ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۵، شماره ۲ (۱۳۹۹)، صص. ۴۶-۲۹

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

ابرگروه‌های به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر و کاربرد آن‌ها در فیزیک ذرات بنیادی

حسین آقابزرگی* و مرتضی جعفرپور

چکیده. در این مقاله با معرفی ابرعمل‌های تجمعی، (نیم)ابرگروه‌های تجمعی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در اینجا رده‌بندی دسته‌های مختلفی از ابرساختارها ازجمله پلی‌گروه‌ها براساس وجود خاصیت تجمعی مد نظر ما است و پلی‌گروه‌های تجمعی از مرتبه‌های ۲ و ۳ را در حد یکریختی مشخص می‌کنیم. در پایان نشان می‌دهیم که ابرساختار برگرفته‌شده از فیزیک ذرات بنیادی و فیزیک هسته‌ای در خاصیت تجمعی صدق و یک ابرگروه تجمعی ایجاد می‌کند.

۱. مقدمه

مارتی [1] در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنفرانس ریاضی‌دانان اسکاندیناوی تعمیمی از مفهوم گروه را مطرح نمود و نظریه ابرساختارها را بنا کرد [۱۳]. از آن زمان تاکنون تحقیقات زیادی درزمینه ابرساختارها صورت گرفته است و برای آشنایی با نظریه ابرساختارها و کاربردهای آن می‌توان به [۶، ۷، ۸] مراجعه کرد. در سال‌های اخیر نه‌تنها نظریه ابرساختارها مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است، بلکه مورد توجه دانشمندان علوم دیگر همچون فیزیک، شیمی و زیست شناسی و غیره نیز قرار گرفته و در این زمینه مقالات ارزشمندی به چاپ رسیده است؛ به‌عنوان نمونه می‌توان به [۴، ۹، ۱۱، ۱۰، ۱۴، ۱، ۲] اشاره کرد.

ازجمله مفاهیم اساسی در نظریه ابرساختارها مفهوم ابرعمل است که بر اساس آن، ابرساختارها به دسته‌های متنوعی تقسیم و رده‌های گوناگونی ایجاد می‌کنند. برای آگاهی درباره این دسته از ابرساختارها می‌توان به [۳، ۷، ۸، ۱۲، ۱۵] مراجع کرد. دو دسته مهم از ابرعمل‌ها عبارت‌اند از ابرعمل‌های شرکت‌پذیر و ابرعمل‌های شرکت‌پذیر ضعیف که براساس آن‌ها رده نیم‌ابرگروه‌ها و H_vـ گروه‌ها معرفی شده است. برای مطالعه بیشتر این دو دسته از ابرساختارها می‌توان به [۶، ۱۶] مراجعه نمود.

در این مقاله با بیان ابرعمل‌های به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر رده نیم‌ابرگروه‌ها را به دو دسته مجزا با عناوین نیم‌ابرگروه‌های به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر و به طور غیرتجمعی شرکت‌پذیر افراز می‌نماییم و رده‌های مختلفی از آن‌ها را معرفی و مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین انواع مختلفی ار ابرساختارها ازجمله نیم‌ابرگروه‌های کامل،

عبارات و کلمات کلیدی: ابرگروه، نیم‌ابرگروه، نیم‌ابرگروه کامل، ابرعمل به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۵
نوع مقاله: پژوهشی
*نویسنده مسئول مقاله

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

[1] Marty

نیم‌ابرگروه‌های ساده‌شدنی، و پلی‌گروه‌ها را به لحاظ برقراری خاصیت به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر مورد تحقیق قرار می‌دهیم و در حد یکریختی مرتبه‌های کوچکتر را شناسایی می‌کنیم. درپایان با استفاده از نتایج [۱۷]، ابرساختار ایجادشده روی مجموعه لپتون‌ها را از جنبه برقراری خاصیت به‌طور تجمعی شرکت‌پذیری مورد بررسی قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که ابرساختار ایجادشده یک ابرگروه تجمعی تشکیل می‌دهد.

۲. پیشنیازها

در این بخش مفاهیم مورد استفاده در این مقاله را از مراجع [۶، ۷، ۸] یادآوری می‌کنیم.
فرض کنید H مجموعه‌ای ناتهی است. برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$H^n = \{(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) | x_i \in H, ۱ \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}.$$

خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی H را با $P^*(H)$ نشان می‌دهیم. تابع $* : H \times H \to P^*(H)$ را یک ابرعمل دوتایی روی H و زوج مرتب $(H, *)$ را ابرگروه‌واره می‌نامیم. فرض کنید $*$ یک ابرعمل روی H باشد و A و B زیرمجموعه‌های ناتهی از H باشند، دراین صورت قرارداد می‌کنیم که

$$A * B := \bigcup_{a \in A, b \in B} a * b.$$

همچنین قرار می‌دهیم $A * \{x\} := A * x$ و $\{x\} * A := x * A$. به‌طور کلی مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ را با x نمایش می‌دهیم. ابرعمل $*$ را شرکت‌پذیر گوییم، هرگاه برای هر $(x, y, z) \in H^۳$، $(x * y) * z = x * (y * z)$. اگر ابرعمل $*$ شرکت‌پذیر باشد، آنگاه $(H, *)$ را یک نیم‌ابرگروه می‌نامیم. ابرگروه‌واره H را شبه‌ابرگروه گوییم، هرگاه برای هر $a \in H$ داشته باشیم $a * H = H * a = H$؛ این خاصیت اصل تکثیر نامیده می‌شود. نیم‌ابرگروهی را که یک شبه ابرگروه باشد ابرگروه می‌نامیم. فرض کنید $(H, *)$ یک ابرگروه‌واره است. عضو $e \in H$ را همانی راست می‌نامیم، هرگاه برای هر $y \in H$، $y \in y * e$. همانی چپ به‌طریق مشابه تعریف می‌شود. عضو $e \in H$ را همانی گویند، هرگاه همانی راست و همانی چپ باشد. پس $e \in H$ همانی است اگر و تنها اگر برای هر $y \in H$،

$$y \in y * e \cap e * y.$$

ابرگروه‌واره $(H, *)$ را جابجایی می‌نامیم، هرگاه

$$\forall x, y \in H, \quad x * y = y * x.$$

عنصر $x \in H$ را اسکالر گوییم هرگاه به‌ازای هر $y \in H$ داشته باشیم

$$|x * y| = |y * x| = ۱.$$

از این‌به‌بعد مجموعه اسکالرهای ابرگروه‌واره H را با نماد S_H و مجموعه عناصر غیراسکالر آن‌را با نماد T_H نمایش می‌دهیم. ابرگروه‌واره‌ای را که دارای حداقل یک عنصر غیراسکالر باشد ابرگروه‌واره سره می‌نامیم.
فرض کنید ابرگروه $(H, *)$ دارای حداقل یک عضو همانی است. عضو $a' \in H$ را معکوس عنصر $a \in H$ می‌نامیم، هرگاه عضو همانی $e \in H$ موجود باشد که

$$e \in a * a' \cap a' * a.$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

اگر $(H,\circ)$ و $(H',\circ')$ دو نیم‌ابرگروه باشند تابع $f : H \longrightarrow H'$ همریختی نامیده می‌شود اگر برای هر x و y از H داشته باشیم

$$f(x \circ y) \subseteq f(x) \circ' f(y).$$

اگر برای هر $(x,y) \in H^{2}$ رابطه $f(x\circ y) = f(x) \circ' f(y)$ برقرار باشد آنگاه f را یک همریختی خوب می‌نامند. همچنین دو (نیم) ابرگروه یکریخت‌اند اگر f یک همریختی خوب و دوسویی باشد، در این حالت می‌نویسیم $(H,\circ) \cong (H',\circ')$ و به‌طور خلاصه با $H \cong H'$ نشان می‌دهیم.

