

کران برای نرخ رشد اتصال‌ها

رسول آهنگری ملکی* و تیرداد شریف

چکیده. فرض کنید K یک میدان، R یک K -جبر مدرج استاندارد و M یک R -مدول مدرج و متناهی مولد باشد. نرخ رشد M را با $\text{rate}_R(M)$ نشان می‌دهیم که اندازه‌ای برای نرخ رشد انتقال‌ها در تحلیل آزاد مینیمال مدرج مدول M است. در این مقاله رفتار این ناوردان نسبت به تغییر حلقه بررسی شده است. همچنین نرخ رشد برای جبرهای آرتینی کشیده به‌طور دقیق مشخص می‌شود. علاوه بر این کران بالایی برای نرخ رشد حاصل ضرب تانسوری دو مدول را برحسب نرخ رشد هریک از مدول‌ها تعیین شده است.

۱. مقدمه

ایده وابسته کردن یک تحلیل آزاد به یک مدول متناهی مولد را اولین بار هیلبرت^۱ در سال‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۸۳ معرفی کرد. از یک منظر، ساختن یک تحلیل آزاد مینیمال برای یک مدول متناهی مولد را می‌توان همچون حل یک سری از دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای‌ها در نظر گرفت. بنابراین خواص و پیچیدگی‌های هر مدول را می‌توان با استفاده از ساختار تحلیل آزاد مینیمال آن و ناورداهایی که از این تحلیل آزاد به‌دست می‌آید، مورد مطالعه قرار داد. در این مقاله ما یکی از ناورداهای مهم به‌نام ناوردای نرخ رشد را که از تحلیل مینیمال آزاد یک مدول به‌دست می‌آید مطالعه می‌کنیم. این ناوردا ابزاری برای اندازه‌گیری شیب رشد درجه چندجمله‌ای‌های ظاهرشده در حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای‌های اشاره‌شده در بالا است. در ادامه ما به‌طور دقیق‌تر درباره این ناوردا صحبت خواهیم کرد. فرض کنیم K یک میدان و R یک K -جبر مدرج استاندارد باشد. به ازای R -مدول مدرج متناهی مولد M ناورداهای مختلفی را می‌توان به M وابسته کرد. یکی از آن‌ها ناوردای کاستلنوو-مامفورد^۲ است که با نماد $\text{reg}_R(M)$ نشان می‌دهیم. این ناوردا یک ابزار اندازه‌گیری برای پیچیدگی تحلیل آزاد مینیمال مدرج مدول فراهم می‌کند. ناوردای نظم یک مدول ممکن است نامتناهی باشد. آورامف^۳ و پیوا^۴ در [۴] نشان دادند که $\text{reg}_R(K)$ صفر یا نامتناهی است. K -جبر R را کُسل^۵ نامند هرگاه $\text{reg}_R(K) = \infty$. جبرهای کُسل در برخی موارد خواص همولوژیکی مشابه

عبارات و کلمات کلیدی: نرخ رشد، عدد نظم، جبر کُسل، تحلیل آزاد مینیمال

دبیر تخصصی رابط: جواد اسداللهی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۲۳

نوع مقاله: پژوهشی

*نویسنده مسئول مقاله

<http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.127724.1418>

¹Hilbert ²Castelnuovo-Mumford regularity ³Avramov ⁴Peeva ⁵Koszul

حلقه‌های چندجمله‌ای‌ها روی یک میدان دارند. به عنوان مثال، آورامف و آیزنبا^۶ در [۳] نشان دادند که اگر R کسول باشد، آنگاه عدد نظم هر R -مدول مدرج با تولید متناهی، متناهی است.

ناوردای دیگری که به مدول‌های مدرج متناهی مولد نسبت داده می‌شود ناوردای نرخ رشد است. نرخ رشد^۷ یک K -جبر مدرج R را که با $\text{Rate}(R)$ نشان می‌دهیم، باکلین^۸ در [۵] برای مطالعه خاصیت کسول بودن R معرفی کرد. نرخ رشد هر جبر همیشه متناهی است و همواره داریم $\text{Rate}(R) \geq 1$. در این نامساوی تساوی برقرار است اگر و تنها اگر R کسول باشد. با استفاده از این مفهوم باکلین نشان داد که زیرجبر ورونس^۹ $R^{(c)} = \bigoplus_{i \geq 0} R_{ic}$ برای همه c های به اندازه کافی بزرگ جبری کسول است. آراموا^{۱۰}، بارکانسکو^{۱۱} و هرتسوک^{۱۲} در [۱] نتیجه باکلین را برای مدول‌ها گسترش دادند. آنها مفهوم نرخ رشد را برای یک R -مدول M تعریف کردند که آن را با $\text{rate}_R(M)$ نشان می‌دهیم. اگر m ایده‌آل همگن ماکسیمال R باشد، آنگاه $\text{Rate}(R) = \text{rate}(m(1))$.

در این مقاله، ناوردای نرخ رشد مدول‌های مدرج را مطالعه خواهیم کرد و کران‌های بالای مناسبی برای نرخ رشد مدول‌ها روی رده خاصی از حلقه‌های مدرج ارائه می‌دهیم.

