

مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان درخصوص مفهوم اعداد منفی

نرگس یافتیان*، نگار مهدوی و بیتا مهرآیین

چکیده. اعداد منفی یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دانش‌آموزان کشورمان در پایه‌های ششم و هفتم با آن آشنا می‌شوند. شناخت و درک این مفهوم برای دانش‌آموزان همواره با سختی و دشواری همراه بوده است و دانش‌آموزان با بدفهمی‌های مختلف مواجه بوده‌اند. آشنایی دبیران با بدفهمی‌ها و تغییر شیوه آموزش آن‌ها می‌تواند در درک عمیق‌تر دانش‌آموزان از این مفهوم موثر باشد. هدف از مقاله حاضر معرفی مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در یادگیری و حل مسائل مربوط به اعداد منفی براساس پژوهش‌های مرتبط است. آگاهی از این دست موارد، می‌تواند مورد استفاده دبیران پایه‌های مربوط، مولفان کتب درسی و پژوهشگران قرار بگیرد.

۱. مقدمه

یکی از مباحثی که در تحقیقات مرتبط با آموزش ریاضی به‌طور مکرر مورد بررسی قرار گرفته است بدفهمی‌های دانش‌آموزان درخصوص مفاهیم مختلف ریاضی است. «بدفهمی، تفاوت بین درک دانش‌آموزان و باورهای متخصصان نسبت به آن مفهوم در همان حوزه یادگیری است. در واقع، درک یک مفهوم به صورت نادرست یا ناقص است که برای دانش‌آموزانی که با آن مواجه هستند، معنادار و کارآمد است، زیرا از لحاظ ادراکی برای آن‌ها منطقی است» ([۲۶، ص ۱]). می‌توان گفت بدفهمی زمانی اتفاق افتاده است که درک مفهوم در ذهن فرد با حقایق ریاضی مغایر باشد. به بیان دیگر، بدفهمی ایده یا نظر اشتباهی است که از درک نادرست، نتیجه می‌شود و علت آن بی‌دقتی و بی‌توجهی و یا عدم تمرکز بر فعالیت نیست، بلکه دارای ریشه‌های عمیق‌تری است [۲]. شناخت و آگاهی از علل و ریشه‌های بروز بدفهمی‌ها کمک می‌کند تا با طراحی فعالیت‌های مناسب از بروز آن‌ها جلوگیری شود و یا بتوان آن‌ها را اصلاح کرد. آگاهی نسبت به این مشکلات همچنین کمک می‌کند تا پی ببریم چرا دانش‌آموزان در درک مفاهیم ریاضی دچار مشکل‌اند. به همین دلیل، شناسایی و مستند کردن بدفهمی‌ها، یکی از وظایف مهم تحقیقات در حوزه‌های آموزش ریاضی به شمار می‌آید [۳۱].

در پژوهش‌های متعدد مشاهده شده است که دانش‌آموزان در درک مفهوم اعداد منفی و به‌کارگیری آن در محاسبات، دچار مشکلات و بدفهمی‌های فراوانی‌اند. بنابراین لازم است ابتدا به مطالعه درباره مفهوم اعداد منفی و درک آن پرداخته شود تا پس از شناسایی موانع موجود در فهم این مبحث، بتوان گام‌هایی برای رفع این مشکلات و بدفهمی‌های آن برداشت. هدف مقاله

عبارات و کلمات کلیدی. آموزش ریاضی، درک دانش‌آموزان، بدفهمی، اعداد منفی.

دبیر تخصصی رابط: سعید مقصودی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۲

نوع مقاله: مروری

*نویسنده مسئول

حاضر که به صورت مروری و به روش کتابخانه‌ای بر اساس نتایج پژوهشی مرتبط انجام شده است، معرفی برخی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان درباره اعداد منفی است. در ادامه، ابتدا به تاریخچه‌ای مختصر از اعداد منفی می‌پردازیم و سپس با استفاده از پژوهش‌های مرتبط، انواع بدفهمی‌ها و چند راهکار برای رفع آن‌ها ارائه می‌کنیم.

۲. تاریخچه‌ای از اعداد منفی

مطالعه اعداد منفی بدون بررسی سیر تکامل تاریخی آن بی‌ارزش است. در طول تاریخ ریاضیات، مفهوم اعداد منفی موضوعی چالش برانگیز برای ریاضی‌دانان بوده است. دانش‌آموزان امروزی نیز با همین چالش مواجه‌اند. برخلاف اعداد مثبت، اعداد منفی نمایانگر اشیای غیر ملموس‌اند [۲۷]. شاید حیرت‌انگیز باشد که مواجه با اعداد منفی تا سال ۱۶۰۰ بعد از میلاد برای ریاضی‌دانان کار پر زحمتی بوده است به این دلیل که به طور کلی، ریاضی‌دانان اعداد منفی را به رسمیت نمی‌شناختند. آن‌ها تصور نمی‌کردند که این اعداد در آینده شاید برای آن‌ها سودمند باشد. اما، با گذشت زمان و پیشرفت‌های متعدد در این زمینه، اعداد منفی به موضوع جدیدی در ریاضیات تبدیل شد. همچنین حقیقت و ماهیت اعداد منفی هم‌تراز با اعداد مثبت شد. به علاوه مفاهیم جدیدی که با اعداد منفی مرتبط بودند باعث تثبیت وجود و اهمیت آن‌ها شد. امروزه با وجود موانع تاریخی، اجتماعی و مذهبی اعداد منفی در همه‌جا نقش مهمی دارند و نمی‌توان فواید و کاربردهای آن را نادیده گرفت [۲۲]. مفهوم اولیه اعداد منفی در امپراطوری هان چین، یونان باستان، هند و ایران دیده شده است و با گذر زمان این مفاهیم تکامل یافته‌اند [۱۷]. اعداد منفی تا قرن ۱۶ میلادی هنوز وارد ریاضیات نشده بود و در این قرن آن‌ها برای ریشه معادلات می‌پذیرفتند اما آن‌ها را ریشه‌های جعلی می‌نامیدند و تنها ریشه‌های مثبت را قابل قبول در نظر می‌گرفتند [۲۰]. در قرن هفدهم به تدریج نسبت به اعداد منفی شناخت بیشتری پیدا کردند و به علت بروز برخی تناقضات در محاسبات، ریاضی‌دانان این اعداد را به تدریج و با احتیاط در محاسبات خود استفاده کردند و به عنوان ریشه‌های معادلات، پذیرفتند ولی برای این اعداد هنوز جایگاه خاصی در ریاضیات قائل نبودند. در ابتدای قرن هجدهم جایگاه اعداد منفی در کنار اعداد مثبت مطرح شد و این اعداد وارد کتاب‌های ریاضی شدند، اما تعریف دقیقی برای آن ارائه نکردید. در قرن نوزدهم، ریاضی‌دانان بر اصول و قوانین حاکم بر اعداد منفی تمرکز کردند و بالاخره در اواخر قرن نوزدهم ریاضی‌دانان تعریف رسمی برای اعداد منفی ارائه دادند. آرکاووی و بروکهایمر^۱، مراحل شکل‌گیری و توسعه مفهوم اعداد منفی را از قرن ۱۶ تا قرن ۱۹ به صورت زیر خلاصه کرده‌اند [۱۷].

