^α–انتگرال. از روش ریمان برای تعریف انتگرال استفاده می‌کنیم؛ زیرا روشی مستقیم‌تر و از نظر الگوریتمی دارای مزیتهایی است. در تعریف F^α–انتگرال در زیر، مقادیر تابع فقط در نقاط F در نظر گرفته می‌شوند. به علاوه به‌جای طول زیرفاصله‌ها، تفاضل بین مقادیر تابع فاصله‌ای S_F^α در نقاط انتهایی را در نظر می‌گیریم. از این نظر F^α–انتگرال شبیه انتگرال ریمان–اشتیلتیس است. (با این حال این دو کلا با هم تفاوت دارند.)

رده توابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، که روی F کراندار هستند، با نماد $B(F)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان گفت

$$f \in B(F) \Leftrightarrow -\infty < \inf_{x \in F} f(x) \leq \sup_{x \in F} f(x) < +\infty.$$

در قدم اول جمع‌های بالایی و پایینی را که مقدار F^α–انتگرال را تقریب می‌زنند، تعریف می‌کنیم. فرض کنید $f \in B(F)$ و I یک بازه بسته باشد. در این صورت اگر $F \cap I \neq \emptyset$، آنگاه $M[f,F,I] = \sup_{x \in F \cap I} f(x)$ و در غیر این صورت $M[f,F,I] = 0$. به طور مشابه اگر $F \cap I \neq \emptyset$، آنگاه $m[f,F,I] = \inf_{x \in F \cap I} f(x)$ و در غیر این صورت $m[f,F,I] = 0$.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

فرض کنید $S_F^\alpha(x)$ برای $x \in [a,b]$ متناهی باشد. فرض کنید P یک افراز برای $[a,b]$ با نقاط $x_0,\dots,x_n$ باشد. F^α–مجموع بالایی و F^α–مجموع پایینی برای تابع f نسبت به افراز P با روابط زیر داده می‌شوند:

$$U^\alpha[f,F,P] = \sum_{i=0}^{n-1} M[f,F,[x_i,x_{i+1}]](S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)),$$

$$L^\alpha[f,F,P] = \sum_{i=0}^{n-1} m[f,F,[x_i,x_{i+1}]](S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)).$$

در اینجا به ظاهر شدن اشتراک $F\cap I$ در تعریف M و m و همچنین به استفاده از تعریف $S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)$ در انتگرال ریمان–اشتیلتیس به‌جای $x_{i+1}-x_i$ تاکید می‌کنیم. از تعریف واضح است که

$$U^\alpha[f,F,P] \geq L^\alpha[f,F,P].$$

با عمل تظریف، F^α–مجموع بالایی، کاهش می‌یابد و F^α–مجموع پایینی، افزایش (هر دو به صورت یکنوا) می‌یابد. درواقع، فرض کنید $F\subset \mathbb{R}$ و $f\in B(F)$. اگر Q تظریفی از افراز P باشد، آنگاه

$$U^\alpha[f,F,Q] \leq U^\alpha[f,F,P] \qquad \text{و} \qquad L^\alpha[f,F,Q] \geq L^\alpha[f,F,P].$$

و اگر P و Q دو افراز $[a,b]$ باشند، آنگاه $U^\alpha[f,F,P] \geq L^\alpha[f,F,Q]$ [۲۱]. حال آماده هستیم تا F^α–انتگرال را تعریف کنیم.

تعریف ۱۱.۴. فرض کنید F به گونه‌ای باشد که S_F^α روی $[a,b]$ متناهی باشد. برای $f\in B(F)$، F^α–انتگرال پایینی به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\underline{\int_a^b} f(x)d_F^\alpha x = \sup_{P_{[a,b]}} L^\alpha[f,F,P].$$

همچنین F^α–انتگرال بالایی به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\overline{\int_a^b} f(x)d_F^\alpha x = \inf_{P_{[a,b]}} U^\alpha[f,F,P].$$

سوپریمم و اینفیمم روی همه افرازهای P از $[a,b]$ گرفته می‌شوند. عبارت $d_F^\alpha x$ نیز معنی مجزایی ندارد و صرفا نمادگذاری است. واضح است که $\underline{\int_a^b} f(x)d_F^\alpha x \leq \overline{\int_a^b} f(x)d_F^\alpha x$.

فرض کنید $f\in B(F)$. گوییم f روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر است هرگاه $\underline{\int_a^b} f(x)d_F^\alpha x = \overline{\int_a^b} f(x)d_F^\alpha x$. در این حالت F^α–انتگرال برای f روی $[a,b]$ با نماد $\int_a^b f(x)d_F^\alpha x$ نشان داده می‌شود. می‌توان ثابت کرد که اگر $f\in B(F)$ در این صورت f روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، افراز P روی $[a,b]$ موجود باشد که $U^\alpha[f,F,P] < L^\alpha[f,F,P]+\varepsilon$.