مطالب این مقاله به صورت زیر تنظیم شده است. در فصل اول، مفاهیم کلی و اطلاعات اولیه مورد نیاز در فصل‌های بعد را آورده‌ایم. در فصل دوم، رفتار ناوردای نرخ رشد مدول‌ها نسبت به تغییر حلقه را مطالعه می‌کنیم. فرض کنید $\varphi: R \rightarrow S$ یک همریختی پوشا از K -جبرهای مدرج باشد و M یک S -مدول مدرج متناهی مولد باشد. در مقاله [۱، گزاره ۱، ۲] رفتار نرخ رشد نسبت به تغییر حلقه‌ها بررسی شده است. آنها نشان داده‌اند که

$$\text{rates}(M) \leq \max\{\text{rate}_R(M), \text{rate}_R(S)\}.$$

اما می‌توان دید که اثبات آنها تنها وقتی که مدول M مدرج نامنفی است صحیح است. در قضیه ۲.۳ یک کران بالا برای نرخ رشد M به عنوان یک R -مدول به دست می‌آوریم. به بیان دقیق‌تر، نشان می‌دهیم

$$\text{rate}_R(M) \leq \max\{\text{rates}_S(M), \text{rate}_R(S)\} + \max\{0, t^S_*(M)\},$$

که در آن $t^S_*(M)$ بزرگترین درجه مولدهای مینیمال M به عنوان یک S -مدول مدرج است. همچنین در قضیه ۴.۳ برای یک جبر کسول R ، تساوی زیر را ثابت می‌کنیم

$$\text{rate}_R(mM) = \max\{d + 2, \text{rate}(M)\},$$

که در آن m ایده‌آل همگن ماکسیمال R و M یک R -مدول مدرج متناهی مولد است که توسط عناصر درجه $d \geq 0$ تولید شده است و $mM \neq 0$.

هدف اصلی فصل سوم، مطالعه نرخ رشد روی رده خاصی از حلقه‌های مدرج به نام حلقه‌های کشیده^{۱۳} است. حلقه موضعی و نوتری یا مدرج استاندارد را کشیده نامیم هرگاه توان دوم ایده‌آل همگن ماکسیمال آن توسط یک عضو تولید شود. مفهوم حلقه‌های کشیده را سالی^{۱۴} در مقاله [۱۱] معرفی کرد. او توانست ایده‌آل تعریف یک حلقه گرنشتاین آرتینی موضعی (غیر مدرج) را تعیین کند. ما نرخ رشد K -جبرهای مدرج استاندارد آرتینی کشیده R را با فرض اینکه میدان K جبری بسته باشد مطالعه می‌کنیم. برای این نوع حلقه‌ها سری هیلبرت به صورت زیر است

$$H_R(z) = 1 + hz + z^2 + \dots + z^s.$$

⁶Eisenbud ⁷rate ⁸Backelin ⁹Veronese subalgebra ¹⁰Aramova ¹¹Bărcănescu ¹²Herzog ¹³stretched ¹⁴Sally

در قضیه ۲.۴، نشان می‌دهیم که اگر $h \geq 2$ و $s \geq 3$ آنگاه $\text{Rate}(R) = s$. به بیان دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که ایده‌آل تعریف این حلقه‌ها همان ایده‌آل الفبایی^{۱۵} تابع هیلبرت حلقه R است. باکلین و فروبرگ^{۱۶} در [۶] نشان دادند که ضرب تانسوری دو جبر کُسل یک جبر کُسل است. این نتیجه را در فصل آخر برای مدول‌ها از طریق پیدا کردن کران بالا برای نرخ رشد حاصل ضرب تانسوری دو مدول توسیع می‌دهیم. به بیان دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که اگر R و S دو K -جبر مدرج، $T = R \otimes_K S$ ، M و N به ترتیب R و S -مدول مدرج متناهی مولد باشند، آنگاه

$$\text{rate}_T(M \otimes_K N) \leq \max\{\text{rate}_R(M), \text{rate}_S(N)\}.$$

۲. مفاهیم و مقدمات اولیه درباره نرخ رشد

در این فصل تعریف‌های مفاهیم و مقدمات اولیه‌ای را که در فصل‌های بعد استفاده خواهد شد می‌آوریم. در سراسر این مقاله K نشان‌دهنده یک میدان است. همچنین تمامی مدول‌ها متناهی مولد در نظر گرفته می‌شوند. فرض کنیم $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ یک K -جبر مدرج استاندارد باشد یعنی $\dim_K R_i < \infty$ و $R = K[R_1]$. ایده‌آل مدرج ماکسیمال R را با $\mathfrak{m}$ نشان می‌دهیم. اگر $\dim_K R_1 = n$ و $x_1, \dots, x_n$ یک پایه برای R_1 باشد، آنگاه نگاشت پوشای

$$\phi : K[X_1, \dots, X_n] \rightarrow R$$

که $\phi(X_i) = x_i$ برای هر i ، یک همریختی پوشا از جبرهای مدرج تعریف می‌کند. لذا برای یک ایده‌آل همگن I از حلقه چندجمله‌ای‌های $K[X_1, \dots, X_n]$ وجود دارد که

$$R \cong K[X_1, \dots, X_n]/I.$$

ایده‌آل I را یک ایده‌آل تعریف R نامیم.

فرض کنیم $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ یک R -مدول متناهی مولد باشد. برای هر $d \in \mathbb{Z}$ منظور از نماد $M(d)$ یعنی R -مدول مدرجی که $M(d)_p = M_{d+p}$ برای هر $p \in \mathbb{Z}$ فرض کنید

$$\mathbf{F} : \cdots F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

تحلیل آزاد مینیمال مدرج M باشد. در چنین تحلیلی هر F_i با جمع مستقیم نسخه‌هایی از $R(-j)$ ‌ها که در آن $j \in \mathbb{Z}$ ، یکریخت است. برای همه $j \in \mathbb{Z}$ و $i \in \mathbb{N}$ ، تعداد نسخه‌های $R(-j)$ که در F_i ظاهر می‌شود یک ناوردا برای M است که آن را i -امین عدد بتی M گویند و با $\beta_{ij}^R(M)$ نشان می‌دهند. همچنین، بنابر تعریف i -امین عدد بتی M به عنوان یک R -مدول را با $\beta_i^R(M)$ نشان می‌دهند و برابر است با مرتبه مدول آزاد F_i . اعداد بتی را می‌توان با استفاده از روابط زیر نیز محاسبه کرد.

