http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۴، شماره ۴ (۱۳۹۸)، صص. ۵۲-۴۹

http://www.ui.ac.ir

برهانی کوتاه و ساده برای قضیه باقیمانده چینی و برخی کاربردهای آن

ابوالفضل تاری‌زاده* و زهرا طاهری امین

چکیده. در این مقاله، قضیه باقیمانده چینی را با روشی ساده و کوتاه اثبات می‌کنیم. روش اثبات این قضیه سازنده است لذا با استفاده از این روش، فرمولی صریح برای محاسبه تمام خودتوان‌های حلقه‌های آرتینی، به‌ویژه حلقه اعداد صحیح به پیمانه m یعنی، $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ارائه می‌دهیم. همچنین یک نتیجه جدید در رابطه با ترفیع خودتوان‌ها به دست می‌آوریم.

۱. مقدمه

تحقیق و پژوهش درباره خودتوان‌های یک حلقه یکی از موضوع‌های اصلی مقالات و نوشته های علمی، طی سال‌های گذشته بوده و در حال حاضر نیز این موضوع مورد علاقه بسیاری است، برای مثال به مراجع [۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸] مراجعه کنید. مجموعه تمام خودتوان‌های حلقه جابجایی R یعنی $\mathcal{B}(R)=\{f\in R: f^{۲}=f\}$ به همراه اعمال دوتایی $f\wedge g=fg$ و $f\vee g=f+g-fg$ و عمل یگانه $f^c=۱-f$ یک جبر بول است. همچنین براحتی می‌توان مشاهده کرد که مجموعه $\mathcal{B}(R)$ به همراه عمل $\oplus$ با ضابطه $f\oplus g:=f+g-۲fg$ به عنوان عمل جمع، یک حلقه جابجایی است (که در آن عمل ضرب $\mathcal{B}(R)$ تحدید عمل ضرب R است). مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه جابجایی R را طیف اول R گوییم و آن را با $\operatorname{Spec}(R)$ نشان می‌دهیم .همچنین یک نتیجه اساسی دیگر در رابطه با خودتوان‌ها منسوب به گروتندیک، بیان می‌دارد که نگاشت $f\rightsquigarrow D(f)=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R): f\notin\mathfrak{p}\}$ یک نگاشت دوسویی از $\mathcal{B}(R)$ بروی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های کلوپن (هم باز و هم بسته) $\operatorname{Spec}(R)$ است، برای مشاهده اثبات به [3, Tag 00EE] یا [۹، گزاره ۳٫۱] مراجعه کنید. یکی از نتایج اصلی این مقاله یعنی قضیه ۱.۳ با به‌کارگیری این نتیجه گروتندیک حاصل گردیده است. شایان ذکر است که در [۱۰، قضیه ۳٫۱]، نشان می‌دهیم که این نگاشت دوسویی در حقیقت یک یکریختی حلقه‌ها است (این قضیه، قضیه نمایش استون را تعمیم می‌دهد). خودتوان‌ها همچنین در جبر ناجابجایی نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. بویژه خودتوان‌ها با تجزیه مدول‌ها (مخصوصا تجزیه پیرس) و همچنین خواص هومولوژیکی حلقه‌ها گره خورده‌اند.

یکی از اهداف این مقاله ارائه فرمولی صریح برای محاسبه تمام خودتوان‌های یک حلقه متناهی، یا خیلی کلی‌تر محاسبه خودتوان‌های حلقه‌های آرتینی است. در قضیه ۱.۲ قضیه باقیمانده چینی را با روشی ساده و کوتاه اثبات می‌کنیم، برای مشاهده اثباتی دیگر از این قضیه به [3, Tag 00DT] مراجعه کنید. این اثبات ما را قادر می‌سازد تمام خودتوان‌های یک حلقه آرتینی را به‌سادگی محاسبه کنیم. بویژه تمام خودتوان‌های حلقه اعداد صحیح به پیمانه m یعنی $\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ براحتی

عبارات و کلمات کلیدی: قضیه باقیمانده چینی، حلقه اعداد صحیح به پیمانه m، حلقه آرتینی، ترفیع خودتوان‌ها
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: جواد اسدالهی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۸
* نویسنده مسئول

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.123926.1371

محاسبه می‌شوند. در نوشتجات علمی هیچ روشی وجود ندارد که بتواند تمام خودتوان‌های یک حلقه متناهی، حتی $\mathbb{Z}_m$ را محاسبه کند. شایان ذکر است که اثبات‌های قبلی و شناخته شده قضیه باقیمانده چینی بجز تعداد خودتوان‌ها در رابطه با نحوه محاسبه خودتوان‌ها هیچ اطلاعاتی ارائه نمی‌دهند. در سرتاسر این مقاله حلقه‌ها جابجایی هستند.