- قرن ۱۶: عدم شناخت اعداد منفی؛
- قرن ۱۷: شناخت اعداد منفی به عنوان ریشه معادلات؛
- اواخر قرن ۱۷ و اوایل قرن ۱۸: استفاده محتاطانه از اعداد منفی به دلیل برخی تناقضات؛
- قرن ۱۸: استفاده آزادانه از اعداد منفی و ورود آن‌ها به کتب درسی بدون تعریف ریاضی؛
- قرن ۱۹: تلاش برای تحکیم مبنای ریاضی اعداد منفی؛
- انتهای قرن ۱۹: تعریف رسمی اعداد منفی.

پژوهش‌ها نشان می‌دهد که در آموزش مفاهیم ریاضی از جمله مفهوم اعداد منفی، توجه به تاریخچه این مفاهیم و نحوه شکل‌گیری و توسعه آن‌ها می‌تواند در بهبود روش‌های آموزش آن مفاهیم نقش مهمی داشته باشد. برای مثال، ایده استفاده از محور اعداد برای آموزش اعداد منفی در قرن هفدهم توسط ریاضی‌دانان ابداع شد و به تدریج کامل‌تر شد [۱۳]. امروزه استفاده از محور اعداد یکی از شیوه‌های مناسب برای آموزش این مفهوم محسوب می‌شود [۴، ۸].

¹ Arcavi and Bruckheimer

۳. مشکلات و بدفهمی‌ها درخصوص اعداد منفی

اعداد منفی ازجمله مفاهیمی است که در فرآیند آموزش آن، دانش‌آموزان با مشکلات و بدفهمی‌های زیادی مواجه می‌شوند. پژوهش‌های متعددی در زمینه درک دانش‌آموزان از اعداد منفی در پایه‌های مختلف انجام شده است. بیشتر این پژوهش‌ها در پایه‌های هفتم یا نزدیک به آن انجام شده است. اما، پژوهش‌هایی هم بوده‌اند که در پایه‌های پایین‌تر انجام گرفته‌اند. برای مثال بیشاب و لمب^۲ [۶] درباره دانش‌آموزی در پایه دوم پژوهشی انجام داد و به این نتیجه رسید که دانش‌آموزان در پایه‌های پایین‌تر هم قادر به درک غیررسمی از اعداد منفی هستند و می‌توانند مسائل مربوط به اعداد منفی را درک و به‌طور شفاهی حل کنند، اما بازنمایی‌های این اعداد برای آن‌ها دشوار است. با توجه به اینکه دانش‌آموزان کشورمان مانند بسیاری از کشورهای دیگر (ازجمله ژاپن و سنگاپور [۱۱]) در پایه‌های ششم و هفتم با اعداد منفی آشنا می‌شوند، تمرکز مقاله حاضر بر ارائه نتایج پژوهش‌هایی است که در این پایه‌ها انجام شده است.

براساس پژوهش‌های مرتبط، مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در یادگیری و حل مسائل مربوط به اعداد منفی در موارد متعددی رخ می‌دهد. از عمده‌ترین آن‌ها می‌توان به مواردی مانند بدفهمی‌های مرتبط با مفهوم عدد منفی، ترتیب اعداد صحیح و اعمال چهارگانه روی اعداد صحیح اشاره کرد که در ادامه به‌اجمال به آن می‌پردازیم.

۱.۳. مفهوم عدد منفی. بوفر دینگ^۳ بیان می‌کند که علامت منفی سه معنی متفاوت دارد. در معنای اول به به منزله علامت تفریق و یا عملگر منفی استفاده می‌شود؛ یعنی عملیاتی که روی دو عدد انجام می‌گیرد. در معنای دوم به عنوان علامت قرینه مورد استفاده قرار می‌گیرد و در معنای سوم برای علامت عدد منفی به کار می‌رود. براساس دو پژوهش بوفر دینگ [۷، ۸]، شماری از دانش‌آموزان تفاوت عملگر منفی و علامت عدد منفی را به‌درستی درک نمی‌کنند، به طوری که تصور آنان از عدد منفی، یک عبارت تفریق نیمه‌تمام است. مثلاً عدد ۵- را به صورت ۵-۵ در نظر گرفته و مقدار آن را صفر در نظر می‌گیرند. برخی از دانش‌آموزان اعداد منفی را صرفاً به‌عنوان نمادی که در ریاضی به کار می‌رود در نظر می‌گیرند، در صورتی که باید درک کنند اعداد منفی در زندگی و فعالیت‌ها و محاسبات معمول آن‌ها کاربرد زیادی دارد [۱۱]. بر اساس نتایج تحقیق آئی^۴ [۲] که ضمن آن از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا توضیحی در مورد اعداد منفی ارائه دهند، بیشتر دانش‌آموزان، اعداد منفی را به‌وسیله علامت تعریف کرده‌اند. به عبارت دیگر، اعداد منفی را این‌گونه توضیح داده‌اند که این دسته از اعداد، اعدادی با علامت «-» هستند. در واقع، این مطلب بیانگر آن است که اغلب دانش‌آموزان سعی می‌کنند اعداد منفی را به‌صورت نمادین بفهمند.

۲.۳. ترتیب اعداد صحیح. از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان درخصوص مرتب‌سازی اعداد صحیح این است که شماری از ایشان اعداد منفی را بزرگ‌تر از صفر در نظر می‌گیرند و بدون توجه به علامت و بر اساس اندازه، اعداد را مرتب می‌کنند. مثلاً وقتی از آن‌ها خواسته شد که اعداد ۵، ۹، ۳، -۲، ۴، ۰، ۸ و -۴ را از کوچک به بزرگ مرتب کنند، برخی از آنان این‌طور اعداد را مرتب کردند: ۹، ۸، ۵، ۴، -۴، ۳، -۲، ۰. این دسته از دانش‌آموزان صفر را کوچک‌ترین عدد در نظر می‌گیرند و بقیه اعداد را بدون در نظر گرفتن علامت آن‌ها، مرتب کرده‌اند. تعدادی نیز اول اعداد منفی را از صفر بزرگ‌تر در نظر می‌گیرند و سپس آن‌ها را کوچک‌تر از اعداد مثبت در نظر می‌گیرند و مانند اعداد مثبت مرتب می‌کنند: ۹، ۸، ۵، ۴، ۳، -۴، -۲، ۰. دسته‌ای هم، اعداد منفی را بزرگ‌تر از صفر و اعداد مثبت در نظر گرفتند، اما در مرتب کردن اعداد منفی، به درستی عمل کردند: -۲، -۴، ۰، ۳، ۴، ۵، ۸، ۹. گروهی دیگر، اعداد منفی در نظرشان کوچک‌تر از صفر است، اما آن‌ها را مانند اعداد مثبت مرتب می‌کنند: ۹، ۸، ۵، ۴، ۳، ۰، -۴، -۲. شماری نیز، همه اعداد را به صورت مثبت تصور می‌کنند و علامت اعداد منفی را حذف می‌کنند: ۹، ۸، ۵، ۴، ۳، ۰، ۲ [۲۷].