و مطابق معمول فرض کنید f روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر باشد، که $a<b$. در این صورت تعریف می‌کنیم $\int_b^a f(x)d_F^\alpha x = -\int_a^b f(x)d_F^\alpha x$.

قضیه ۱۲.۴ ([۲۱]، قضیه ۳۹). فرض کنید F به‌گونه‌ای باشد که $F\cap[a,b]$ فشرده و S_F^α روی $[a,b]$ متناهی باشد. فرض کنید $f\in B(F)$ و $a<b$. در این صورت اگر تابع f روی $F\cap[a,b]$، F–پیوسته باشد، آنگاه f روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

مثالی ساده اما مهم از محاسبه انتگرال درگزاره زیر آمده است.

گزاره ۱۳.۴ ([۲۱]، لم ۴۶). اگر $\chi_F(x)$ تابع مشخصه روی مجموعه $F\subset\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\int_a^b \chi_F(x)d^\alpha = S_F^\alpha(b)-S_F^\alpha(a)$.

اکنون بسیاری از قضیه‌های انتگرال معمولی را می‌توان بیان کرد[۲۱]:

- فرض کنید $a<b$ و f روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر باشد. فرض کنید $c\in(a,b)$. در این صورت f روی $[a,c]$ و $[c,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر است. به علاوه داریم

$$\int_a^b f(x)d_F^\alpha x=\int_a^c f(x)d_F^\alpha x+\int_c^b f(x)d_F^\alpha x.$$

- فرض کنید f و g روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر، و λ عددی حقیقی باشد. در این صورت
  (الف) $\int_a^b \lambda f(x)d_F^\alpha x=\lambda\int_a^b f(x)d_F^\alpha x$.
  (ب) $\int_a^b (f(x)+g(x))d_F^\alpha x=\int_a^b f(x)d_F^\alpha x+\int_a^b g(x)d_F^\alpha x$.
- اگر $f:[a,b]\longrightarrow[a',b']$، F^α–انتگرال‌پذیر باشد و $s:[a',b']\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد، آنگاه $s\circ f$ روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر است.
- فرض کنید f و g روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت fg نیز روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر است.
- فرض کنید f و g روی $[a,b]$، F^α–انتگرال‌پذیر باشند و برای هر $x\in F\cap[a,b]$، $f(x)\geq g(x)$. در این صورت $\int_a^b f(x)d_F^\alpha x\geq\int_a^b g(x)d_F^\alpha x$.

۵.۴ F^α–مشتق. مانند مشتق‌گیری مرتبه اول معمولی، F^α–مشتق، حد یک خارج قسمت است؛ اما در اینجا به‌جای حد، F–حد را داریم و مخرج تفاضل بین مقادیر تابع پله‌ای S_F^α در دو نقطه است. همچنین از نظر شهودی F نوعا مجموعه تغییر تابع است و α نیز معمولا بعد γی F است.

تعریف ۱۴.۴. اگر F مجموعه‌ای α–کامل باشد، آنگاه F^α–مشتق برای تابع f در x عبارت است از

$$(\mathcal{D}_F^\alpha f)(x)=\begin{cases} F-\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{S_F^\alpha(y)-S_F^\alpha(x)} & x\in F\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

اگر ابهامی وجود نداشته باشد، می‌توانیم از نماد $\mathcal{D}_F^\alpha f(x)$ به‌جای $(\mathcal{D}_F^\alpha f)(x)$ استفاده کنیم.

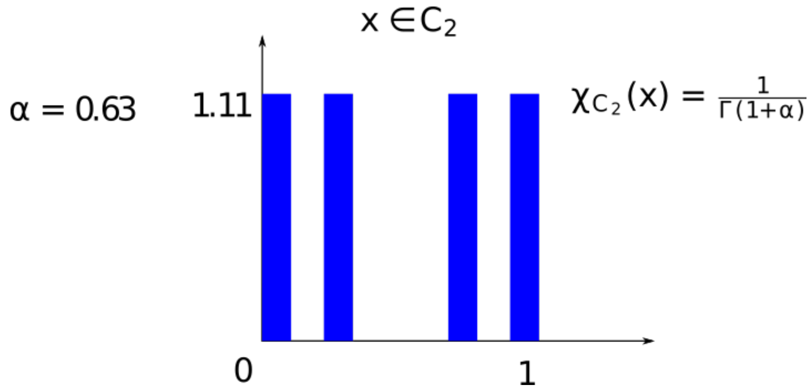
قضیه ۱۵.۴ ([۲۱]). اگر $(\mathcal{D}_F^\alpha f)(x)$ برای هر $x\in(a,b)$ موجود باشد، آنگاه $f(x)$ در (a,b)، F–پیوسته است.