$$\beta_i^R(M) = \dim_K \text{Tor}_i^R(M, K)$$

و

$$\beta_{ij}^R(M) = \dim_K \text{Tor}_i^R(M, K)_j.$$

اگر $\beta_i^R(M) \neq 0$ آنگاه عدد $t_i^R(M)$ را به صورت

$$t_i^R(M) := \max\{j : \beta_{ij}^R(M) \neq 0\}$$

¹⁵lexsegment ¹⁶ Fröberg

تعریف می‌کنیم. در غیر این صورت $t_i^R(M)$ را $-\infty$ تعریف می‌کنیم. در واقع این عدد با بزرگترین درجه مولدهای مینیمال i -امین اتصال مدول M برابر است. عدد نظم کاستلنوتوو-مامفورد مدول M به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{reg}_R(M) := \sup\{t_i^R(M) - i : i \in \mathbb{N}_0\}.$$

تعریف ۱.۲. فرض کنیم مدول M توسط عناصر درجه صفر تولید شده باشد. در این صورت گوییم این مدول دارای تحلیل خطی است هرگاه $\text{reg}_R(M) = 0$.

جبر R را کُسل نامیم هرگاه K به عنوان یک R -مدول دارای تحلیل آزاد خطی باشد.

عدد نظم کاستلنوتوو-مامفورد نقش مهمی در مطالعه خواص همولوژیکی یک مدول M دارد. از آنجا که طول یک تحلیل آزاد مینیمال ممکن است نامتناهی باشد، پس از تعریف روشن است که $\text{reg}_R(M)$ می‌تواند نامتناهی باشد. آورامف و پیوا در [۴] ثابت کردند که $\text{reg}_R(K)$ صفر یا نامتناهی است. همچنین آورامف و آیزنبا در [۲] نشان دادند که اگر R کُسل باشد، آنگاه عدد نظم هر R -مدول مدرج متناهی مولد باز متناهی است.

ناوردای مهم دیگری که به یک مدول مدرج وابسته می‌شود نرخ رشد مدول است. این مفهوم را اولین بار باکلین در [۵] برای جبرهای مدرج تعریف کرد. پس از آن مفهوم نرخ رشد در [۱] برای مدول‌ها توسعه داده شد.

تعریف ۲.۲. نرخ رشد باکلین برای R برابر است با

$$\text{Rate}(R) := \sup\{(t_i^R(K) - 1)/i - 1 : i \geq 2\}$$

و توسعه این مفهوم برای مدول‌ها به این صورت است

$$\text{rate}_R(M) := \sup\{t_i^R(M)/i : i \geq 1\},$$

که در آن M یک R -مدول مدرج است.

با مقایسه‌ای ساده با تعریف نرخ رشد باکلین می‌توان دید که $\text{Rate}(R) = \text{rate}_R(m(1))$. با توجه با نمادگذاری‌های بالا داریم $\text{rate}_R(R) = -\infty$. همچنین ثابت می‌شود که نرخ رشد یک مدول M همواره متناهی است. (منبع [۱، ۳، ۱] را ببینید).

تبصره ۱.۲. با استفاده از تعریف داریم

$$\text{Rate}(R) \geq 1.$$

در نامساوی فوق تساوی برقرار است اگر و تنها اگر R کُسل باشد. بنابراین $\text{Rate}(R)$ را می‌توان یک اندازه برای میزان دور بودن جبر R از کُسل بودن لحاظ کرد. همچنین برای یک مدول M که توسط عناصر درجه صفر تولید شده است داریم

$$\text{rate}_R(M) \geq 1.$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر M دارای یک تحلیل آزاد خطی باشد؛ به بیان دیگر هرگاه $\text{reg}_R(M) = 0$.

تبصره ۲.۲. فرض کنیم R یک K -جبر مدرج استاندارد باشد و $\dim R_1 = n$. در این صورت داریم

$$R \cong Q/I,$$

که در آن $Q = k[X_1, \dots, X_n]$ یک حلقه چند جمله‌ای‌ها و I یک ایده آل همگن است که عضو همگن از درجه یک ندارد. در این صورت ایده‌آل I را یک ایده‌آل تعریف R نامیم. نماد $m(J)$ را برای بزرگترین درجه مولدهای مینیمال یک ایده‌آل همگن J در Q به کار می‌بریم. با استفاده از حالت مدرج [۸، ۲، ۳، ۲]. داریم $t_1^R(K) = m(I)$ ، بنابراین رابطه زیر را داریم

$$(۱) \quad \text{Rate}(Q/I) \geq m(I) - ۱.$$

۳. تغییر حلقه

در این فصل رفتار نرخ رشد یک مدول مدرج را نسبت به تغییر حلقه‌ها بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۳. (لم ۲، ۲، [۷]). فرض کنیم

$$\cdots \rightarrow L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\partial_0} L \rightarrow 0.$$

یک دنباله دقیق از R -مدول‌ها و همریختی‌های همگن باشد. در این صورت برای هر $n \geq 0$ داریم

$$t_n^R(L) \leq \max\{t_{n-i}^R(L_i) : 0 \leq i \leq n\}.$$

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $\varphi: R \rightarrow S$ یک همریختی همگن و پوشا از K -جبرهای مدرج استاندارد باشد. همچنین فرض کنیم M یک S -مدول مدرج باشد. در این صورت داریم

$$\text{rate}_R(M) \leq \max\{\text{rate}_S(M), \text{rate}_R(S)\} + \max\{0, t_0^S(M)\}.$$