^۲Bishop and Lamb ^۳Bofferding ^۴Ay

بعضی از دانش‌آموزان تفاوت بین اندازه و ارزش مقداری دو عدد علامت‌دار را درک نمی‌کنند و هنگام مرتب کردن اعداد و انتخاب عددی که بیشترین مقدار از لحاظ اندازه را دارا است، دچار مشکل می‌شوند. برای مثال، هنگامی که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود بین اعداد ۹- و ۱، عدد بزرگ‌تر را انتخاب کنند، بعضی از آنان عدد ۹- را انتخاب می‌کنند و می‌گویند که هر چه به سمت اعداد منفی پیش برویم، عدد بزرگ‌تر می‌شود [۲۷]. زمانی که دانش‌آموزان با اعداد منفی روبه‌رو می‌شوند، ممکن است بپذیرند که اعداد منفی کوچک‌تر از صفر هستند، اما می‌گویند همان‌طور که فاصله ۵ از صفر، بیشتر از فاصله ۳ از صفر است و ۵ از ۳ بزرگ‌تر است پس چون ۵- فاصله بیشتری از صفر دارد، ۵- از ۳- بزرگ‌تر است [۸، ۱۱].

۳.۳. اعمال چهارگانه روی اعداد صحیح. وقتی مسئله‌ای ریاضی مطرح می‌شود، در بسیاری از مواقع استفاده از عملیات اعداد منفی لازم است [۲۹]. پژوهشگران معتقدند که برای اعداد منفی، علاوه بر معرفی، درک و توسعه درست اعداد صحیح، آموزش چگونگی چهار عمل اصلی روی اعداد منفی نیز مهم است. در حقیقت، باید بار دیگر معنای چهار عمل اصلی به دانش‌آموزان آموخته شود. همچنین این مفاهیم باید به‌گونه‌ای آموزش داده شوند که درک دانش‌آموزان از این عملیات روی اعداد منفی، بسیار جامع‌تر از منفی در منفی برابر مثبت، باشد [۴].

دسته‌ای از دانش‌آموزان، به محض دیدن یک علامت منفی در محاسبات با اعداد صحیح و بدون توجه به نوع آن، عمل تفریق را انجام می‌دهند و جواب آخر را ارائه می‌کنند. به عبارت دیگر، منفی یا مثبت بودن عدد و همچنین حضور عدد منفی در ابتدا یا انتهای عبارت سوال برای ایشان تفاوتی نمی‌کند [۷]. برای مثال، در حل سوالاتی مانند $2 - 7$ ، علامت عدد منفی را به حساب نمی‌آورند و پاسخ را ۵ در نظر می‌گیرند و یا ممکن است دوبار عمل تفریق را انجام دهند [۸، ۲۷]. بعضی از دانش‌آموزان، مفهوم عدد منفی را استفاده از عمل قرینه عدد و یا تفاضل آن از صفر در نظر می‌گیرند. مثلاً وقتی از آنان خواسته شد که حاصل $4 - 7$ را به دست آورند، پاسخ یکی از دانش‌آموزان بدین صورت بوده است که اول از صفر، ۷ واحد کم می‌کنیم تا به ۷- برسیم و حالا بدون در نظر گرفتن علامت عدد ۷، چهار واحد از آن کم می‌کنیم و به جواب ۳ می‌رسیم. اکنون علامت منفی پشت عدد ۷ را اثر می‌دهیم و جواب پایانی ۳- است [۷].

یکی از بدفهمی‌های رایج در زمینه اعداد منفی این است که دانش‌آموزان در درک مفهوم عملگر منفی دچار مشکل می‌شوند و مانند عملگر جمع، آن را دارای خاصیت جابه‌جایی می‌دانند [۲۰، ۳۲]. به عبارت دیگر، دانش‌آموز از سال‌های ابتدایی یاد گرفته است که $3 + 8 = 8 + 3$. حال هنگام مواجهه با عملگر منفی، خاصیت جابه‌جایی عملگر جمع را تعمیم می‌دهد و عبارت $8 - 3 = 3 - 8$ را نیز درست می‌پندارد [۳۲]. به همین ترتیب، برای اعداد منفی خاصیت شرکت‌پذیری را در نظر می‌گیرند در حالی که آن را به درستی درک نمی‌کنند. برای مثال، هنگام محاسبه عبارت $5 - 12 - 10$ ، ابتدا حاصل $5 - 12$ را به دست آورده و سپس به صورت $3 - 10 = -7$ عمل می‌کنند [۱۱] هم‌چنین، تصور می‌کند عملگر منفی همواره ارزش کاهشی دارد و عملگر مثبت همواره باعث افزایش مقدار می‌شود [۳۲]. مثلاً هنگام محاسبه جواب $8 = \dots - 5$ ، یکی از دانش‌آموزان، علامت منفی را به مثبت تغییر داده، سپس عدد ۳ را به عنوان پاسخ برگزیده است. هنگامی که از او خواسته شده بدون تغییر در علامت، جواب عبارت را محاسبه کند، پاسخ داده، که نمی‌توان این کار را انجام داد [۵]. از دیگر بدفهمی‌های مشاهده شده، تصور دانش‌آموزان مبنی بر همواره منفی بودن پاسخ جمع و تفریق اعداد منفی است [۱۴]. برای مثال، وقتی خواسته شد حاصل عبارت $\dots = (-6) + 19$ را به دست آورند، یکی از ایشان عدد ۲۵- را به عنوان پاسخ، ارائه داده و نوشته است که چون مجموع عددی مثبت با عددی منفی، همواره منفی است، پس جواب ۲۵- است [۱۱].