خطی بودن F^α–مشتق، نتیجه مستقیم تعریف ۱۴.۴ است. همان‌طورکه انتظار داریم F^α–مشتق خواص معمول مشتق را دارد: ۱) F^α– مشتق یک عملگر خطی است؛ ۲) F^α– مشتق تابع ثابت صفر است؛ ۳) F^α–مشتق تابع پلکانی صحیح یک مجموعه تابع مشخصه آن مجموعه است (شکل ۵) ؛یعنی $\mathcal{D}_F^\alpha S_F^\alpha(x)=\chi_F(x)$.

جدول زیر مقایسه‌ای بین مفاهیم اساسی در حسابان کلاسیک و حسابان فرکتالی است.

جدول ۱: مقایسه حسابان کلاسیک و F^α–حسابان

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402



شکل ۵: نمودار تابع مشخصه $C_۲$

F^{α}–حسابان	حسابان کلاسیک
مجموعه α–کامل F	$\mathbb{R}$
F^{α}–حد	حد
F^{α}–پیوستگی	پیوستگی
F^{α}–مشتق	مشتق
F^{α}–انتگرال	انتگرال
F^{α}–قاعده لایب‌نیتس	قاعده لایب‌نیتس
F^{α}–انتگرال‌گیری جزء به جزء	انتگرال‌گیری جزء به جزء
F^{α}–بسط سری تیلور	بسط سری تیلور
F^{α}–قضیه‌های اساسی حسابان کلاسیک	قضیه‌های اساسی حسابان کلاسیک
$\int_{۰}^{y}[S_F^{\alpha}(x)]^n dx = \frac{۱}{n+۱}[S_F^{\alpha}(x)]^{(n+۱)}$	$\int_{۰}^{y} x^n dx = \frac{۱}{n+۱}y^{(n+۱)}$
$\frac{d}{dx}[S_F^{\alpha}(x)]^n = n[S_F^{\alpha}(x)]^{(n-۱)}\chi_F(x)$	$\frac{d}{dx}x^n = nx^{(n-۱)}$

۵. کاربردهای حسابان فرکتالی

حسابان فرکتالی در زمینه‌های مختلف فیزیک کاربردهای پیدا کرده است؛ ازجمله در زمینه تعمیم مکانیک کلاسیک به فرم فرکتالی روی مجموعه کانتور[۴]، پراش از توری‌های فرکتالی [۵]،معادله شرودینگر روی منحنی‌های فرکتالی با استفاده از انتگرال مسیر فاینمن [۷]، معادلات ماکسول و گرما روی مکعبهای کانتوری[۶]، صورت فرکتالی معادله فوکر–پلانک و لانگوین[۲۴، ۲۵]، معادله پخش نابهنجار روی منحنی‌های فرکتالی، حسابان فرکتالی برای مواد با توزیع فرکتالی[۱۴]، پتانسیل و میدان الکتریکی برای توزیع بارهای الکتریکی فرکتالی [۲] و چندین کاربرد دیگر [۲۳، ۹] که خواننده می‌تواند آنها را مطالعه کند.

۶. تشکر و قدردانی

در اینجا لازم است از نظرات ارزشمند داوران محترم که در اصلاح و بالا بردن کیفیت مقاله نقش داشته‌اند تشکر و قدردانی نماییم.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

مراجع

[1] R. Baillie, Long memory processes and fractional integration in econometrics, *J. Econometrics*, **73** (1996) 5–59.

[2] N. Delfan, A. Pishkoo, M. Azhini and M. Darus, Using fractal calculus to express electric potential and electric field in terms of staircase and characteristic functions, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, **13** (2020) 19–32.

[3] K. Falconer, *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997.

[4] A. K. Golmankhaneh, About Keplers third law on fractal-time spaces, *Ain Shams Eng. J.*, **9** (2018) 2499–2502.

[5] A. K. Golmankhaneh and D. Baleanu, Diffraction from fractal grating Cantor sets, *J. Modern Opt.*, **63** (2016) 1364–1369.

[6] A. K. Golmankhaneh and D. Baleanu, Heat and Maxwells equations on Cantor cubes, *Rom. Rep. Phys.*, **69** (2017) 1–11.

[7] A. K. Golmankhaneh and D. Baleanu, About Schrödinger equation on fractals curves imbedding in $R^۳$, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **54** (2015) 1275–122.

[8] A. K. Golmankhaneh and D. Baleanu, Non-local integrals and derivatives on fractal sets with applications, *Open Physics.* **14** (2016) 542–548.