ابرگروه $(P,\cdot)$ را پلی‌گروه نامیم و به‌صورت $\langle P,\cdot,e,^{-1}\rangle$ نشان می‌دهیم، اگر داشته باشیم

(۱) P اسکالر همانی مانند e داشته باشد (یعنی $e\cdot x = x\cdot e = x$، برای هر $x \in P$)؛

(۲) هر عضو x از P یک عضو معکوس یکتا مانند x^{-1} در P داشته باشد؛

(۳) $x \in y\cdot z$ نتیجه دهد $y \in x\cdot z^{-1}$ و $z \in y^{-1}\cdot x$.

زیرمجموعه ناتهی K از پلی‌گروه $\langle P,\cdot,e,^{-1}\rangle$ را یک زیر پلی‌گروه از P گوییم اگر $x,y \in K$ نتیجه دهد $x\cdot y \in K$ و از $x \in K$ نتیجه بگیریم $x^{-1} \in K$.

۳. ابرگروه‌های به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر

در این بخش تعریف ابرعمل به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر را معرفی می‌کنیم. انواع مختلفی از ابرساختارها ازجمله نیم‌ابرگروه‌های کامل، نیم‌ابرگروه‌های ساده‌شدنی، و پلی‌گروه‌ها را با توجه به این مفهوم مورد تحقیق قرار می‌دهیم و در حد یکریختی مرتبه‌های کمتر از ۴ این دسته از ابرساختارها را مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید H مجموعه‌ای ناتهی و $\circ$ ابرعمل شرکت‌پذیر روی H باشد. گوییم ابرعمل $\circ$ به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر است هرگاه سه‌تایی $(x,y,z) \in T_H^{3}$ موجود باشد به‌طوری‌که داشته باشیم

$$\{x\circ t \mid t \in y\circ z\} \neq \{s\circ z \mid s \in x\circ y\}.$$

از این‌به‌بعد سه‌تایی $(x,y,z) \in T_H^{3}$ را که در نامساوی فوق صدق می‌کند یک سه‌تایی تجمعی در H می‌نامیم. علاوه‌براین، نیم‌ابرگروه (یا ابرگروه) $(H,\circ)$ را تجمعی نامیم هرگاه $T_H = \emptyset$ (سره نباشد) یا دارای حداقل یک سه‌تایی تجمعی باشد. نیم‌ابرگروهی را که تجمعی نباشد نیم‌ابرگروه غیرتجمعی می‌نامیم.

تبصره ۱.۳. بنابه تعریف فوق چون تمام عناصر هر نیم‌گروه اسکالر هستند، پس هر نیم‌گروه یک نیم‌ابرگروه تجمعی است.

مثال ۲.۳. فرض کنید $H = \{a,b,c\}$. ابرگروه زیر را در نظر می‌گیریم

$\circ$	a	b	c
a	a	H	H
b	H	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$
c	H	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$

در این‌صورت ابرگروه $(H,\circ)$ تجمعی است؛ زیرا

$$A = \{a\circ x \mid x \in b\circ c\} = \{a\circ b, a\circ c\} = \{H\}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

و

$$B = \{y \circ c \mid y \in a \circ b\} = \{a \circ c, b \circ c, c \circ c\} = \{H, \{b, c\}\}$$

بنابراین $A \neq B$.

تعریف ۳.۳. فرض کنید H مجموعه‌ای ناتهی و $\circ$ ابرعملی روی H باشد که در آن $T_H = H$. ابرعمل تعمیم‌یافته $\circ$ که با $\widehat{\circ}$ نمایش داده می‌شود ابرعملی است که روی $\widehat{H} = P^*(H)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\forall (A, B) \in \widehat{H}^{2},\ A \widehat{\circ} B = \{a \circ b \mid a \in A, b \in B\}.$$

اکنون قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۴.۳. *$(\widehat{H}, \widehat{\circ})$ نیم‌ابرگروه است اگر و تنها اگر $(H, \circ)$ نیم‌ابرگروهی غیرتجمعی باشد که هر عنصرش غیراسکالر است.*

اثبات. فرض کنید $(\widehat{H}, \widehat{\circ})$ یک نیم‌ابرگروه باشد و $(x, y, z) \in H^3$. در این صورت داریم

$$(x \widehat{\circ} y) \widehat{\circ} z = x \widehat{\circ} (y \widehat{\circ} z);$$

لذا

$$\{t \circ z \mid t \in x \circ y\} = \{x \circ t \mid t \in y \circ z\},$$

و بنابراین

$$(x \circ y) \circ z = \cup\{t \circ z \mid t \in x \circ y\} = \cup\{x \circ t \mid t \in y \circ z\} = x \circ (y \circ z).$$

برعکس، فرض کنیم نیم‌ابرگروه $(H, \circ)$ غیرتجمعی باشد و $T_H = H$. برای هر $(x, y, z) \in \widehat{H}^3$ داریم

$$(x \widehat{\circ} y) \widehat{\circ} z = \{t \circ z \mid t \in x \circ y\} = \{x \circ t \mid t \in y \circ z\} = x \widehat{\circ} (y \widehat{\circ} z).$$

حال اگر $(A, B, C) \in \widehat{H}^3$ آنگاه

$$(x \widehat{\circ} y) \widehat{\circ} z \in (A \widehat{\circ} B) \widehat{\circ} C \Rightarrow (x \widehat{\circ} y) \widehat{\circ} z = x \widehat{\circ} (y \widehat{\circ} z) \in A \widehat{\circ} (B \widehat{\circ} C);$$

لذا $(A \widehat{\circ} B) \widehat{\circ} C \subseteq A \widehat{\circ} (B \widehat{\circ} C)$. به‌طریق مشابه، عکس شمول نیز برقرار است و درنتیجه ابرعمل $\widehat{\circ}$ در خاصیت شرکت‌پذیری صدق می‌کند. □

گزاره ۵.۳. *$(\widehat{H}, \widehat{\circ})$ ابرگروه جابجایی است اگر و تنها اگر $(H, \circ)$ ابرگروهی غیرتجمعی جابجایی باشد.*

اثبات. اثبات به‌آسانی انجام می‌شود. □

مثال ۶.۳. فرض کنید $H = \{e, a, b\}$. ابرگروه زیر را در نظر می‌گیریم

$\circ$	e	a	b
e	$\{a, b\}$	$\{e, b\}$	$\{e, a\}$
a	$\{e, b\}$	$\{e, a\}$	$\{a, b\}$
b	$\{e, a\}$	$\{a, b\}$	$\{e, b\}$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

پس $(H,\circ)$ ابرگروهی غیرتجمعی است که هر عنصرش غیر اسکالر است. همچنین ابرگروه تعمیم‌یافته و جابجایی به‌دست آمده به‌صورت زیر است

$$\widehat{H}=P^*(H)=\{e,a,b,\{e,a\},\{e,b\},\{a,b\},\{e,a,b\}\}.$$

$\widehat{\circ}$	e	a	b	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a,b\}$
e	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{\{a,b\},\{e,b\}\}$	$\{\{a,b\},\{e,a\}\}$	$\{\{e,a\},\{e,b\}\}$	A
a		$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{\{e,a\},\{e,b\}\}$	$\{\{a,b\},\{e,b\}\}$	$\{\{e,a\},\{a,b\}\}$	A
b			$\{e,b\}$	$\{\{a,b\},\{e,a\}\}$	$\{\{e,b\},\{e,a\}\}$	$\{\{a,b\},\{e,b\}\}$	A
$\{e,a\}$				A	A	A	A
$\{e,b\}$					A	A	A
$\{a,b\}$						A	A
$\{e,a,b\}$							A

که در آن $A=\{\{e,a\},\{e,b\},\{a,b\}\}$.