۲. قضیه باقیمانده چینی و برخی کاربردهای آن

در این بخش برهانی ساده و کوتاه برای قضیه باقیمانده چینی ارائه می‌کنیم. سپس کاربردهایی از این قضیه ارائه می‌شوند.

قضیه ۱.۲. (قضیه باقیمانده چینی) *فرض کنید $I_1, \dots, I_n$ یک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های حلقه جابجایی R باشند بطوریکه دو به دو نسبت به هم اول هستند ($I_i + I_j = R$). آنگاه همریختی حلقه ها $\pi : R \to R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$ با ضابطه $f \rightsquigarrow (f + I_1, \dots, f + I_n)$ پوشا است و هسته آن عبارت است از $\prod_{i=1}^{n} I_i$.*

اثبات. به‌وضوح برای هر k داریم $I_k + \bigcap_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n} I_i = R$. بنابراین عناصر $g_k \in I_k$ و $h_k \in \bigcap_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n} I_i$ وجود دارند بطوریکه $g_k + h_k = 1$. حال نشان می‌دهیم که همریختی π پوشا است. اگر $(f_1, \dots, f_n)$ یک n–تایی از اعضا R باشد آنگاه برای هر k داریم

$$f - f_k = f - f_k g_k - f_k h_k = \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n} f_i h_i - f_k g_k \in I_k$$

که در آن $f = \sum_{i=1}^{n} f_i h_i$. بنابراین $\pi(f) = (f_1 + I_1, \dots, f_n + I_n)$. همچنین $\operatorname{Ker}\pi = \bigcap_{i=1}^{n} I_i = \prod_{i=1}^{n} I_i$.
□

نتیجه ۲.۲. *فرض کنید $m = p_1^{c_1} \cdots p_n^{c_n}$ تجزیه عدد صحیح m به عوامل اول باشد که در آن $c_i \geqslant 1$ و p_iها اعداد اول دو به دو متمایز هستند. آنگاه تعداد خودتوان‌های حلقه $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ برابر با 2^n است و (به پیمانه m) هر کدام دقیقا به شکل $\sum_{k=1}^{n} h_k \epsilon_k$ است که در آن $\epsilon_k \in \{0, 1\}$ و $h_k \in (\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n} p_i^{c_i})\mathbb{Z}$ به شرط آنکه $h_k - 1 \in p_k^{c_k}\mathbb{Z}$.*

اثبات. بنا به قضیه ۱.۲، همریختی $\varphi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p_1^{c_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_n^{c_n}$ با ضابطه $f \rightsquigarrow (f + p_1^{c_1}\mathbb{Z}, \dots, f + p_n^{c_n}\mathbb{Z})$ یکریختی است. اگر p یک عدد اول باشد و $c \geqslant 1$ آنگاه $\mathbb{Z}/p^c\mathbb{Z}$ یک حلقه موضعی است. حلقه‌های موضعی هیچ خودتوان غیر بدیهی ندارند. بنابراین حلقه $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ دقیقا 2^n خودتوان دارد که هر کدام تصویر وارون یک $(\epsilon_1 + p_1^{c_1}\mathbb{Z}, \dots, \epsilon_n + p_n^{c_n}\mathbb{Z})$ تحت φ است که در آن $\epsilon_k \in \{0, 1\}$. بنابراین (به پیمانه m) $f \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ خودتوان است اگر و تنها اگر $f = \sum_{k=1}^{n} h_k \epsilon_k$ که در آن $\epsilon_k \in \{0, 1\}$ و $h_k \in (\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n} p_i^{c_i})\mathbb{Z}$ به‌طوریکه $h_k - 1 \in p_k^{c_k}\mathbb{Z}$. □