اثبات. فرض کنیم

$$\mathbf{F}: \cdots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

تحلیل آزاد مینیمال M به عنوان یک S -مدول باشد. با به کارگیری لم ۱.۳ برای $\mathbf{F}$ داریم

$$t_n^R(M) \leq \max\{t_n^R(F_n), t_1^R(F_{n-1}), \dots, t_n^R(F_0)\}.$$

توجه شود که

$$t_i^R(F_j) = t_i^R(\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} S(-r)^{\beta_{jr}^S(M)}) = t_i^R(S) + t_j^S(M).$$

به‌ویژه چون $t_0^R(S) = 0$ ، داریم $t_j^R(F_j) = t_j^S(M)$. بنابراین برای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$(۲) \quad \frac{t_n^R(M)}{n} \leq \max \left\{ \frac{t_n^S(M)}{n}, \frac{t_1^R(S) + t_{n-1}^S(M)}{n}, \dots, \frac{t_n^R(S) + t_0^S(M)}{n} \right\}.$$

تعریف کنید $a = \max\{\text{rate}_R(S), \text{rate}_S(M)\}$ ، در نتیجه برای هر $j > 0$ داریم $t_j^S(M) \leq aj$ و $t_j^R(S) \leq aj$. حال با استفاده از (۲) داریم

$$\frac{t_n^R(M)}{n} \leq \max\{a, a + t_0^S(M)\}$$

□

و از اینجا نامساوی مطلوب ما نتیجه می‌شود.

نتیجه ۳.۳. فرض کنیم شرایط قضیه فوق برقرار باشد. اگر M با عناصر درجه صفر تولید شود و $\text{rate}_R(S) = ۱$ ، آنگاه

$$\text{rate}_R(M) = \text{rate}_S(M).$$

اثبات. در $[۱, ۲]$ گزاره $[۱, ۲]$ رفتار نرخ رشد نسبت به تغییر حلقه‌ها بررسی شده است و ثابت شده است که اگر M با عناصر درجه صفر تولید شود، آنگاه

$$\text{rate}_S(M) \leq \max\{\text{rate}_R(M), \text{rate}_R(S)\}.$$

بنابر فرض، چون $\text{rate}_R(S) = ۱$ داریم

$$\text{rate}_S(M) \leq \text{rate}_R(M).$$

حال با توجه به فرض‌ها با به‌کارگیری قضیه قبل خواهیم داشت

$$\text{rate}_R(M) \leq \text{rate}_S(M).$$

لذا دو نامساوی فوق تساوی مطلوب

$$\text{rate}_R(M) = \text{rate}_S(M)$$

□

را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۴.۳. فرض کنید R یک حلقه کُسل با ایده‌آل ماکسیمال همگن m و M یک R -مدول مدرج که با عناصر درجه $d \geq ۰$ تولید می‌شود و $mM \neq ۰$. در این صورت داریم

$$\text{rate}_R(mM) = \max\{d + ۲, \text{rate}(M)\}.$$

اثبات. با به‌کارگیری دنباله دقیق کوتاه

$$۰ \rightarrow mM \rightarrow M \rightarrow M/mM \rightarrow ۰$$

به ازای هر $i > ۰$ و هر عدد صحیح j دنباله دقیق

$$\text{Tor}_{i+1}^R(M/mM, K)_j \rightarrow \text{Tor}_i^R(mM, K)_j \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, K)_j \rightarrow \text{Tor}_i^R(M/mM, K)_j$$

حاصل می‌شود. با استفاده از این دنباله دقیق، نامساوی‌های

$$(۳) \quad t_i^R(mM) \leq \max\{t_i^R(M), t_{i+1}^R(M/mM)\}$$

و

$$(۴) \quad t_i^R(M) \leq \max\{t_i^R(mM), t_i^R(M/mM)\}$$

به دست می‌آید. حال چون $mM \neq ۰$ و M با عناصر درجه $d \geq ۰$ تولید می‌شود، به ازای یک عدد طبیعی s داریم $M/mM \cong K^s(-d)$. چون R کُسل است، لذا برای هر $۰ \leq j \leq \text{pd}_R(K)$ داریم $t_j(M/mM) = d + j$. در نتیجه برای هر $i > ۰$ خواهیم داشت

$$(۵) \quad t_i^R(mM)/i \leq \max\{t_i^R(M)/i, (i + d + ۱)/i\}.$$

از طرف دیگر چون mM ، توسط عناصر درجه $d + 1$ تولید می‌شود و لذا برای هر $i \leq \text{pd}_R mM$ داریم

$$t_i^R(mM) \geq d + 1 + i$$

لذا با استفاده از (۴) برای هر $i \leq \text{pd}_R mM$ خواهیم داشت

$$(۶) \quad \max\{d + 1 + i/i, t_i^R M/i\} \leq t_i^R(mM)/i.$$

حال با ترکیب (۵) و (۶) و به‌کارگیری تعریف نرخ رشد، تساوی مطلوب

$$\text{rate}_R(mM) = \max\{d + 1, \text{rate}(M)\}$$

□

حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۳. فرض کنید شرایط قضیه ۴.۳ برقرار باشد. در این صورت

$$(۱) \quad \text{rate}_R(m^s M) = \max\{d + 1 + s, \text{rate}(M)\} \text{ داریم } m^s M \neq 0 \text{ که } s > 0$$

$$(۲) \quad \text{rate}_R(m^s M) = d + 1 + s \text{ داریم } s \geq \text{rate}(M) - d - 1 \text{ اگر } m^s M \neq 0$$

اثبات. حکم (۱) به‌سادگی با استقرا روی s و به‌کارگیری قضیه ۴.۳ نتیجه می‌شود. حکم (۲) نیز نتیجه‌ای مستقیم

□

از (۱) است.