گزاره ۷.۳. *فرض کنید $(G,\cdot)$ گروهی با حداقل سه عضو باشد در این صورت $(G,\circ)$ که در آن ابرعمل $\circ$ به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\forall(x,y)\in G^{2},\ x\circ y=G-\{x\cdot y\}$$

یک ابرگروه غیرتجمعی است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که ابرعمل شرکت‌پذیر است. فرض کنید عناصر دلخواهی باشند، در این صورت

$$(x\circ y)\circ z=\bigcup_{t\in x\circ y}t\circ z\supseteq t_1\circ z\cup t_2\circ z=G,$$

که در آن $t_1\neq t_2$. از طرف دیگر،

$$x\circ(y\circ z)=\bigcup_{s\in y\circ z}x\circ s\supseteq x\circ s_1\cup x\circ s_2=G,$$

که در آن $s_1\neq s_2$، بنابر این $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.
حال ثابت می‌کنیم که ابرعمل $\circ$ غیرتجمعی است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم برای هر $(x,y,z)\in G^3$،

$$\{a\circ z\mid a\in x\circ y\}=\{x\circ b\mid b\in y\circ z\}.$$

فرض کنید $a\in x\circ y$، بنابراین $a\neq x\cdot y$. همچنین فرض کنید $b=x^{-1}\circ z$، لذا $b\neq y\cdot z$ و درنتیجه داریم $x\circ b=a\circ x$؛ بنابراین ابرعمل $\circ$ غیرتجمعی است. $\square$

تبصره ۲.۳. در گزاره فوق اگر $(G,\cdot)$ گروهی از مرتبه ۲ باشد، ابرعمل $\circ$ عمل است و لذا $(G,\circ)$ گروهی ۲ عضوی و تجمعی است.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

تعریف ۸.۳. نیم‌ابرگروه $(H,\cdot)$ کامل نامیده می‌شود اگر به ازای هر $n,m \geq ۲$ و $(x_۱,\ldots,x_n) \in H^n$ و $(y_۱,\ldots,y_m) \in H^m$، داشته باشیم

$$\prod_{i=۱}^{n} x_i \bigcap \prod_{j=۱}^{m} y_j \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i=۱}^{n} x_i = \prod_{j=۱}^{m} y_j.$$

قضیه ۹.۳. *هرنیم‌ابرگروه کامل و سره (یعنی حداقل دارای یک عنصر غیراسکالر باشد) غیرتجمعی است.*

اثبات. فرض کنید $(H,\circ)$ نیم‌ابرگروه کامل سره باشد و $(x,y,z) \in H^۳$. اگر $a \in x \circ y$ آنگاه

$$a \circ z \subseteq (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z);$$

بنابراین $b \in y \circ z$ وجود دارد به‌طوری‌که $a \circ z \cap x \circ b \neq \emptyset$. چون H کامل است، پس $a \circ z = x \circ b$ و بنابراین

$$\{a \circ z \mid a \in x \circ y\} = \{x \circ b \mid b \in y \circ z\}.$$

درنتیجه $(H,\circ)$ غیرتجمعی است. □

قضیه ۱۰.۳ ([۷]). *ابرگروه $(H,\circ)$ کامل است اگر بتوان آن‌را به‌صورت $H = \bigcup\limits_{g\in G} A_g$ نوشت، که در آن G و A_g در شرایط زیر صدق می‌کنند*

(۱) $(G,\cdot)$ *گروه است؛*
(۲) *برای هر* $(x,y) \in G^۲$، *که* $x \neq y$، *داریم* $A_x \cap A_y = \emptyset$؛
(۳) *اگر* $(a,b) \in A_x \times A_y$، *آنگاه* $a \circ b = A_{x\cdot y}$.

قضیه ۱۱.۳. *فرض کنید $(H,\circ)$ ابرگروهی کامل سره و برای هر $(x,y) \in H^۲$ داشته باشیم $x\bar{\circ}y = H - x \circ y$. در این صورت $(H,\bar{\circ})$ ابرگروهی غیرتجمعی است اگر و تنها اگر برای هر $(x,y) \in H^۲$ داشته باشیم $x \circ y \neq H$.*

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم ابرعمل $\bar{\circ}$ شرکت‌پذیر است. بنابه قضیه قبل گروه $(G,\cdot)$ و خانواده‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا مانند $\{A_g\}_{g\in G}$ وجود دارد که $H = \bigcup_{g\in G} A_g$ و همچنین برای هر $(a,b) \in H^۲$ داریم $a \circ b = A_{x\cdot y}$ که در آن $a \in A_x$ و $b \in A_y$. حال فرض کنید $(a,b,c) \in H^۳$؛ پس $(x,y,z) \in G^۳$ وجود دارد به‌طوری‌که $a \in A_x$ و $b \in A_y$ و $c \in A_z$. داریم

$$a\bar{\circ}b)\bar{\circ}c = (H - a \circ b)\bar{\circ}c = \left(\bigcup_{t\in G-\{x\cdot y\}} A_t\right)\bar{\circ}c = \left(\bigcup_{t\in x\bar{\cdot}y} A_t\right)\bar{\circ}c = \bigcup_{s\in(x\bar{\cdot}y)\bar{\cdot}z} A_s$$
$$= \bigcup_{s\in x\bar{\cdot}(y\bar{\cdot}z)} A_s = a\bar{\circ}\left(\bigcup_{u\in y\bar{\cdot}z} A_u\right) = a\bar{\circ}(H - b \circ c) = a\bar{\circ}(b\bar{\circ}c),$$

که در آن $y\bar{\cdot}z = G - \{x \cdot y\}$. لذا ابرعمل $\bar{\circ}$ شرکت‌پذیر است. علاوه بر این، ثابت می‌کنیم

$$A = \{a\bar{\circ}u \mid u \in b\bar{\circ}c\} = \{v\bar{\circ}c \mid v \in a\bar{\circ}b\}.$$

فرض کنید $a\bar{\circ}u \in A$ که $u \in b\bar{\circ}c$. اگر $v \in a \circ u \circ c'$ که c' وارون c در زیرابرگروه $(H,\circ)$ است، در این صورت داریم: $v \in a\bar{\circ}b$؛ زیرا در غیر این‌صورت اگر $v \notin a\bar{\circ}b$ آنگاه $v \in a \circ b \cap a \circ u \circ c'$. اگر a' وارون a در $(H,\circ)$ باشد

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

داریم
$$a^{'}\circ a\circ b=a^{'}\circ a\circ u\circ c^{'}=e\circ u\circ c^{'}=u\circ c^{'},$$
که در آن e عضو همانی ابرگروه H است. لذا
$$u\in u\circ c^{'}\circ c=a^{'}\circ a\circ b\circ c=b\circ c,$$
پس $u\notin b\bar{\circ}c$ که تناقض است. بنابراین $v\in a\bar{\circ}b$ نتیجه می‌شود. لذا
$$v\bar{\circ}c=(a\bar{\circ}b)\bar{\circ}c=a\bar{\circ}(b\bar{\circ}c)=a\bar{\circ}u$$
و $a\bar{\circ}u=v\bar{\circ}c\in B$ و $A\subseteq B$. به‌طریق مشابه $B\subseteq A$ و بنابراین $A=B$. با این حکم نتیجه می‌گیریم که ابرعمل $\bar{\circ}$ غیرتجمعی است. □

تعریف ۱۲.۳. نیم‌ابرگروه $(H,\circ)$ را ساده‌شدنی از راست گوییم هرگاه برای هر $(x,y,z)\in H^{3}$ داشته باشیم
$$x\circ z=y\circ z\Rightarrow x=y.$$
نیم‌ابرگروه $(H,\circ)$ را ساده‌شدنی از چپ گوییم هرگاه برای هر $(x,y,z)\in H^{3}$ داشته باشیم
$$x\circ y=x\circ z\Rightarrow y=z.$$
نیم‌ابرگروه $(H,\circ)$ را ساده‌شدنی گوییم هرگاه ساده‌شدنی از راست و چپ باشد.