از دیگر بدفهمی‌های دانش‌آموزان در حوزه اعداد منفی این است که وجود علامت + بین اعداد منفی را بی‌اثر دانسته و یا معنی آن را به درستی درک نمی‌کنند. مانند عبارت $(-15) + 6$ که گاهی دانش‌آموزان بیان می‌کنند که علامت جمع در این عبارت بی‌اثر است و یا معنی آن را نمی‌دانند. گاهی نیز، هنگام نوشتن پاسخ نهایی مسئله دچار اشتباه می‌شوند، بدین‌گونه که برای مسئله‌ای مانند [۱۰]:

سارا ۶ هزار تومان پول دارد و آن را به دوستش که به او ۱۵ هزار تومان بدهکار است، می‌پردازد. پس از پرداخت پول، آیا هنوز به دوستش بدهکار است؟ اگر بله، چقدر؟

بعد از انجام تفریق ۶-۱۵ و هنگام توضیح تشریحی سوال، بیان می‌کنند او هنوز ۹- هزار تومان بدهکار است. در واقع، بعضی از دانش‌آموزان، محاسبات ریاضی سوالات را به‌درستی انجام می‌دهند، اما در درک و فهم جمع و تفریق اعداد منفی، دچار مشکل هستند. تعدادی از آنان نیز، داده‌های مسائل را که باید با اعداد منفی بنویسند، با اعداد مثبت می‌نویسند و به علامت آن توجه ندارند و در ادامه سوال و توضیح پاسخ، مفهوم منفی بودن را عنوان می‌کنند. برای مثال به سوال فوق، این‌گونه پاسخ می‌دهند: $9-15=6$ پس او ۹ هزار تومان بدهکار است. گاهی اوقات دانش‌آموزان از راه حل نادرست به پاسخ درست می‌رسند [۱۰، ۱۲]. مثلاً هنگامی که این مسئله مطرح شد [۱۰]:

اگر دمای هوا ۹ درجه زیر صفر باشد و ۱۳ درجه افزایش یابد، پاسخ درست را انتخاب کنید.

$$(1) 4 - (-13) = 9 \quad (2) -22 - 9 = -31 \quad (3) 4 + 9 = 13 \quad (4) 22 = (-13) - 9$$

برخی از دانش‌آموزان هر دو گزینه‌ی اول و سوم را درست در نظر گرفتند. در واقع، با وجود اینکه عدد ۱۳ در سوال نباید ماهیت منفی داشته باشد و دلیلی برای استفاده از تفریق نبود، اما تعدادی از دانش‌آموزان از این راه نادرست، به پاسخ درست رسیدند. تعدادی دیگر، دانش‌آموزانی هستند که عملیات چهارگانه را در ذهن خود و به‌درستی انجام می‌دهند، اما هنگام نوشتن آن و به کار بردن علامت منفی، دچار اشتباه می‌شوند. به عبارت دیگر، ایشان نیازی به استفاده از اعداد منفی نمی‌بینند و مسائل را به‌طور ساده‌تر و با اعداد مثبت به صورت ذهنی حل می‌کنند [۱۰].

یکی از بدفهمی‌های رایج در میان دانش‌آموزان، استفاده از یک روش واحد برای محاسبه علامت در جمع و تفریق و ضرب و تقسیم است [۲۷، ۱۱، ۱۵، ۱۷]. به عبارت دیگر، دانش‌آموزان در جمع و تفریق نیز از ضرب علامت‌ها برای تشخیص علامت پاسخ نهایی کمک می‌گیرند. مثلاً، در پاسخ به عبارت $(-8) + (-31)$ ، جواب را عدد ۳۹ در نظر می‌گیرند و می‌گویند حاصل جمع دو عدد ۳۱ و ۸، برابر ۳۹ است و چون منفی در منفی، مثبت می‌شود، پاسخ ۳۹+ است [۱۱]. طبق گزارش به‌دست آمده از آزمونی درباره فهم اعداد مثبت و منفی، اکثر دانش‌آموزان به سوالات حاوی ضرب و تفریق اعداد منفی پاسخ درست داده‌اند اما در جمع این اعداد دچار اشتباه شده و به جواب درست نرسیده‌اند. این نتایج نشان می‌دهد اکثر دانش‌آموزان تلاش می‌کنند صرفاً با به‌کارگیری قوانین علامت‌ها و یا ساختن قوانین جدید به این سوالات پاسخ دهند. نکته قابل توجه این است که این قوانین تا چه میزان دانش‌آموزان را در فهم اعداد منفی یاری می‌کند. چه‌بسا حفظ این قوانین بدون درک درست آن‌ها، باعث ایجاد بدفهمی‌های متفاوت در این زمینه شود [۱۷]. در مقابل برخی از دانش‌آموزان بدون توجه به علامت اعداد، عملیات چهارگانه را انجام می‌دهند و در انتها، یکی از علامت‌های مثبت یا منفی را برای پاسخ نهایی در نظر می‌گیرند [۱۴].

۴. بعضی از دلایل بروز بدفهمی‌ها

تا اینجا به شماری از انواع بدفهمی‌های اعداد منفی پرداختیم. در ادامه به بعضی از دلایل به وجود آمدن این بدفهمی‌ها و مشکلات می‌پردازیم. برخی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان ناشی از بیان قواعد نابجای معلمان است [۱۱، ۱۸]. برای مثال، این جمله معلمی را در نظر بگیرید: «پاسخ یک عبارت، همواره با عدد بزرگ‌تر هم‌علامت است؛ اگر عدد بزرگ‌تر، مثبت باشد،

پاسخ نیز مثبت است و اگر عدد بزرگ‌تر، منفی باشد، پاسخ منفی است.»، ممکن است عامل بدفهمی دانش‌آموزان در تعدادی از سوالات باشد. ازجمله، در سوالاتی که شامل جمع و تفریق بیش از دو عدد صحیح باشد و سوالاتی که از عدد منفی و تفریق همزمان استفاده بشود، مانند $00 = (-6) - 2$. ممکن است شماری از دانش‌آموزان این سوال را با توجه به گفته معلم حل کنند. درواقع، علامت عددی که اندازه بزرگ‌تری دارد، برای پاسخ انتخاب کنند و ۸- را پاسخ سوال در نظر بگیرند. همچنین استفاده از عبارت «منفی در منفی برابر مثبت است.» به این دلیل که دانش‌آموزان به تفاوت عملگر منفی و علامت تفریق توجهی ندارند، باعث بروز بدفهمی می‌شود؛ به علاوه، بعضی از دانش‌آموزان با برداشت نادرست از ماهیت و کاربرد این قانون، گمان می‌کنند در جمع دو عدد منفی نیز می‌توان از آن استفاده کرد. برای مثال گروهی از دانش‌آموزان پاسخ عبارت $00 = (-8) + (-31)$ ، را ۳۹ نوشته‌اند. به کار بردن این جملات و قوانینی که گاهی پاسخ سوال را سریع و بدون تأمل به دست می‌دهد، باعث می‌شود دانش‌آموزان در درک مفهوم مورد نظر دچار مشکل شوند. همچنین، استفاده مکرر معلم از یک نوع سوال باعث می‌شود دانش‌آموزان، بدون تجزیه و تحلیل، راه حل را طوطی‌وار تکرار نمایند و متوجه مفهوم مورد نظر نشوند و تنها پس از مدتی که با سوالات گوناگون آن مبحث روبه‌رو می‌شوند دشواری‌های آن مفهوم را دریابند [۱۲].