۴. نرخ رشد جبرهای کشیده

حلقه موضعی آرتینی (A, p) با ایده‌آل ماکسیمال p را کشیده نامیم هرگاه p^2 توسط یک عنصر تولید شود. حلقه‌های کشیده را سالی در [۱۱] معرفی کرد. او توانست ساختار حلقه‌های آرتینی گرنشتاین کشیده را که خارج قسمت یک حلقه منظم موضعی هستند مشخص کند. او نشان داد که تنها یک رده از حلقه‌های آرتینی گرنشتاین کشیده وجود دارد. فرض کنیم (Q, q) یک حلقه منظم موضعی از بعد کرول h باشد. فرض کنیم $A = Q/I$ که $I \subseteq q^2$ یک حلقه آرتینی گرنشتاین کشیده با ایده‌آل ماکسیمال p باشد به‌طوری‌که مشخصه A/p مخالف ۲ و همچنین $p^{s+1} = 0$ و $p^s \neq 0$ سالی نشان داد $A \cong Q/J$ که

$$J = (z_i z_j : i \neq j, z_h^s - u_i z_i^2 : 1 \leq i, j \leq h - 1).$$

در اینجا $z_1, \dots, z_h$ مولدهای مینیمال ایده‌آل q و u_i ها یکال‌اند.

در قضیه بعد حلقه‌های کشیده آرتینی مدرج را مطالعه و ساختار و نرخ رشد این حلقه را به‌طور کامل مشخص می‌کنیم. دقت کنید که سری هیلبرت جبرهای مدرج کشیده به شکل زیر است:

$$H_R(z) = 1 + hz + z^2 + \dots + z^s,$$

که در آن $s \geq 1$. اگر $s = 1$ ، آنگاه R یک حلقه کُسل است. در حالت $s = 2$ ، حلقه R گرنشتاین است و همان‌طوری که اشاره شد، این حالت را سالی به‌طور کامل مشخص کرده است. لذا حالتی را که $s \geq 3$ بررسی خواهیم کرد.

تعریف و تبصره ۱.۴. فرض کنیم $Q = K[X_1, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} Q_d$ حلقه چندجمله‌ای‌ها روی میدان K باشد که به صورت استاندارد مدرج شده است. یعنی برای هر $X_i, i = 1, \dots, n$ از درجه یک است. در این صورت

(۱) نماد $Mon_d(Q)$ را برای مجموعه تمام تک جمله‌ای‌ها از درجه d به کار می‌بریم و نماد $<_{lex}$ را برای ترتیب الفبایی استفاده می‌کنیم. یک زیرمجموعه $L \subseteq Mon_d(Q)$ را الفبایی نامیم هرگاه برای هر $u \in L$ و هر $v \in Mon_d(Q)$ که $u <_{lex} v$ داشته باشیم $v \in L$. یک ایده‌آل تک جمله‌ای I را الفبایی نامیم هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت d تمام تک جمله‌ای‌های از درجه d در I یک مجموعه الفبایی از تک جمله‌ای‌ها باشد.

(۲) فرض کنیم $R = Q/I = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ -جبر استاندارد باشد با تابع هیلبرت

$$H(R)(d) := \dim_K(R_d).$$

مکولی [۱۰] نشان داد که برای هر $d \geq 0$ اگر $H(R)(d)$ تای اول از تک جمله‌ها (با ترتیب الفبایی) را از S_d کنار بگذاریم، آنگاه بقیه تک جمله‌ای‌ها یک ایده‌آل الفبایی J با خاصیت

$$H(Q/J) = H(R)$$

تولید می‌کنند. چون J به صورت یکتا توسط تابع هیلبرت $H(R)$ تعیین می‌شود، آنرا ایده‌آل الفبایی وابسته به این تابع هیلبرت نامند و با نماد $Lex(H(R))$ نشان می‌دهند.

لم زیر در اثبات قضیه اصلی این فصل مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

لم ۱.۴. فرض کنیم R یک K -جبر آرتینی مدرج استاندارد و $t \geq 1$ یک عدد صحیح باشد به طوری که $R_i = 0$ برای تمام $i \geq t$. در این صورت برای یک R -مدول مدرج نامنفی M داریم

$$\text{rate}_R(M) \leq t^R(M) + t - 1.$$

اثبات. فرض کنیم

$$\mathbf{F} : \cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0.$$

تحلیل آزاد مدرج مینیمال M باشد. به استقرا روی عدد صحیح $n \geq 0$ نشان می‌دهیم که

$$t_n^R(M) \leq n(t - 1 + t^R(M)).$$

به وضوح حکم برای $n = 0$ برقرار است. حال فرض کنیم $n > 0$ و همچنین فرض کنیم حکم برای مقادیر کمتر از n برقرار باشد. اگر e یک عضو همگن از پایه مدول آزاد F_n باشد که $\deg(e) = t_n^R(M)$ ، آنگاه برای برخی $\alpha_i \in R$ داریم

$$0 \neq \partial_n(e) = \sum_{i=1}^b \alpha_i \epsilon_i$$

که در آن b برابر مرتبه مدول آزاد F_{n-1} و $\{\epsilon_i : 1 \leq i \leq b\}$ یک پایه برای F_{n-1} است. حال با به کارگیری فرض استقرا داریم

$$\begin{aligned} t_n^R(M) = \deg(e) = \deg(\partial_n(e)) &= \deg(\alpha_i) + \deg(\epsilon_i) \\ &\leq t - 1 + t_{n-1}^R(M) \\ &\leq t - 1 + (n - 1)(t - 1 + t^R(M)) \\ &\leq n(t - 1 + t^R(M)). \end{aligned}$$

□

با استفاده از این نامساوی و تعریف نرخ رشد حکم اثبات می‌شود.