گزاره ۱۳.۳. *فرض کنید $(H,\circ)$ یک نیم‌ابرگروه ساده‌شدنی و عضو $(x,y,z)\in T_H^{3}$ موجود باشد به‌طوری‌که $|x\circ y|\neq|y\circ z|$، دراین‌صورت $(H,\circ)$ نیم‌ابرگروهی تجمعی است.*

اثبات. فرض کنید $(x,y,z)\in T_H^{3}$ و $|x\circ y|\neq|y\circ z|$. داریم
$$|\{t\circ z|t\in x\circ y\}|=|x\circ y|,\qquad |\{x\circ s|s\in y\circ z\}|=|y\circ z|;$$
لذا
$$\{x\circ s|s\in y\circ z\}\neq\{t\circ z|t\in x\circ y\}.$$
□

نتیجه ۱۴.۳. *اگر $(H,\circ)$ نیم‌ابرگروه غیرتجمعی و ساده‌شدنی باشد، آنگاه برای هر $(a,b,x)\in T_H^{3}$،*
$$|b\circ x|=|a\circ b|=|x\circ a|.$$
بنابراین اگر نیم‌ابرگروهی متناهی، غیرتجمعی و ساده‌شدنی باشد، به ازای هر $(x,y)\in T_H^{2}$ داریم $|x\circ y|=|y\circ x|$. لذا عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $(x,y)\in T_H^{2}$، $|x\circ y|=n$.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که عکس نتیجه قبل درست نیست.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

مثال ۱۵.۳. فرض کنید $H=\{a,b,c\}$. ابرگروه زیر را در نظر می‌گیریم

$\circ$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$
a	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$

ابرگروه $(H,\circ)$ ساده‌شدنی است و $|x\circ y|=۲$. همچنین $\{t\circ b | t\in e\circ a\}\neq\{e\circ t | t\in a\circ b\}$ (یعنی این ابرگروه تجمعی است).

تعریف ۱۶.۳. نیم‌ابرگروه $(H,\circ)$ را nـ یکدست می‌نامیم هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $(x,y)\in H^{۲}$، $|x\circ y|=n$.

لم ۱۷.۳. *فرض کنید $H=\{e,a,b\}$ و $\circ$ ابرعملی روی H باشد به‌طوری‌که برای هر $(x,y)\in H^{۲}$، $|x\circ y|=۲$ و همچنین قانون حذف برقرار باشد؛ یعنی برای هر $(x,y,z)\in H^{۳}$ شرط*

$$x\circ y=x\circ z\Rightarrow y=z \quad \text{و} \quad y\circ x=z\circ x\Rightarrow y=z$$

برقرار باشد. دراین‌صورت $(H,\circ)$ ابرگروه است.

اثبات. برای هر $(x,y,z)\in H^{۳}$ چون زیرمجموعه‌های دوعضوی H عبارت‌اند از $\{e,a\}$، $\{e,b\}$ و $\{a,b\}$ با توجه به اینکه قانون حذف از چپ برقرار است برای هر $(x,y,z)\in H^{۳}$ اگر $y\neq z$ داریم

$$(x\circ y)\circ z=\{u,v\}\circ z=u\circ z\cup v\circ z=H.$$

همچنین با توجه به اینکه قانون حذف از راست بر قرار است داریم

$$x\circ(y\circ z)=x\circ\{s,t\}=x\circ s\cup x\circ t=H.$$

لذا $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$ و بنابراین ابرعمل $\circ$ درخاصیت شرکت‌پذیری صدق می‌کند. همچنین به‌وضوح دیده می‌شود که برای هر $x\in H$، $H\circ x=H=x\circ H$؛ یعنی ابرعمل $\circ$ در خاصیت اصل تکثیر نیز صدق می‌کند. □

گزاره ۱۸.۳. *جدول کیلی نیم‌ابرگروه‌های ۲ـ یکدست و ساده‌نشدنی از مرتبه ۳ به یکی از صورت‌های زیر است.*

$\circ_{۱}$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
a	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$
b	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$

$\circ_{۲}$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
a	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$

$\circ_{۳}$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$
a	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$
b	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$

$\circ_{۴}$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$
a	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$

$\circ_{۵}$	e	a	b
e	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$
a	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$

$\circ_{۶}$	e	a	b
e	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$
a	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$
b	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

$\circ_7$	e	a	b
e	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$
a	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$
b	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$

$\circ_8$	e	a	b
e	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$
a	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
b	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$

$\circ_9$	e	a	b
e	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$
a	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$
b	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$

$\circ_{10}$	e	a	b
e	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$
a	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$
b	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$

$\circ_{11}$	e	a	b
e	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$
a	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$

$\circ_{12}$	e	a	b
e	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$
a	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$
b	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$

اثبات. فرض کنید $H=\{e,a,b\}$ و جدول کیلی ابرعمل $\circ$ به‌صورت زیر باشد

$\circ$	e	a	b
e	$e\circ e$	$e\circ a$	$e\circ b$
a	$a\circ e$	$a\circ a$	$a\circ b$
b	$b\circ e$	$b\circ a$	$b\circ b$

با توجه به اینکه برای هر $(x,y)\in H^2$، $|x\circ y|=2$ و H دارای ۳ زیرمجموعه ۲ عضوی $\{e,a\}$، $\{e,b\}$ و$\{a,b\}$ است؛ بنابراین تعداد کل حالات ممکن برای انتخاب $e\circ e$، ۳ حالت است. از طرفی چون باید ابرعمل $\circ$ دارای خاصیت حذف از راست باشد پس تعداد حالات ممکن برای انتخاب $e\circ a$، ۲ حالت و برای $a\circ a$ نیز ۲ حالت می‌باشد. همچنین برای سایر حالات تعداد انتخاب ممکن ۱ حالت می‌باشد، پس تعداد کل ابرعمل‌های ممکن ۱۲ حالت است. بنابه لم قبل، چون در هر حالت یک ابرگروه تشکیل می‌شود لذا تعداد کل ابرگروه‌های ۲ـ یکدست و ساده‌شدنی، ۱۲ حالت ممکن ذکرشده در گزاره است. □

قضیه ۱۹.۳. *اگر $(H,\circ)$ نیم‌ابرگروهی ۲ـ یکدست و ساده‌شدنی غیرجابجایی از مرتبه ۳ باشد، آنگاه $(H,\circ)$ تجمعی است.*

اثبات. با توجه به گزاره قبل نیم‌ابرگروه‌های ۲ـ یکدست و ساده‌شدنی غیرجابجایی از مرتبه ۳ عبارت‌اند از

$\circ_1$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
a	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$
b	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$

$\circ_4$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$
a	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$

$\circ_6$	e	a	b
e	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$
a	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$
b	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$

$\circ_7$	e	a	b
e	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$
a	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$
b	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$

$\circ_{10}$	e	a	b
e	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$
a	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$	$\{e,b\}$
b	$\{e,b\}$	$\{e,a\}$	$\{a,b\}$

$\circ_{11}$	e	a	b
e	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$
a	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$

ابرعمل‌های $\circ_1$ و$\circ_4$ و$\circ_6$ و$\circ_7$ به‌طور تجمعی شرکت‌پذیرند؛ زیرا برای هریک از آن‌ها داریم

$$\{x\circ a|x\in e\circ b\}\neq\{e\circ x|x\in b\circ a\}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

برای ابرعمل $\circ_{10}$ شرط زیر برقرار است

$$\{x \circ b | x \in a \circ e\} \neq \{a \circ x | x \in e \circ b\}.$$

همچنین برای ابرعمل $\circ_{11}$ نامساوی زیر برقرار است

$$\{x \circ b | x \in e \circ a\} \neq \{e \circ x | x \in a \circ b\}.$$

□

مثال زیر نشان می‌دهد هر ابرگروه ۲ـ یکدست و ساده‌شدنی جابجایی از مرتبه ۳ لزوما غیرتجمعی نیست.