همچنین، مهارت و تجربه دانش‌آموزان در دوره ابتدایی در زمینه اعداد، بر درک اعداد منفی بسیار تأثیرگذار است [۱۲، ۱۸]. برخی از معلمان در دوره ابتدایی، از این قاعده برای توضیح تفریق استفاده می‌کنند: «در تفریق همواره عدد بزرگ‌تر، ابتدا آورده می‌شود.» و این قانون را توضیح خوبی برای تفریق می‌دانند، این گفته شاید برای دانش‌آموزان مقطع ابتدایی که با اعداد منفی آشنایی ندارند مشکلی ایجاد نکند ولی هنگامی که به پایه‌های بالاتر می‌روند، ممکن است باعث حل نادرست سوال و بدفهمی در این زمینه شود. آشنایی معلم با دانش قبلی دانش‌آموزان در پایه‌های پیشین، در کاهش بدفهمی‌های ایشان موثر است؛ مانند مسئله زیر [۷، ۸].

پاسخ عبارت زیر را به دست آورید.

$$4 - 9 = \dots$$

تعداد زیادی از دانش‌آموزان در حل این مسئله بیان کرده‌اند که نمی‌توان عدد بزرگ‌تر را از عدد کوچک‌تر کم کرد و عبارت را به صورت $4 - 9$ تغییر داده و عدد ۵ را برای پاسخ به دست آورده‌اند. علاوه بر تحقیق و مطالعه درباره شناسایی بدفهمی‌ها، باید دید که به کاربردن کدام شیوه‌های آموزشی در ارائه مفهوم اعداد منفی به فهم بهتر دانش‌آموزان کمک می‌کند.

۵. چند راهکار

به گفته اسکمپ^۵ (نقل شده در [۳۲])، وقتی دانش‌آموزان مسئله‌ای را به درستی پاسخ نمی‌دهند، اغلب به این دلیل نیست که اشتباه می‌کنند، بلکه به این دلیل است که در ذهن خود به سوال دیگری پاسخ می‌دهند. کار معلم این است که بفهمد آن‌ها به چه سوالی پاسخ می‌دهند. آشنایی معلم با پرسش‌های مختلف درباره اعداد منفی و به کار بردن شیوه‌های متفاوت برای تدریس اعداد منفی، می‌تواند نقش مهمی در درک و فهم آن داشته باشد. به کار بردن مثال‌های مختلف به دانش‌آموزان کمک می‌کند مفهوم علامت عدد منفی را بهتر درک کنند و آن را با عملگر منفی اشتباه نگیرند [۸]. مثلاً دانش‌آموزان معمولاً با درجه هوای منفی، مفهوم بدهکار و طلبکار بودن و وام گرفتن از بانک آشنایی دارند [۲۷، ۸، ۲۳]، مانند مسئله زیر [۲۷].

^۵Skemp

دمای هوای سراب ۶ درجه زیر صفر و دمای هوای بوشهر ۳۵ درجه بالای صفر و دمای هوای اردبیل ۸ درجه زیر صفر است. میانگین دمای هوای این ۳ شهر چند درجه است؟

همچنین شرح مسائلی مانند پرواز پرنده در ۲ متری سطح زمین و یا حرکت آسانسور به دومین طبقه زیرزمین، که بیانگر اعداد ۲ و ۲- در دنیای ریاضی است، مفهوم اعداد منفی را به‌سادگی روشن می‌کند [۱۰]. اما در کل، موقعیت‌های محدودی برای نشان دادن اعمال جبری به‌وسیله اعداد منفی وجود دارد و این اعداد در جهان مادی دانش‌آموزان به‌طور فراوان مشاهده‌شدنی نیستند، بنابراین تجسم کردن این دسته از اعداد در مقایسه با اعداد مثبت برای آنان دشوارتر است [۱۶].

مارتینس^۶ [۱۹] می‌گوید که «وقتی به اعداد منفی فکر می‌کنیم، چه چیزی در دنیای واقعی، نشان‌دهنده این اعداد است؟ آیا ۴ سبب منفی در یک سبد، معنا دارد؟ در واقع نمی‌توان مقداری کمتر از هیچ چیز در نظر گرفت. یک راه برای فکر کردن به این اعداد، تصور ارتباط آنان با سایر اعداد است. مثلاً می‌توان عدد ۳- را به‌منزله حرکت سه واحد به سمت چپ محور اعداد تصور کرد یا به عنوان مقدار بدهی ۳ میلیون تومانی به بانک در نظر گرفت که در این حالت نیز با اعداد مثبتی روبه‌رو هستیم که علامت منفی، تنها نمادی برای نشان دادن بدهکاری فرد است.» همچنین، باتوجه به این که بیشتر مسائل روزمره مربوط به اعداد منفی، با اعمال جمع و تفریق حل می‌شوند (مانند بدهکاری، اختلاف دمای دو شهر، طبقات آسانسور و غیره)، رفع مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مسائل مربوط به اعمال ضرب و تقسیم اعداد با حضور اعداد منفی دشوارتر است [۴].

درک بزرگی و موقعیت اعداد روی محور، اولین قدم برای فهم معنی اعداد منفی است [۱۰]. علاوه بر این، استفاده از محور اعداد از راه‌های کاهش اشتباهات دانش‌آموزان در خصوص این اعداد است. در این مدل، حاصل جمع یک عبارت با استفاده از جابه‌جایی مکان اولیه (اولین عدد) به وسیله بردار جابه‌جایی که جهت آن، نشانگر علامت و مقدار جابه‌جایی آن، گویای اندازه دومین عدد است، به‌دست می‌آید. تفریق به معنای حرکت در خلاف جهت و یا فاصله بین دو عدد و ضرب به معنی جمع مکرر جابه‌جایی‌ها است. هنگام استفاده از محور اعداد، باید به تفاوت علامت عدد منفی و عملگر منفی توجه شود. استفاده از این روش، ترتیب قرارگرفتن اعداد منفی را در مقایسه با اعداد مثبت به‌خوبی نشان می‌دهد. همچنین اندازه و ارزش اعداد را با فاصله اعداد از صفر و مفهوم منفی بودن عدد را با جهت متفاوت اعداد منفی روی محور، نمایش می‌دهد [۴، ۸].