قضیه ۲.۴. فرض کنیم $h \geq 2$ و $s \geq 3$ اعداد صحیح و R یک جبر مدرج استاندارد روی میدان جبری بسته K با سری هیلبرت $H_R(z) = 1 + hz + z^2 + \dots + z^s$ باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرارند:

$$\tau(R) := \dim_K(\circ : R_1) = h \quad (1)$$

$$\text{Rate}(R) = s \quad (2)$$

$$J = \text{Lex}(H(R)) \text{ که در آن } R \cong K[X_1, \dots, X_h]/J \quad (3)$$

اثبات. چون R مدرج استاندارد است برای هر $1 \leq i \leq s-1$ داریم $R_1 R_i = R_{i+1} \neq \circ$. در نتیجه $\tau(R) \leq h$. چون $h = \dim R_1 > \dim R_2 = 1$ با استفاده از [۹، لم ۲.۸]، یک عنصر غیرصفر درجه یک l چنان وجود دارد که $l^2 = \circ$. اگر $(\circ : R_1)$ آنگاه $l \notin (\circ : R_1)$. لذا باید داشته باشیم $lR_1 = R_2$. بنابراین

$$R_2 = R_1 R_2 = R_1(lR_1) = lR_2 = l(lR_1) = \circ,$$

که این تناقض است. بنابراین $l \in (\circ : R_1)$. از طرف دیگر داریم $R_1 R_s = R_{s+1} = \circ$ ، لذا همواره

$$\circ \neq R_s \subseteq (\circ : R_1)$$

در نتیجه داریم

$$\dim(\circ : R_1) \geq 2. \quad (V)$$

ادعا می‌کنیم که

$$(\circ : R_1) = (l) : R_1. \quad (A)$$

به‌وضوح داریم $(\circ : R_1) \subseteq (l) : R_1$. فرض کنیم $x \in (l) : R_1$ یک عنصر همگن از درجه $i > \circ$ باشد. در این صورت داریم $xR_1 \subseteq lR_i = lR_1(R_{i-1}) = \circ$. بنابراین $x \in (\circ : R_1)$ و بدین ترتیب ادعا ثابت می‌شود. فرض کنیم $R \cong K[X_1, \dots, X_h]/I$ یک نمایش مینیمال R باشد، که در آن I یک ایده‌آل همگن است. با به‌کارگیری (۸) می‌توان دید که

$$H_{R/lR}(z) = 1 + (h-1)z + z^2 + \dots + z^s.$$

اگر $h = 2$ آنگاه داریم

$$R/lR \simeq K[x]/(x^{s+1}).$$

لذا خواهیم داشت $m(I) \geq s+1$ از طرف دیگر بنابر فرض برای هر $i \geq s+1$ داریم $R_i = \circ$. لذا با به‌کارگیری لم ۱.۴ و (۱) در تبصره ۲.۲ خواهیم داشت

$$m(I) - 1 \leq \text{Rate}(R) \leq s.$$

حال چون $m(I) \geq s+1$ می‌توان نتیجه گرفت که $\text{Rate}(R) = s$. بنابراین حکم (۲) در این حالت ثابت می‌شود. همچنین در حالت $h = 2$ ، با توجه به (۷) به‌وضوح داریم $\tau(R) = 2$. حال فرض کنیم $h > 2$ و همچنین فرض کنیم حکم (۱) و (۲) به استقرا روی h ، برای مقادیر کمتر از h برقرار باشد. به‌علاوه به استقرا فرض می‌کنیم که برای ایده‌آل تعریف I داریم $m(I) \geq s+1$.

همان‌طوری که در بالا ثابت کردیم

$$H_{R/lR}(z) = 1 + (h-1)z + z^2 + \dots + z^s$$

و لذا جبر $\bar{R} = R/lR$ یک جبر کشیده است. بنابراین طبق فرض استقرا داریم $\tau(R/lR) = h - 1$. توجه شود که $(\bar{R} : \bar{R}) = \{x + lR : x \in (l) : R_1\} = (l) : R_1$ چون $l \in (0 : R_1)$ نتیجه می‌شود که

$$\tau(R/lR) = \tau(R) - 1.$$

بنابراین $\tau(R) = h$ دقت کنید که $R_s \subseteq (0 : R_1)$ حال فرض کنیم I' یک ایده‌آل تعریف R/lR باشد. بنابر فرض استقرا داریم $m(I') = s + 1$ لذا به‌وضوح داریم $m(I) \geq s + 1$. با به‌کارگیری لم ۱.۴ و (۱) در تبصره ۲.۲ خواهیم داشت

$$m(I) - 1 \leq \text{Rate}(R) \leq s.$$

بنابراین حکم (۲) ثابت می‌شود.

حالا فرض کنیم عدد صحیح i وجود داشته باشد که $1 < i < s$ و $R_i \cap (0 : R_1) \neq (0)$ چون $\dim R_i = 1$ خواهیم داشت $R_{i+1} = R_1 R_i = (0)$ که تناقض است. لذا برای هر $1 < i < s$ داریم $R_i \cap (0 : R_1) = (0)$. بنابراین $(0 : R_1) \subseteq R_1 + R_s$ و چون $\tau(R) = h$ داریم $\dim_K (0 : R_1) \cap R_1 = h - 1$ حال فرض کنیم $x_1, \dots, x_{h-1} \in (0 : R_1) \cap R_1$ و $x_h \in R_1$ چنان باشند که $x_1, \dots, x_h$ پایه‌ای برای R_1 باشد. بنابراین روابط زیر در R برقرار است:

$$x_i x_j = 0, \quad x_h^{s+1} = 0, \quad (1 \leq i \leq h-1, 1 \leq j \leq h)$$

در حلقه چندجمله‌ای‌های $K[X_1, \dots, X_h]$ ایده‌آل

$$J = (X_i X_j, X_h^{s+1} : 1 \leq i \leq h-1, 1 \leq j \leq h).$$

یک ایده‌آل الفبایی است. به راحتی می‌توان دید که نگاشت $Q = K[X_1, \dots, X_h] \rightarrow R$ که برای هر i متغیر X_i را به x_i می‌نگارد، یک همریختی همگن پوشا با هسته J است. لذا $R \cong Q/J$ و در نتیجه $J = \text{Lex}(H(R))$.