مثال ۲۰.۳. ابرگروه جابجایی زیر را در نظر بگیرید

$\circ$	e	a	b
e	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
a	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$
b	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$	$\{e,b\}$

در این ابرگروه شرط زیر برقرار است

$$\{x \circ b | x \in e \circ a\} = \{\{a,b\},\{e,b\}\} \neq \{\{e,a\},\{e,b\}\} = \{e \circ x | x \in a \circ b\}.$$

ازجمله ابرساختارهایی که خواصی نزدیک به گروه‌ها دارند پلی‌گروه‌ها هستند. مفهوم پلی‌گروه را برای اولین‌بار کومر در [۵] مطرح کرد؛ برای مطالعه دقیق‌تر پلی‌گروه‌ها می‌توان به [۸] مراجعه نمود. در این مرجع تعداد پلی‌گروه‌های از مرتبه ۲ در حد یکریختی مشخص شده‌اند و ثابت شده است که ۲ پلی‌گروه از مرتبه ۲ وجود دارد.

قضیه ۲۱.۳. *در حد یکریختی فقط یک پلی‌گروه غیرتجمعی از مرتبه ۲ وجود دارد.*

اثبات. در حد یکریختی دو پلی‌گروه زیر که از مرتبه ۲ هستند وجود دارند:

Q_1	e	a
e	e	a
a	a	e

Q_2	e	a
e	e	a
a	a	$\{e,a\}$

پلی‌گروه Q_1 گروهی از مرتبه ۲ است و بنابراین تجمعی است. اما در پلی‌گروه Q_2 و $T_{Q_2} = \{a\}$ و برای سه‌تایی (a,a,a) داریم

$$\{x \circ a | x \in a \circ a\} = \{a \circ x | x \in a \circ a\}.$$

□

در [۸] تعداد پلی‌گروه‌های از مرتبه ۳ در حد یکریختی شمارش شده‌اند (۱۰ پلی‌گروه از مرتبه ۳ وجود دارد) و جدول کیلی هر یک از آن‌ها به‌صورت زیر است

P_1	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	$\{e,a\}$

P_2	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	b	$\{e,a,b\}$

P_3	e	a	b
e	e	a	b
a	a	a	$\{e,a,b\}$
b	b	$\{e,a,b\}$	b

P_4	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

P_5	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$\{e,a\}$	b
b	b	b	$\{e,a\}$

P_6	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$\{e,a\}$	b
b	b	b	$\{e,a,b\}$

P_7	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
b	b	$\{a,b\}$	$\{e,a\}$

P_8	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$\{e,b\}$	$\{a,b\}$
b	b	$\{a,b\}$	$\{e,a,b\}$

P_9	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$\{a,b\}$	$\{e,a,b\}$
b	b	$\{e,a,b\}$	$\{a,b\}$

P_{10}	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$\{e,a,b\}$	$\{a,b\}$
b	b	$\{a,b\}$	$\{e,a,b\}$

قضیه ۲۲.۳. *در حد یکریختی فقط دو پلی‌گروه غیرتجمعی از مرتبه ۳ وجود دارد.*

اثبات. از پلی‌گروه‌های P_1 تا P_{10}، پلی‌گروه‌های P_1 و P_2 غیرتجمعی و بقیه همگی تجمعی‌اند. در پلی‌گروه‌های P_1 و P_2، $T_{P_2} = T_{P_1} = \{b\}$ و برای سه‌تایی (b,b,b) داریم

$$\{x \circ b | x \in b \circ b\} = \{b \circ x | x \in b \circ b\}.$$

سایر پلی‌گروه‌های مرتبه ۳ به‌جز P_4 دارای سه‌تایی تجمعی‌اند. برای پلی‌گروه‌های P_3، P_5، P_6 سه‌تایی $(a.b.b)$ یک عنصر تجمعی است. همچنین برای پلی‌گروه‌های P_7، P_8، P_9، P_{10}سه‌تایی $(a.a.b)$ یک عنصر تجمعی است. □

۴. ابرگروه تجمعی وابسته به فیزیک ذرات بنیادی و فیزیک هسته‌ای

در علم فیزیک، ذره بنیادی به ذره‌ای گفته می‌شود که هیچ ساختار داخلی ندارد؛ لذا این ذره یکی از بلوک‌های ساختمانی جهان اطراف ما را تشکیل می‌دهد. عملاً از سال ۱۸۹۷ که الکترون به‌عنوان بنیادی‌ترین عنصر جهان توسط تامسون کشف شد فیزیک ذرات بنیادی پدید آمد. از آن پس ذرات بنیادی به‌تدریج معرفی شدند. برای ایجاد نظم در مجموعه بزرگ از ذرات و ارائه الگوی مناسب برای توجیه ساز و کار برهم‌کنش ذرات، مدل‌های متفاوتی ارائه گردیده است که مهم‌ترین آن‌ها مدل استاندارد نامیده می‌شود [۱۴]. در مدل استاندارد شش لپتون و شش پاد لپتون در سه نسل ظاهر می‌شود. نسل اول شامل الکترون، پوزیترون، نوترینوی الکترون، و پاد نوترینوی الکترون، نسل دوم شامل میون، پادمیون، نوترینوی میون، و پادنوترینوی میون و نسل سوم شامل تائون، پادتائون، نوترینوی تائون، و پادنوترینوی تائون می‌باشد. بنابراین مجموعه لپتون‌ها شامل ۱۲ عنصر به‌صورت

$$\mathrm{L} = \{e, \mu, \tau, e^+, \mu^+, \tau^+, v_e, v_\mu, v_\tau, \overline{v_e}, \overline{v_\mu}, \overline{v_\tau}\}$$

است. در [۱۷] موسوی‌نژاد و همکاران ابرعمل روی مجموعه لپتون‌ها به‌صورت جدول ۱ ارائه شده است. آن‌ها با کمک گرفتن از نرم‌افزار میپل ۱۴ نشان دادند که این ابرعمل در خاصیت شرکت‌پذیری ضعیف صدق می‌کند. در این بخش ثابت می‌کنیم که ابرساختار معرفی‌شده خاصیت شرکت‌پذیری دارد و یک ابرگروه تجمعی تشکیل می‌دهد.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