به کار بردن الگوهای مختلف، ازجمله شیوه‌های مفید برای تدریس اعداد منفی است. مثلاً، برای اعداد مثبت و منفی، مهره‌هایی با رنگ‌های سفید و مشکی انتخاب شود. هر مهره سفید، نشان‌دهنده یک واحد مثبت و هر مهره مشکی، نماینده یک واحد منفی است. هر عدد را می‌توان از مجموع مهره‌های سفید و مشکی به‌دست آورد. چون هر مهره سفید خنثی‌کننده اثر یک مهره مشکی است، این مفهوم به دانش‌آموزان منتقل می‌شود که مجموع هر سفید و مشکی برابر صفر است. بدین ترتیب مجموع هر دو عدد مثبت و منفی با فاصله یکسان از صفر را صفر در نظر بگیرد [۱، ۹].

یکی از راه‌های مشاهده و کمک به رفع بدفهمی در مبحث اعداد منفی این است که محاسبه‌ای با حضور اعداد منفی به دانش‌آموزان داده شود و از آن‌ها خواسته شود که داستانی برای عبارت داده‌شده بسازند. برای مثال، عبارت $2-3=0$ به دانش‌آموزان داده شد و داستانی که یکی از آن‌ها ساخت بدین صورت بود که دانش‌آموزی دو تکلیف دارد که هنوز تحویل نداده است. سپس متوجه می‌شود که سه تکلیف دیگر را نیز تحویل نداده است. پس به طور کلی این دانش‌آموز، پنج تکلیف تحویل نداده است. معلم با خواندن این داستان متوجه تغییر عبارت به $3-2=0$ می‌شود. به بیان دیگر، این دانش‌آموز، برای عبارت جایگزین، داستان طرح کرده است و تفاوتی میان وجود علامت مثبت و نبود آن قائل نشده است [۲۳]. همچنین برای درک بهتر این مفهوم می‌توان از طراحی بازی‌هایی برای دانش‌آموزان بهره برد و مثلاً در آن بازی مفهوم قرض دادن و

^۶Martínez

قرض گرفتن پول برای آنان شبیه‌سازی شده باشد، چرا که مسئله‌ای کاربردی در زندگی روزمره است. در این بازی دانش‌آموزان می‌توانند برای محاسبه از محور اعداد کمک بگیرند. در واقع این بازی روش موثری برای درک بهتر ترتیب و جایگاه اعداد صحیح روی محور اعداد و همچنین محاسبه سریع‌تر جمع و تفریق آن‌ها است [۲۱]. به کار بردن یک الگوی عددی نیز برای جمع اعداد می‌تواند به فهم بهتر دانش‌آموزان کمک کند، مانند مسئله زیر [۲۷].

با قرار دادن عدد مناسب در مرحله آخر، الگوی زیر را کامل کنید.

$$\begin{aligned} 3 + 2 &= 5 \\ 3 + 1 &= 4 \\ 3 + 0 &= 3 \\ 3 + \dots &= 2 \end{aligned}$$

استفاده از این روش، شیوه‌ای کاربردی و مناسب برای تدریس اعداد منفی است. همچنین معلمان را در تشخیص بدفهمی‌های دانش‌آموزان یاری می‌کند. برای مثال، در سوال فوق برخی از دانش‌آموزان عدد صفر را در جای خالی قرار داده‌اند و دلیل این انتخاب خود را این‌طور بیان کرده‌اند که عددی وجود ندارد که با ۳ جمع گردد و برابر ۲ شود [۲۷]. استفاده از راه‌حل‌های مختلف برای حل یک عبارت محاسباتی می‌تواند اثربخش باشد؛ بدین صورت که راه‌حل‌های مختلف یک محاسبه را در اختیار دانش‌آموز گذاشته و برای هر کدام توضیحی خواسته شود، مانند شکل ۱ که مربوط به سوال ۵ فعالیت صفحه ۳ کتاب ریاضی پایه هشتم [۲۴]:

۵- عبارت $-43+37-29$ را چهار دانش‌آموز محاسبه کرده‌اند. راه حل هر یک را توضیح دهید.

راه حل علی: $-43+37-29=-43-29+37=-72+37=-35$

توضیح:

راه حل مجتبی: $-43+37-29=-43+8=-35$

توضیح:

راه حل مرتضی: $-43+37-29=-6-29=-35$

توضیح:

	د	ی
-	۴	۳
+	۳	۷
-	۲	۹

راه حل مصطفی: $-40-3+30+7-20-9=-30-5=-35$

توضیح:

شما کدام راه حل را می‌پسندید؟ چرا؟

آیا راه حل دیگری برای پیدا کردن حاصل این عبارت سراغ دارید؟

شکل ۱: فعالیت صفحه ۳ کتاب ریاضی پایه هشتم

بهتر است معلم برای پیشگیری و مقابله با بدفهمی‌ها، پرسش‌های دقیقی را مطرح کند و برای آگاهی از بروز بدفهمی‌های ایجاد شده، از تکالیف مناسبی استفاده نماید [۲۷]. طرح سوال‌های مفهومی برای سنجش میزان یادگیری دانش‌آموزان در هر مرحله از تدریس و همچنین تشویق آنان به درک بهتر مطالب می‌تواند موجب پیشرفت دانش‌آموزان شود [۳۰]. اما برخی از

دبیران با به کار بردن سوال‌ها و پرسش‌های درست و بجا، آشنا نیستند و همچنین شناخت کافی از مثال‌های آموزشی مناسب نیز ندارند تا بتوانند به‌طور صحیح از آن‌ها استفاده کنند [۲۸].

۶. بحث و نتیجه‌گیری

«یکی از اهداف آموزش ریاضی، کمک به دانش‌آموزان در شکل‌گیری درک مفهومی آنان از مفاهیم ریاضی است» ([۲۵]، ص ۱۴۲). مفهوم اعداد منفی برای بسیاری از دانش‌آموزان سخت و پیچیده است. همچنین به دلیل کاربرد نسبتاً کم این اعداد در زندگی روزمره حل مسائل مرتبط با آن برای دانش‌آموزان چالش‌برانگیز است. علاوه بر دانش‌آموزان، بزرگسالان نیز در فهم و بیان استدلال در مسائل مختلف اعداد منفی با دشواری مواجه می‌شوند. برای مثال هم کودکان و هم بزرگسالان در تصور کردن منفی ۵ مداد مشکل دارند یا مثلاً نمی‌توانند ۴- لباس را فرض بگیرند [۵].

بعضی از دانش‌آموزان با مشکلات و بدفهمی‌هایی در حوزه اعداد منفی روبه‌رو هستند که از این میان می‌توان به این موارد اشاره کرد: برخی عدد صفر را به‌عنوان کوچک‌ترین عدد در نظر می‌گیرند و پس از آن اعداد منفی را می‌آورند. تعدادی دیگر، اعداد منفی را کوچک‌تر از عدد صفر می‌دانند اما آن‌ها را بر اساس اندازه و بدون در نظر گرفتن علامت منفی مرتب می‌کنند و شماری دیگر اعداد منفی را بزرگ‌تر از اعداد مثبت و صفر به حساب می‌آورند. بعضی از دانش‌آموزان داده‌های مسائل مرتبط با دنیای روزمره را که باید با اعداد منفی نمایش دهند مثبت در نظر می‌گیرند و پس از به‌دست آوردن جواب نهایی و در توضیح پاسخ خودشان به منفی بودن این اعداد اشاره می‌کنند. همچنین برای یک عملیات، صرف‌نظر از وجود علامت منفی، همواره به دنبال پاسخ مثبت هستند. برخی از ایشان، در درک عملگر تفریق دچار بدفهمی می‌شوند و آن‌را مانند عملگر جمع دارای خاصیت جابه‌جایی می‌دانند. تعدادی از آن‌ها نیز عملگر منفی را همواره دارای ارزش کاهشی تصور می‌کنند.