□

تبصره ۱.۴. از قضیه فوق نتیجه می‌شود که اگر $h \geq 2$ و $s \geq 3$ اعداد صحیح و K یک میدان جبری بسته باشند، آنگاه با تقریب تکریختی تنها یک K -جبر مدرج استاندارد با سری هیلبرت $H(z) = 1 + hz + z^2 + \dots + z^s$ وجود دارد.

۵. نرخ رشد حاصل ضرب تانسوری مدول‌ها

در این فصل کران بالایی برای نرخ رشد حاصل ضرب تانسوری مدول‌های مدرج برحسب نرخ رشد هر یک از مدول‌ها به دست می‌آوریم.

لم ۱.۵. فرض کنیم R و S دو K -جبر مدرج استاندارد باشند و M و N دو مدول مدرج متناهی مولد به ترتیب روی R و S باشند. قرار دهیم $T := R \otimes_K S$. در این صورت

$$t_n^T(M \otimes_K N) = \max\{t_i^R(M) + t_j^S(N) : i, j \geq 0, i + j = n\}.$$

اثبات. فرض کنیم

$$\mathbf{F} : \dots \rightarrow F_i \rightarrow F_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow F.$$

و

$$\mathbf{G} : \dots \rightarrow G_j \rightarrow G_{j-1} \rightarrow \dots \rightarrow G.$$

به ترتیب تحلیل‌های آزاد مدرج مینمال M و N باشند. نشان می‌دهیم که $\mathbf{F} \otimes_K \mathbf{G}$ یک تحلیل آزاد مینمال برای $M \otimes_K N$ به عنوان یک T -مدول است. توجه کنید که $H_*(\mathbf{F} \otimes_K \mathbf{G}) \cong M \otimes_K N$. نگاشت کونس^{۱۷} را در نظر می‌گیریم:

$$K^{\mathbf{FG}} : H(\mathbf{F}) \otimes_K H(\mathbf{G}) \longrightarrow H(\mathbf{F} \otimes_K \mathbf{G})$$

$$K^{\mathbf{FG}}(cls(a) \otimes cls(b)) = cls(a \otimes b)$$

چون K یک میدان است لذا $H(\mathbf{F})$ یک K -مدول آزاد است. در نتیجه بنابر قضیه کونس $K^{\mathbf{FG}}$ نگاشت یک تکریمتی است. (به عنوان مثال [۲، گزاره ۱،۳،۴] را ببینید). بنابراین $\mathbf{F} \otimes_K \mathbf{G}$ یک تحلیل آزاد مدرج برای $M \otimes_K N$ است. دقت کنید که ایده‌آل همگن ماکسیمال T برابر است با $T_+ = R_+ \otimes_K S \oplus R \otimes_K S_+$ که در آن R_+ و S_+ به ترتیب ایده‌آل‌های همگن ماکسیمال R و S هستند. فرض کنید $i, j, n \geq 0$ ، اعداد صحیح باشند که $i + j = n$. اگر $a \in F_i$ و $b \in G_j$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \partial^{\mathbf{F} \otimes_K \mathbf{G}}(a \otimes b) &= \partial^{\mathbf{F}}(a) \otimes b \pm a \otimes \partial^{\mathbf{G}}(b) \\ &\in R_+ F_{i-1} \otimes_K G_j \oplus F_i \otimes_K S_+ G_{j-1} \\ &\subseteq T_+(F_{i-1} \otimes_K G_j \oplus F_i \otimes_K G_{j-1}). \end{aligned}$$

بنابراین $\mathbf{F} \otimes_K \mathbf{G}$ مینمال است.

فرض کنید $r, s \geq 0$ و $F_r = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R(-i)^{\beta_{ri}^R(M)}$ و $G_s = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{sj}^S(N)}$. چون

$$(\mathbf{F} \otimes_K \mathbf{G})_n = \bigoplus_{r+s=n} F_r \otimes_K G_s$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} t_n^T(M \otimes_K N) &= \max\{i + j : \beta_{ri}^R(M) \beta_{sj}^S(N) \neq 0\} \\ &= \max\{t_r^R(M) + t_s^S(N) : r + s = n\}, \end{aligned}$$

□

و این همان حکم مطلوب است.

باکلین و فروبرگ در [۶] نشان دادند که حاصل ضرب تانسوری $R \otimes_K S$ دو K -جبر کُسل است اگر و تنها اگر R و S هر دو کُسل باشند. در قضیه زیر این مطلب برای مدول‌ها توسعه داده شده است.

قضیه ۲.۵. فرض کنیم که شرایط همانند لم ۱.۵ باشد. در این صورت

$$\text{rate}_T(M \otimes_K N) \leq \max\{\text{rate}_R(M), \text{rate}_S(N)\} \quad (۱)$$

$$\text{reg}_T(M \otimes_K N) \leq \text{reg}_R(M) + \text{reg}_S(N) \quad (۲)$$

در حالت خاص اگر R و S کُسل باشند، آنگاه $T = R \otimes_K S$ نیز کُسل است.