$\otimes$	e	ν_e	e^+	$\bar{\nu}_e$	μ	ν_μ	μ^+	$\bar{\nu}_\mu$	τ	ν_τ	τ^+	$\bar{\nu}_\tau$
e	e	e,ν_e	L	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	e,μ	e,ν_e μ,ν_μ	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_\mu$	e,τ	e,ν_e τ,ν_τ	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$e,\bar{\nu}_\tau$
ν_e	e,ν_e	ν_e	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	L	e,ν_e μ,ν_μ	ν_e,ν_μ	μ^+,ν_e	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	e,ν_e τ,ν_τ	ν_τ,ν_e	ν_e,τ^+	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
e^+	L	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	e^+	$e^+,\bar{\nu}_e$	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	e^+,ν_μ	e^+,μ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	e^+,ν_τ	e^+,τ^+	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_e$	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	L	$e^+,\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e$	$\mu,\bar{\nu}_e$	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\mu$	$\tau,\bar{\nu}_e$	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\tau$
μ	e,μ	e,ν_e μ,ν_μ	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\mu,\bar{\nu}_e$	μ	μ,ν_μ	L	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	μ,τ	τ,ν_τ μ,ν_μ	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ	$\mu,\bar{\nu}_\tau$
ν_μ	e,ν_e μ,ν_μ	ν_e,ν_μ	e^+,ν_μ	μ,ν_μ $e^+,\bar{\nu}_e$	μ,ν_μ	ν_μ	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	L	τ,ν_τ μ,ν_μ	ν_μ,ν_τ	τ^+,ν_μ	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ
μ^+	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	μ^+,ν_e	e^+,μ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	L	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	μ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	μ^+,ν_τ	μ^+,τ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_\mu$	e,ν_e $\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $e^+,\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	L	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	$\tau,\bar{\nu}_\mu$	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau,\bar{\nu}_\mu$
τ	e,τ	e,ν_e τ,ν_τ	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	$\tau,\bar{\nu}_e$	μ,τ	τ,ν_τ μ,ν_μ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	$\tau,\bar{\nu}_\mu$	τ	τ,ν_τ	L	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$
ν_τ	e,ν_e τ,ν_τ	ν_τ,ν_e	e^+,ν_τ	$e^+,\bar{\nu}_e$ τ,ν_τ	τ,ν_τ μ,ν_μ	ν_μ,ν_τ	μ^+,ν_τ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ τ,ν_τ	τ,ν_τ	ν_τ	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	L
τ^+	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	ν_e,τ^+	e^+,τ^+	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ	τ^+,ν_μ	μ^+,τ^+	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	L	e^+,ν_e μ^+,ν_μ τ^+,ν_τ	τ^+	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$
$\bar{\nu}_\tau$	$e,\bar{\nu}_\tau$	e,ν_e $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$e^+,\bar{\nu}_e$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_\tau$	$\mu,\bar{\nu}_\tau$	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$ μ,ν_μ	$\mu^+,\bar{\nu}_\mu$ $\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau,\bar{\nu}_\mu$	$e,\bar{\nu}_e$ $\mu,\bar{\nu}_\mu$ $\tau,\bar{\nu}_\tau$	L	$\tau^+,\bar{\nu}_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$

جدول(۱)

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

فرض کنید

$$\mathrm{W}=\{e,\mu,\tau\}, \qquad \mathrm{W}^{+}=\{\ e^{+},\mu^{+},\tau^{+}\},$$

$$\overline{\mathrm{V}}=\{\overline{v_e}\ ,\ \overline{v_\mu}\ ,\ \overline{v_\tau}\}, \qquad \mathrm{V}=\{v_e,\ v_\mu,\ v_\tau\},$$

$$\mathrm{U}=\{\mathrm{W}^{+},\ \mathrm{W},\ \ \mathrm{V},\ \overline{\mathrm{V}}\}$$

و

$$y^{*}=\begin{cases} y & y\in\mathrm{W}^{+},\ y\in\overline{\mathrm{V}}\\ y^{+} & y\in\mathrm{W}\\ \overline{y} & y\in\mathrm{V}\end{cases}$$

برای هر زیرمجموعه ناتهی از L مانند A مجموعه A^{*} را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{A}^{*}=\{a^{*}\mid a\in\mathrm{A}\}.$$

اگر x,y دو عضو دلخواه از مجموعه L باشد، ابرعمل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$y\ \odot\ x=x\ \odot\ y=\begin{cases} \{x,y\} & x,y\in\mathrm{X},\ \mathrm{X}\in\mathrm{U}\\ \mathrm{L} & x\in\mathrm{W},\ y=x^{+}\\ \{x,y,\overline{v_{y^{*}}},v_x\} & x\in\mathrm{W},\ y\in\mathrm{W}^{+}-\{x^{+}\}\\ \{x,y\} & x\in\mathrm{W},\ y=\ v_x,\ y\in\overline{V}-\{\overline{v_x}\}\\ \mathrm{W}\cup\ \overline{V} & x\in\mathrm{W},\ y=\overline{v_x}\\ \{x,y,z,v_x\} & x\in\mathrm{W},\ y=v_z,\ z\neq x\\ a\odot b^{+} & x{=}v_a,\ y=\overline{v_b}\\ (x^{*}\odot y^{*}\ )^{*} & x\in\mathrm{W}^{+},\ y\in\ \mathrm{V},\ y\in\overline{V}\end{cases}$$

لم ۱.۴. *برای هر x,y از مجموعه L داریم $x\ \odot\ y=x\ \otimes\ y$ (ابرعمل $\otimes$ همان ابرعمل جدول ۱ است).*

اثبات. برای اثبات اینکه این دو ابرعمل بر هم منطبق هستند ابتدا وضعیت‌های ترکیب اعضا را در جدول ۱ مورد بررسی قرار می‌دهیم . در جدول ۱ مشاهده می‌شود که در دوازده مکان ترکیب اعضا ۱۲ عضوی است و در ۱۰ مکان ترکیب عناصر مجموعه ۶ عضوی است. همچنین در ۲۴ مکان تعداد اعضا ۴ عضوی و درسایر مکان‌ها ترکیب دو عضوی است. با توجه به اینکه ابرعمل $\otimes$ خاصیت جابجایی دارد کافی است مکان‌های بالای قطر اصلی را در جدول ۱ بررسی کنیم. این مکان‌ها به‌ترتیب عبارت‌اند از

L	$x\in\mathrm{W},\quad x\otimes x^{+}$
L	$x\in\mathrm{W},\quad v_x\otimes\overline{v_x}$

بر طبق ضابطه ابرعمل $\odot$ از سطرهای دوم و هفتم ضابطه نتیجه می‌گیریم که

$$x\in\mathrm{W}\ ,\ x\ \odot\ x^{+}=v_x\odot\ \overline{v_x}=\mathrm{L}$$

همچنین برای ترکیب‌های ۶ عضوی در جدول ۱ داریم

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

$e^+, \mu^+, \tau^+,\ v_e,\ v_\mu,\ v_\tau$	$v_e \otimes\ e^+ = v_\tau \otimes\ \tau^+$
$e,\ \ \mu,\ \ \tau,\ \ \overline{v_e},\ \ \overline{v_\mu},\ \ \overline{v_\tau}$	$e \otimes \overline{v_e} = \mu \otimes \overline{v_\mu} = \tau \otimes \overline{v_\tau}$

حال با توجه به ضابطه ابرعمل $\odot$ داده‌شده از سطرهای پنجم و هشتم آن نتیجه می‌گیریم که

$e^+, \mu^+, \tau^+,\ v_e,\ v_\mu,\ v_\tau$	$v_e\ \odot\ \ e^+ = v_\tau \odot\ \tau^+$
$e,\ \ \mu,\ \ \tau,\ \ \overline{v_e},\ \ \overline{v_\mu},\ \ \overline{v_\tau}$	$e \odot \overline{v_e} = \mu \odot \overline{v_\mu} = \tau \odot \overline{v_\tau}$

به‌طور مشابه، برای سایر حالت‌ها یعنی حالت‌هایی که ترکیب اعضا مجموعه‌ای دو عضوی و یا چهار عضوی است دو ابرعمل برهم منطبق هستند. $\square$

گزاره ۲.۴. *ابرعمل $\odot$ روی L در خاصیت شرکت‌پذیری صدق می‌کند.*

اثبات. فرض کنید x, y, z عناصر دلخواهی از مجموعه L باشند. برای اثبات خاصیت شرکت‌پذیری ابرعمل $\odot$ می‌توان شش مرحله زیر را در نظر گرفت. توجه کنید در هر مرحله چند حالت رخ می‌دهد.