آگاهی نسبت به این مشکلات و بدفهمی‌های این مفهوم نه تنها برای معلمان پایه‌های ششم و هفتم، بلکه برای معلمان پایه‌های پایین‌تر نیز از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا یکی از مهم‌ترین مواردی که باید به آن توجه کرد این است که دانش‌آموزانی که بینش بهتری نسبت به اعداد مثبت دارند در درک اعداد منفی با موانع و چالش‌های کمتری مواجه می‌شوند [۱۷]. معلمان پایه‌های ششم و هفتم نیز با توجه به بدفهمی‌ها و مشکلات عنوان شده می‌توانند روش تدریس خود را تغییر دهند و از مدل‌ها و شیوه‌های مختلف برای تدریس این مفهوم استفاده کنند [۳۲]. با توجه به این نکته که مشکلات دانش‌آموزان در درک اعداد منفی گاهی مشابه مشکلاتی است که ریاضی‌دانان در تعریف و توسعه اعداد منفی داشته‌اند پس شایسته است در فرآیند یاددهی این مفهوم با استفاده از کتب تاریخ ریاضیات از روند تکامل آن در طراحی‌های آموزشی کلاس درس نیز بهره ببریم [۱۷]. بعضی از قوانین نیز توسط معلمان به‌صورت کلیشه‌ای به دانش‌آموزان آموخته می‌شود بدون آنکه معنی و مفهوم آن برای ایشان شفاف گردد. همین امر سبب بروز بدفهمی‌های متفاوت در مبحث اعداد منفی می‌گردد [۳۲] و از آنجاکه بدفهمی‌های به‌وجود آمده می‌تواند در یادگیری مباحث بعدی ریاضی نیز باعث بروز مشکل شود رسیدگی به اعداد منفی و اشکالات دانش‌آموزان در این مبحث که سرآغاز مبانی جبر است نیازمند توجه جدی است.

نه تنها آگاهی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان برای معلمان مفید است و باعث می‌شود شیوه مناسب‌تری برای آموزش مفهوم اعداد منفی به کار گیرند، آشنایی دانش‌آموزان در این زمینه نیز کمک می‌کند که آنان در یادگیری خود تامل بیشتری کنند. امیدوارکننده است که در کتاب‌های تازه تالیف در سیستم آموزشی کشور ما در این زمینه گام‌هایی برداشته شده است. برای مثال می‌توان به کاردرکلاس صفحه ۳ کتاب ریاضی پایه هشتم (شکل ۲) اشاره کرد که در ابتدای کتاب برای یادآوری اعمال روی اعداد صحیح آمده است [۲۴]. در این کاردرکلاس مولفان کتاب ذکری از عنوان بدفهمی نمی‌کنند ولی به‌طور غیرمستقیم سعی در آگاه کردن دانش‌آموزان در این خصوص دارند. جای طرح چنین مسائلی در کتاب ریاضی پایه هفتم خالی است زیرا که در این پایه به بسط و توسعه اعداد منفی پرداخته شده است و دانش‌آموزان با اعداد منفی بیشتر از پایه ششم آشنا می‌شوند. بنابراین آماده دیدن مواردی از جمله این کاردرکلاس و تأمل درباره آن هستند.

۲- حاصل عبارت $۱۰+۳-۷-۲$ را به دو روش حساب کرده ایم. کدام درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

$$۱۰+۳-۷-۲=۱۳-۵=۸$$

$$۱۰+۳-۷-۲=۱۳-۹=۴$$

شکل ۲: کاردرکلاس صفحه ۳ کتاب ریاضی پایه هشتم

از آنجا که در کشور ما دانش آموزان در پایه ششم با اعداد منفی آشنا می شوند و این آشنایی در پایه هفتم بسط داده می شود، زمان بیشتری برای آموزش و یادگیری آن لازم است. در واقع، صرف زمان بیشتر برای تدریس و یادگیری شیوه های مختلف آن، از جمله به کارگیری الگوهای عددی، محور اعداد و غیره به درک عمیق تر دانش آموزان کمک می کند. شاید به کار بردن قوانین علامت ها در این مبحث بتواند برای آموزش این مفهوم مفید باشد، اما ابتدا می باید دانش آموزان به درک درست و کاملی از آن ها برسند تا بتوانند در حل مسائل از این قوانین استفاده کنند و دچار اشتباه نشوند. همچنین شیوه های ارزیابی متفاوت برای سنجش میزان درک و فهم دانش آموزان و شناسایی بدفهمی های احتمالی آنان موثر است. بهتر است در این ارزیابی ها مسائلی که به دانش آموزان داده می شود به گونه ای باشد که با مسائل دنیای واقعی نیز روبه رو شوند. استفاده کاربردی دانش آموزان از این مبحث درک عمیق تری را به همراه خواهد داشت و بهتر است از ایشان خواسته شود راه حل ها و پاسخ هایشان را توضیح دهند تا معلمان از استدلال هایشان مطلع شوند. توصیه می شود پژوهش هایی با تاکید و تامل بر مشاهدات کلاسی و مصاحبه با دانش آموزان و معلمان انجام شود. امیدواریم با انجام پژوهش هایی از این دست بتوان به شناسایی بدفهمی های بیشتری دست پیدا کرد و علل به وجود آمدن برخی از آن ها کشف شود تا بتوان قدمی در راستای پیشرفت و بهبود کیفیت آموزش و یادگیری این مفهوم برداشته شود.