اثبات. فرض کنید $\text{rate}_R(M) = a$ و $\text{rate}_S(N) = b$. آنگاه با توجه به تعریف برای تمام $i, j \geq 1$ ها داریم

$$t_i^R(M) \leq ai \quad \text{و} \quad t_j^S(N) \leq bj$$

بنابراین اگر $i + j = n$ آنگاه

$$t_i^R(M) + t_j^S(N) \leq ai + bj \leq \max\{a, b\}n.$$

¹⁷Künneth

حال با به کارگیری قضیه قبل نتیجه می شود که

$$t_n^T(M \otimes_K N) \leq \max\{a, b\}n.$$

لذا

$$\text{rate}_T(M \otimes_K N) \leq \max\{\text{rate}_R(M), \text{rate}_S(N)\}.$$

در نتیجه (۱) ثابت می شود.

اثبات (۲) مشابه (۱) و با استفاده از لم ۱.۵ است.

حال اگر R و S کُسول باشند، آنگاه $\text{reg}_R(K) = \text{reg}_S(K) = 0$ و لذا با استفاده از (۲)، دیده می شود که $T = R \otimes_K S$ کُسول است. $\square$

۶. تشکر و قدردانی

مولفین از داوران، بخاطر نظراتشان در جهت بهبود بخشیدن به ارائه قضایا و برهانها، بسیار سپاسگزارند.

مراجع

- [1] A. Aramova, S. Bărcănescu and J. Herzog, On the rate of relative Veronese submodules, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **40** (1995) 243–251.
- [2] L. L. Avramov, Infinite free resolutions, in *Six Lectures on Commutative Algebra* (Bellaterra, 1996), *Progr. Math.*, **166**, Birkhäuser, Basel, (1998) 1–118.
- [3] L. L. Avramov and D. Eisenbud, Regularity of modules over a Koszul algebra, *J. Algebra*, **153** (1992) 85–90.
- [4] L. L. Avramov and I. Peeva, Finite regularity and Koszul algebras, *Amer. J. Math.*, **123** (2001) 275–281.
- [5] J. Backelin, On the rates of growth of the homologies of Veronese subrings, in *Algebra, algebraic topology and their interactions*, *Lecture Notes in Math.*, **1183**, Springer, New York, (1986) 79–100.
- [6] J. Backelin and R. Fröberg, Veronese subrings, Koszul algebras and rings with linear resolutions, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **30** (1985) 85–97.
- [7] W. Bruns, A. Conca and T. Römer, Koszul homology and syzygies of veronese subalgebras, *Math. Ann.*, **351** (2011) 761–779.
- [8] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, **39**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [9] A. Conca, M. E. Rossi, and G. Valla, Gröbner flags and Gorenstein algebras, *Compositio Math.* **129**(1) (2001) 95–121.
- [10] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.*, **26** (1927) 531–555.
- [11] J. Sally, Stretched Gorenstein rings, *J. London Math. Soc.* **20** (1979) 19–26.

رسول آهنگری ملکی

پژوهشکده ریاضی، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، میدان نیاوران، تهران

rahangari@ipm.ir

رسول آهنگری ملکی متولد سال ۱۳۵۹ در ملکان است. وی پس از اتمام دوره کارشناسی ریاضی محض در دانشگاه تبریز در سال ۱۳۸۲ دوره کارشناسی ارشد خود را در دانشگاه صنعتی امیرکبیر آغاز کرد و پایان نامه ارشد خود را در سال ۱۳۸۴ به پایان رساند. ایشان پس از اتمام دوره خدمت سربازی در سال ۱۳۸۷ دوره دکتری خود را در رشته جبر جابجایی در دانشگاه خوارزمی شروع کرد و در سال ۱۳۹۲ از پایان نامه خود با عنوان "حلقه‌ها و مدول‌های کسول و عدد نظم کاستلنوتوو-مامفورد" دفاع کرد. از سال ۱۳۹۲ تا ۱۳۹۵ با پژوهشگاه دانش‌های بنیادی به عنوان پژوهشگر غیر مقیم همکاری داشته و از سال ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۶ به عنوان پژوهشگر پسادکتری در دانشگاه الزهرا مشغول بود. وی هم اکنون پژوهشگر مقیم پژوهشگاه دانش‌های بنیادی است.

**تیرداد شریف**

پژوهشکده ریاضی، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، میدان نیاوران، تهران

sharif@ipm.ir

تیرداد شریف، متولد سال ۱۳۵۱ در شهر قم است. وی در سال ۱۳۶۹ در رشته مهندسی پتروشیمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر پذیرفته شد ولی در نهایت رشته خود را تغییر داد و در سال ۱۳۷۲ به رشته ریاضی محض روی آورد. در سال ۱۳۷۶ در دانشگاه تهران در مقطع کارشناسی ارشد شروع به تحصیل کرد و در سال ۱۳۷۸ پایان نامه ارشد خود را در نظریه بستار کیپ (Tight) (Clouser) به پایان رساند. ایشان در سال ۱۳۷۹ در مقطع دکتری در گرایش جبر هومولوژی در همان دانشگاه پذیرفته شد و در سال ۱۳۸۳ از پایان نامه خود با عنوان "بعد های هومولوژیک در جبر جابجایی" دفاع کرد. وی از سال ۱۳۸۴ تا ۱۳۸۷ دوره پسا دکتری اول و از سال ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۲ دوره پسادکتری دوم خود را در پژوهشگاه دانش‌های بنیادی گزاراند و در زمستان ۱۳۹۲ به عضویت دائم هیات علمی پژوهشکده ریاضی درآمد.