مرحله(۱). $X \in U$، $\{x,y,z\} \subset X$. در این مرحله داریم

$$x\ \odot\ (y\ \odot\ z) = \{x,y,z\} = (x\ \odot\ y) \odot\ z$$

مرحله(۲). $\{x,y\} \subset \mathrm{W}$ و $z \in \{x^+, y^+\}$.

$$(x\ \odot\ y) \odot\ z = \{x,y\} \odot z = x \odot z \cup y \odot z = \mathrm{L}.$$

از طرف دیگر داریم

$$x\ \odot\ (y\ \odot\ z) = \begin{cases} \mathrm{L} = x\ \odot\ (y\ \odot\ y^+) = x\ \odot \mathrm{L} \\ \mathrm{L} = x\ \odot\ x^+ \subset x\ \odot\ (y\ \odot\ x^+) \end{cases}$$

بنابراین حکم برقرار است.

مرحله(۳). $\{x,y\} \subset \mathrm{W}$ و $z \in \mathrm{W}^+ - \{x^+, y^+\}$.

$$(x\ \odot\ y) \odot\ z = \{x,y\} \odot z = x \odot z \cup y \odot z = \{x, y, z, v_x, v_y, \overline{v_{z^*}}\}$$

از طرف دیگر داریم

$$x\ \odot\ (y\ \odot\ z) = x\ \odot\ \{y, z, \overline{v_{z^*}},\ v_y\} = \{x, y, z, v_x, v_y, \overline{v_{z^*}}\}.$$

پس $(x\ \odot\ y) \odot\ z = x\ \odot\ (y\ \odot\ z)$.

مرحله(۴). $\{x,y\} \subset \mathrm{W}$ و $z \in \overline{V} - \{\overline{v_x}, \overline{v_y}\}$ یا $z \in \{v_x, v_y\}$.

$$x\ \odot\ (y\ \odot\ z) = \{x,y,z\} = (x\ \odot\ y) \odot\ z.$$

مرحله(۵). $\{x,y\} \subset \mathrm{W}$ و $z \in \{\overline{v_x}, \overline{v_y}\}$.

$$(x\ \odot\ y) \odot\ z = \{x,y\} \odot z = \mathrm{W} \cup\ \overline{V}.$$

$$x\ \odot\ (y\ \odot\ z) = x\ \odot \mathrm{W} \cup\ \overline{V} = x\ \odot \mathrm{W} \cup\ x\ \odot \overline{V} =\ \mathrm{W} \cup\ \overline{V}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

مرحله(۶). $\{x,y\}\subset \mathrm{W}$ و $z\in V-\{v_x,v_y\}$. فرض کنید $x=v_a$ که $y\neq a\neq x$. در این مرحله داریم

$$(x\ \odot\ y)\odot\ z=\{x,y\}\odot z=x\odot z\cup y\odot z=\{x,y,z,a,\ v_x,v_y\}\,.$$

از سوی دیگر

$$x\ \odot\ (y\ \odot\ z)=x\ \odot\ \{y,z,a,\ v_y\}=\{x,y,z,a,v_x,v_y\}\,.$$

بنابراین در این مرحله نیزحکم برقرار است. اگر $x\in \mathrm{W}$، $\{y,z\}\nsubseteq \mathrm{W}$ یا $\{x,y,z\}\nsubseteq \mathrm{W}$ آنگاه حکم به طور مشابه برقرار است. به عنوان مثال اگر $x=a^+\in \mathrm{W}^+, y=v_b\in \mathrm{V},\ z=\overline{v_c}\in\overline{V}$ برقرار باشد آنگاه داریم

$$(x\ \odot\ y)\odot\ z=(x^*\odot y^*\ )^*\odot\ z=(a\ \odot\ \overline{v_b}\ )^*\odot\ z$$

اما

$$a\ \odot\ \overline{v_b}=\begin{cases} a\ \odot\ \overline{v_a}=\mathrm{W}\cup\ \overline{V} & \\ a\ \odot\ \overline{v_b}=\{a\ ,\ \overline{v_b}\} & b\neq a\end{cases}$$

و بنابراین

$$(a\ \odot\ \overline{v_b}\ )^*=\begin{cases} \mathrm{W}^+\cup V & \\ \{x\ ,\ y\} & b\neq a\end{cases}$$

اکنون می‌توان نتیجه گرفت که

$$(a\ \odot\ \overline{v_b}\ )^*\odot\ z=(a\ \odot\ \overline{v_b}\ )^*\odot\ \overline{v_c}=\begin{cases} \mathrm{W}^+\odot\ \overline{v_c}\cup\ V\odot\ \overline{v_c} & \\ \{x\ ,\ y\}\odot\ \overline{v_c}=\{a^+\ ,v_b\}\odot\ \overline{v_c} & b\neq a\end{cases}$$

بنابراین داریم

$$(x\ \odot\ y)\odot\ z=(a\ \odot\ \overline{v_b}\ )^*\odot\ z=\begin{cases} \mathrm{L} & a=b,\ b=c\\ \{x\ ,\ y\}\odot\ \overline{v_c}=\{a^+\ ,v_b\}\odot\ \overline{v_c} & b\neq a,\ b\neq c\end{cases}$$

اکنون با توجه به ضابطه ابرعمل $\odot$ حاصل به‌صورت زیر در می‌آید

$$(x\ \odot\ y)\odot\ z=(a\ \odot\ \overline{v_b}\ )^*\odot\ z=\begin{cases} \mathrm{L} & a=b,\ b=c\\ \{a^+\ ,v_b\}\odot\ \overline{v_c}=a^+\odot\ \overline{v_c}\cup v_b\odot\ \overline{v_c} & b\neq a,\ b\neq c\end{cases}$$

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

و خواهیم داشت

$$(x \odot y) \odot z = (a \odot \overline{v_b})^* \odot z = \begin{cases} \mathrm{L} & a = b,\ b = c \\ a^+ \odot \overline{v_c} \cup v_b \odot \overline{v_c} & b \neq a,\ b \neq c,\ \ a \neq c \\ a^+ \odot \overline{v_a} \cup v_b \odot \overline{v_c} & b \neq a,\ b \neq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{L} & a = b,\ b = c \\ \{a^+, \overline{v_c}, \mathrm{c}^+, \overline{v_a}\} \cup \{b, \mathrm{c}^+, v_b, \overline{v_c}\} & b \neq a,\ \ b \neq c,\ a \neq c \\ \{a^+, \overline{v_a}\} \cup \{b, \mathrm{c}^+, v_b, \overline{v_c}\} & b \neq a,\ b \neq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{L} & a = b,\ b = c \\ \{x, y, z, \mathrm{c}^+, \overline{v_a}, b\} & b \neq a,\ b \neq c \end{cases}$$

از سوی دیگر لازم است حاصل $x \odot (y \odot z)$ را نیز محاسبه کنیم.

$$x \odot (y \odot z) = a^+ \odot (v_b \odot \overline{v_c}) = \begin{cases} \mathrm{L} & b = c \\ a^+ \odot (b \odot \mathrm{c}^+) & b \neq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{L} & b = c \\ a^+ \odot \{\mathrm{b}, \mathrm{c}^+, \overline{v_c}, v_b\} & b \neq c \end{cases}$$