مراجع

- [1] R. Almeida and A. Bruno, Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers, *Internat. J. Math. Ed. Sc. Tech.*, **45** (2014) 719–737.
- [2] B. Ay, *An Investigation on Seventh Grade Students' understanding of Negative Integers via Mathematics History-based Model-eliciting Activities*, Doctoral Dissertation, Middle East Technical University, Ankara, 2019.
- [3] W. N. W. Bakar, The misconception of index and logarithm-the case of pre-diploma students in Uitm Kampus Kelantan semester september 2019-january 2020, *J. Penyelidikan Sains Sosial (Jossr)*, **3** (2020) 22–27.
- [4] A. Bellamy, A critical analysis of teaching and learning negative numbers, *Philos. Math. Ed. J.*, **29** (2015) 1–12.
- [5] J. P. Bishop, L. Lamb, R. Philipp, B. Schappelle and I. Whitacre, An investigation of negative-number reasoning: The case of Violet, available at <http://www.sci.sdsu.edu/CRMSE/projectz/documents/AERA2011>.
- [6] J. P. Bishop, L. L. Lamb, R. A. Philipp, I. Whitacre and B. P. Schappelle, Using order to reason about negative numbers: the case of Violet, *Ed. Stu. Math.* **86** (2014) 39–59.
- [7] L. Bofferding, Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign, *Proc. 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (2010) 703–710.
- [8] L. Bofferding, Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models, *J. Research Math. Ed.*, **45** (2014) 94–245.

- [9] L. Bofferding and S. E. Richardson, Investigating integer addition and subtraction: A task analysis, *Proc. 35th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, M. Martinez, A. Castro Superfine, eds., Chicago, IL. (2013) 111-118.
- [10] A. Bruno and A. Martinon, The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, **30** (1999) 789-809.
- [11] N. F. Fuadiah and D. Suryadi, Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia, *Internat. Ed. Stud.*, **10** (2017) 24-3.
- [12] N. F. Fuadiah and D. Suryadi, Teaching and learning activities in classroom and their impact on student misunderstanding: A case study on negative integers, *Internat. J. Instruction*, **12** (2019) 407-424.
- [13] A. Heeffer, Historical objections against the number line, *Science Education*, **20** (2011) 863-880.
- [14] R. F. Jabal and R. Rosjanuardi, Identifying the secondary school students' misconceptions about number, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **1157** (2019).
- [15] M. Khalid and Z. Embong, Sources and possible causes of errors and misconceptions in operations of integers, *Internat. Electron. J. Math. Ed.*, **15** (2020) 13 pp. <https://doi.org/doi:10.29333/iejme/6265>.
- [16] C. Kilhamn, Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning, *Perspectives on Mathematical Knowledge: Proceedings of the Sixth Research Seminar with the Swedish Society for Research in Mathematics Education*, Linköping, Swedish Society for Research in Mathematics Education, 2008, 30-35.
- [17] C. Kilhamn, *Making Sense of Negative Numbers*, Department of Pedagogical, Curricular and Professional Studies, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Gothenburg, 2011.
- [18] I. Kusmaryono, M. A. Basir and B. A. Saputro, Ontological misconception in mathematics teaching in elementary schools, *Infinity Journal*, **9** (2020) 15-30.
- [19] A. A. Martínez, Negative math: how mathematical rules can be positively bent, *Math. Intelligencer*, **29** (2007) 65-66.
- [20] L. Molitorisová, *Use of the History of Negative Numbers in Education*, Faculty of Mathematics, Physics Informatics, Comenius University, Bratislava, (2011) 429-435.
- [21] W. D. Pratiwi, N. Aisyah and E. Kurniadi, Encouraging student's emergent model in understanding negative number, *4th Sriwijaya University Learning and Education International Conference*, Atlantis Press, (2021) 648-652.
- [22] A. W. Vyawahare and R. K. Agrawal, A history of negative numbers, *Scientia Bruneiana*, **9** (2008) 75-79.
- [23] N. M. Wessman-Enzinger and E. S. Mooney, Conceptual models for integer addition and subtraction, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, **50** (2019) 1-28.
- [۲۴] ح. امیری، ز. پندی، ح. خسروآبادی، خ. داودی، ا. ریحانی، م. سیدصالحی و م. ش. صدر، ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه، ۵، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، تهران، ۱۳۹۹.
- [۲۵] م. دوستی، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی از کسرها، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران، ۱۳۹۲.
- [۲۶] م. دوستی و ا. ریحانی، بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی در کار با کسرها، مجله رشد آموزش ریاضی، ۱۲۲ (۱۳۹۴) ۴-۱۱.
- [۲۷] ف. راشدی، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم راهنمایی از مفهوم اعداد منفی و اشتباهات آنان، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران، ۱۳۹۲.
- [۲۸] ا. ریحانی، ش. بخشعلی‌زاده و ا. واشقی‌فراهانی، بررسی شناخت معلمان ریاضی دوره متوسطه از مثال ریاضی و نحوه به‌کارگیری آن در معرفی یک مفهوم، فصل‌نامه نوآوری‌های آموزشی، ۴۶ (۱۳۹۲) ۱۲۵-۱۵۶.
- [۲۹] ا. ریحانی، ف. حمیدی، و ف. راشدی، بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان، نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش، ۱۰ (۱۳۹۴) ۱۱۵-۱۳۱.

- [۳۰] م. گرزین‌نژاد، آشنایی با سوالات مفهومی در شناخت بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان پایه ششم، الگویی برای درس پژوهی، پویش در آموزش علوم پایه، ۳ (۱۳۹۶) ۵۱-۶۶.
- [۳۱] ز. گویا و ع. ا. ربانی‌فرد، بررسی بدفهمی‌ها به عنوان یکی از موانع اصلی ایجاد درک مثلثاتی در دانش‌آموزان، مجله رشد آموزش ریاضی، ۹۶ (۱۳۸۸) ۴-۱۱.
- [۳۲] م. نظری، بررسی ریشه‌های بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال اول متوسطه در رابطه با اعداد منفی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، تهران، ۱۳۹۱.

نرگس یافتیان

گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
yaftian@sru.ac.ir

نرگس یافتیان کارشناسی خود را در رشته دبیری ریاضی و کارشناسی ارشد را در رشته ریاضی کاربردی از دانشگاه خوارزمی اخذ نمود و مقطع دکترای ریاضی را در دانشگاه علم و صنعت گذراند و در حال حاضر استادیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد. علائق پژوهشی و مطالعاتی وی در زمینه آموزش ریاضی است.



نگار مهدوی

گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
negarmahdavi210@gmail.com

نگار مهدوی متولد سال ۱۳۷۸ در شهر تهران است. دیپلم ریاضی خود را از مدرسه نمونه دولتی سلمان فارسی شهر تهران در سال ۹۷ کسب کرد و در همان سال در رشته کارشناسی ریاضیات و کاربردها در دانشگاه پذیرفته شد و هم اکنون مشغول به تحصیل به عنوان دانشجو معلم در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی است.



بیبا مهرآئین

گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
bamnunique284@gmail.com

بیبا مهرآئین متولد سال ۱۳۷۸ در شهر تهران است. دیپلم ریاضی خود را از مدرسه نمونه دولتی شهید باهنر شهر تهران در سال ۹۷ کسب کرد و در همان سال در رشته کارشناسی ریاضیات و کاربردها در دانشگاه پذیرفته شد و هم اکنون مشغول به تحصیل به عنوان دانشجو معلم در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی است.