[9] A. K. Golmankhaneh and D. Baleanu, Fractal calculus involving gauge function, *Commun. Nonlinear Sc. Nume. Simul.* **37** (2016) 125–130.

[10] A. K. Golmankhaneh and A. S. Balankin, Sub-and super-diffusion on Cantor sets: Beyond the paradox, *Phys. Lett. A* , **382** (2018) 960–967.

[11] A. K. Golmankhaneh and C. Tunc, On the Lipschitz condition in the fractal calculus, *Chaos Solitons Fractals*, **95** (2017) 140–147.

[12] A. K. Golmankhaneh and C. Tunc, Sumudu transform in fractal calculus, *Appl. Math. Comput.* **350** (2019) 386–401.

[13] C. P. Haynes and A. D. Roberts, Generalization of the fractal Einstein law relating conduction and diffusion on networks, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.020601.

[14] F. K. Jafari, M. S. Asgari and A. Pishkoo, Fractal calculus for fractal materials, *Fractal Fract.* **3** (2019). https://doi.org/10.3390/fractalfract3010008.

[15] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions, *Chaos*, **6** (1996) 505–513.

[16] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, Hölder exponents of irregular signals and local fractional derivatives, *Pranama-J. Phys.*, **48** (1997) 49–68.

[17] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, *Local fractional calculus: a calculus for fractal space-time*, Fractals: theory and applications in engineering, Springer, London, 1999 171–181.

[18] K. M. Kolwankar and A. D. Gangal, Local fractional Fokker-Planck equation, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 214-217.

[19] B. B. Mandelbrot,*The Fractal Geometry of Nature*, Freeman and Company, New York, 1977.

[20] A. Parvate and A. D. Gangal, Calculus on fractal subsets of real line- II: Conjugacy with ordinary calculus, *Fractals*, **19** (2011) 271–290.

[21] A. Parvate, Calculus on fractal subsets of real line- I: Formulation, *Fractals*, **17** (2009) 53–81.

[22] A. Parvate and A. D. Gangal, Fractal diferential equations and fractal-time dynamical systems, *Pramana-J. Phys.*, **64** (2005) 389–409.

[23] R. Pashaei, A. Pishkoo and M. S. Asgari, and D. Ebrahimi Bagh, α-Differentiable functions in complex plane, *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.*, **24** (2020) 379–389.

[24] S. Satin, A. Parvate and A. D. Gangal, Fokker–Planck equation on fractal curves, *Chaos Solitons Fractals*, **52** (2013) 30–35.

[25] S. Satin and A. D. Gangal, Langevin equation on fractal curves, *Fractals*, **24** (2016) 7 pp.

 http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402

[۲۶] م. ح. اکرمی، حسابان کسری از نظریه تا کاربرد، ریاضی و جامعه، ۴ (۱۳۹۶) ۵۶–۶۹.
[۲۷] ز. خاتمی، ی. علیزاده، دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۲۹ (۱۳۸۱) ۱۷–۳۰.
[۲۸] م. دلخوش، معرفی فرکتال‌ها و بعدهای کسری، ریاضی و جامعه، ۱ (۱۳۹۶) ۱–۲۳.

امیر پیشکو
پژوهشکده فیزیک و شتابگرها، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، انتهای کارگر شمالی، تهران
apishkoo@gmail.com apishkoo@aeoi.org.ir

دکتر امیر پیشکو فارغ التحصیل کارشناسی دبیری فیزیک از دانشگاه بوعلی سینا همدان، کارشناسی ارشد فیزیک هسته ای از دانشگاه تهران و دکتری ریاضی محض گرایش آنالیز مختلط از دانشگاه ملی مالزی می باشد. ایشان استادیار پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای هستند و حوزه های پژوهشی مورد علاقه ایشان عبارتند از :هندسه فرکتال، حسابان فرکتال و حسابان کسری

علیرضا خلیلی گلمانخانه
گروه فیریک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه، ارومیه
alirezakhalili۲۰۰۲@yahoo.co.in

علیرضا خلیلی گلمانخانه دکترای فیزیک نظری از دانشگاه پونا هندوستان زیر نظر پرفسور گنگال به پایان رسانده است. و همچنین یک فرصت مطالعاتی تحت نظر پروفسور الکساندر بالانکین در دانشگاه (IPN) مکزیک سیتی داشته است . بعنوان استاد مدعو در دانشگاه وان ترکیه در زمینه فرکتالها همکاری داشته است. تاکنون بیش از ۷۶ مقاله و چاپ دو کتاب و بیش از ۱۵۰ داوری مقاله در مجلات معتبر داشته است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.125705.1402