اما چون

$$\begin{aligned} a^+ \odot \{\mathrm{b}, \mathrm{c}^+, \overline{v_c}, v_b\} &= a^+ \odot b \cup a^+ \odot \mathrm{c}^+ \cup a^+ \odot \overline{v_c} \cup a^+ \odot v_b \\ &= \{\mathrm{b}, a^+, \overline{v_a}, v_b\} \cup \{a^+, \mathrm{c}^+\} \cup \{a^+, \mathrm{c}^+, \overline{v_c}, v_a\} \cup \{a^+, v_b\} \\ &= \{x, y, z, \mathrm{c}^+, \overline{v_a}, b\}, \end{aligned}$$

نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$x \odot (y \odot z) = \begin{cases} \mathrm{L} & a = b,\ b = c \\ \{x, y, z, \mathrm{c}^+, \overline{v_a}, b\} & b \neq a,\ b \neq c \end{cases}$$

بنابراین در این حالت نیز داریم $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

□

قضیه ۳.۴. *ابرساختار* $(\mathrm{L}, \odot)$ *یک ابرگروه تجمعی است.*

اثبات. بر طبق گزاره قبل ابرساختار $(\mathrm{L}, \odot)$ یک نیم‌ابرگروه است. بنابراین کافی است نشان دهیم که ابرعمل دارای خاصیت اصل تکثیر و تجمعی نیز صدق می‌کند. برای این منظور فرض کنید $x \in \mathrm{L}$. حالا داریم

$$\mathrm{L} = x \odot x^+ \subseteq x \odot \mathrm{L} = \mathrm{L} \odot x$$

پس خاصیت اصل تکثیر برقرار است. علاوه براین، چون

$$\{t \odot \overline{v_e} | t \in e \odot e = e\} \neq \{e \odot t | t \in e \odot \overline{v_e}\} = \{e \odot t | t \in \{e, \mu, \tau, \overline{v_e}, \overline{v_\mu}, \overline{v_\tau}\}\}.$$

لذا سه‌تایی $(e, e, \overline{v_e})$ یک سه‌تایی تجمعی است و بنابراین ابرعمل $\odot$ در خاصیت تجمعی نیز صدق می‌کند. □

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

نظریه ابرساختارهای جبری یکی از مباحثی است که در دهه‌های اخیر مورد توجه دانشمندان علوم مختلف قرار گرفته و تحقیقات ارزشمندی در این زمینه منتشر شده است. در این مقاله با استفاده از مفاهیم ابرساختارها، رده ابرگروه‌های به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر معرفی شد و مورد تحقیق قرار گرفت. با معرفی این رده از ابرساختارها نشان دادیم که ابرساختار برگرفته از فرآیند برهم‌کنش بین لپتون‌ها با در نظر گرفتن پایستگی اعداد لپتونی که برای اولین‌بار توسط موسوی‌نژاد و همکاران در [۱۶] معرفی شده است، تشکیل یک ابرگروه تجمعی می‌دهد. این ارتباط علاوه بر آنکه برقراری یک نظم نوین در انجام فرآیندها را نشان می‌دهد، این امکان را فراهم می‌آورد تا با استفاده از برقراری خاصیت شرکت‌پذیری در مجموعه لپتون‌ها، بتوان پیشگویی‌هایی از فرآیند برهم کنش عناصر این مجموعه انجام داد. رده ابرگروه‌های به‌طور تجمعی شرکت‌پذیر را می‌توان از دیدگاه نظریه ابرساختارها مورد مطالعه بیشتری قرار داد.

۶. تشکر و قدردانی

نویسندگان از زحمات داوران محترم این مقاله که با نظرات ارزشمند خود باعث بهبود کیفیت این مقاله گردیدند تشکر و قدردانی می‌کنند.

مراجع

[1] M. Al-Tahan and B. Davvaz, Algebraic hyperstructures associated to biological inheritance, *Math. Biosci.*, **285** (2017) 112–118.

[2] M. Al-Tahan and B. Davvaz, n-ary hyperstructures associated to the genotypes of F2-offspring, *Int. J. Biomath.*, **10** (2017) 17 pp.

[3] R. Bayon and N. Lygeros, Advanced results in enumeration of hyperstructures, *J. Algebra*, **320** (2008) 821–835.

[4] S. Chung, Chemical hyperstructures for Vanadium, *J. Chungcheong Math. Soc.*, **27** (2014) 309–317.

[5] S. D. Comer, Polygroups derived from cogroups, *J. Algebra*, **89** (1984) 397–405.

[6] P. Corsini, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, Tricesimo, 1993.

[7] P. Corsini and V. Leoreanu, *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academical Publications, Dordrecht, 2003.

[8] B. Davvaz, *Polygroup Theory and Related Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.

[9] B. Davvaz, Weak algebraic hyperstructures as a model for interpretation of chemical reactions, *Iranian J. Math. Chem.*, **7** (2016) 267–283.

[10] B. Davvaz, A. Dehghan Nezad and A. Benvidi, Chain reactions as experimental examples of ternary algebraic hyperstructures, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **65** (2011) 491–499.

[11] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad and A. Benvidi, Chemical hyperalgebra: Dismutation reactions, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, **67** (2012) 55–63.

[12] F. Jantani, M. Jafarpour and V. Leoreanu, On strongly associative (semi)hypergroups, *J. Indones. Math. Soc.*, **23** (2017) 43-53.

[13] F. Marty, Surune generalization de la notion de groupe, in *8th Congressc Math. Scandenaves*, Stockholm, Sweden, 1934, 45-49.

[14] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, Second ed., World Scientific Lecture Notes in Physics,**57**, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1998.

[15] T. Vougiouklis, Groups in hypergroups, *Ann. Discrete Math.*, **37** (1988) 459–467.

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127759.1419

[16] T. Vougiouklis, *Hyperstructures and Their Representations*, Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1994.

[۱۷] س. م. موسوی‌نژاد، م. اسلامی کلانتری، و ا. دهقان نژاد، تعمیم نظریه ابرساختارهای جبری به فیزیک بنیادی و فیزیک هسته‌ای، *مجله پژوهش فیزیک ایران*، **۱۱** (۱۳۹۰) ۴۲۹–۴۳۴.

حسین آقابزرگی
گروه ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج)، رفسنجان
h.aghabozorgi@vru.ac.ir

حسین آقابزرگی متولد فروردین ماه ۱۳۴۸ در شهر رفسنجان است. وی در سال ۱۳۶۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی دبیری دانشگاه شهید باهنر کرمان شد و در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض شد و در سال ۱۳۸۸ وارد دوره دکتری دانشگاه یزد شد و در سال ۱۳۹۱ دوره دکتری خود را تحت راهنمایی پروفسور بیژن دواز به پایان رساند و به عضو هیات علمی رسمی قطعی دانشگاه ولی عصر عج رفسنجان درآمد و اکنون استادیار گروه ریاضی دانشگاه ولی عصر (عج) می‌باشد.

مرتضی جعفرپور
گروه ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج)، رفسنجان
m.j@vru.ac.ir

مرتضی جعفرپور متولد خرداد ماه ۱۳۵۴ در شهر تهران است. وی در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان شد. در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی ارشد دانشگاه تربیت معلم تهران در گرایش جبر گردید. در سال ۱۳۸۵ دوره دکتری دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان در گرایش ابرساختارهای جبری و کاربرد آنها تحت راهنمایی دکتر سید شاهین موسوی آغاز نمود و در سال ۱۳۹۰ موفق به اخذ مدرک دکتری گردید. اکنون وی دانشیار گروه ریاضی دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان می‌باشد