مثال ۳.۲. *حال به بررسی چند مثال می‌پردازیم. اگر $m = 858 = 2 \times 3 \times 11 \times 13$ آنگاه (به پیمانه m) خودتوان‌های حلقه $\mathbb{Z}_m$ دقیقا به شکل $66\epsilon_1 + 78\epsilon_2 + 286\epsilon_3 + 429\epsilon_4$ هستند که در آن $\epsilon_k \in \{0, 1\}$. بنابراین $f \in \mathbb{Z}_m$ خودتوان است اگر و تنها اگر*

$$f \in \{0, 1, 66, 78, 144, 286, 352, 364, 429, 430, 495, 507, 573, 715, 781, 793\}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.123926.1371

. به عنوان مثالی دیگر، اگر $m = ۷۶۵ = ۳^۲ \times ۵ \times ۱۷$ آنگاه خودتوان‌های حلقه $\mathbb{Z}_m$ دقیقا به شکل $۱۷۰\epsilon_۳ - ۱۳۵\epsilon_۲ - ۳۰۶\epsilon_۱$ هستند که در آن $\epsilon_k \in \{۰, ۱\}$. بنابراین $f \in \mathbb{Z}_m$ خودتوان است اگر و تنها اگر $f \in \{۰, ۱, ۱۳۶, ۱۷۱, ۳۰۶, ۴۶۰, ۵۹۵, ۶۳۰\}$. فرایند بالا، همچنین در حل برخی از معادلات هم‌نهشتی نیز کاربرد دارد. برای مثال دو n–تایی $(f_۱, \ldots, f_n)$ و $(p_۱^{c_۱}, \ldots, p_n^{c_n})$ از اعداد صحیح را در نظر بگیرید که در آن $c_k \geqslant ۱$ و p_kها اعداد اول دو به دو متمایز هستند. آنگاه مسئله، پیدا کردن تمام اعداد صحیحی مانند x است بطوریکه برای هر k داشته باشیم $x - f_k \in p_k^{c_k}\mathbb{Z}$. بنا به نتیجه ۲.۲، $x = \sum\limits_{i=۱}^{n} f_i h_i$ یک جواب برای این دستگاه معادلات است که در آن $h_k \in (\prod\limits_{\substack{i=۱,\\ i\neq k}}^{n} p_i^{c_i})\mathbb{Z}$ به‌طوریکه $h_k - ۱ \in p_k^{c_k}\mathbb{Z}$. مجموعه $\sum\limits_{i=۱}^{n} f_i h_i + m\mathbb{Z}$ تمام جواب‌های دستگاه معادلات بالا را به ما می‌دهد که در آن $m = p_۱^{c_۱} \cdots p_n^{c_n}$. اگر همچنین رادیکال‌پوچ حلقه $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ را با $\mathfrak{N}$ نشان دهیم آنگاه $\mathfrak{N} = p_۱ \cdots p_n \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. لذا تعداد پوچتوان‌های حلقه $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ برابر با $p_۱^{c_۱ - ۱} \cdots p_n^{c_n - ۱}$ است.

فرض کنید R یک حلقه آرتینی باشد. آنگاه هر ایده‌آل اول R یک ایده‌آل ماکسیمال است. همچنین تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال آن متناهی است. بعلاوه رادیکال جیکوبسون حلقه R پوچتوان است. عدد طبیعی N را رتبه جیکوبسون–پوچتوانی حلقه R گوییم هرگاه N کوچکترین عدد طبیعی باشد بطوریکه $J^N = ۰$ که در آن J رادیکال جیکوبسون حلقه R است. نتیجه ذیل تعمیم نتیجه ۲.۲ است.

نتیجه ۴.۲. *فرض کنید R یک حلقه آرتینی، $\{\mathfrak{m}_۱, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$ مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال R و N رتبه جیکوبسون–پوچتوانی حلقه R باشد. آنگاه $f \in R$ خودتوان است اگر و تنها اگر $f = \sum\limits_{i=۱}^{n} h_k \epsilon_k$ که در آن $\epsilon_k \in \{۰, ۱\}$ و $h_k \in \prod\limits_{\substack{i=۱,\\ i\neq k}}^{n} \mathfrak{m}_i^N$ به‌طوریکه $h_k - ۱ \in \mathfrak{m}_k^N$. به‌ویژه حلقه R دقیقا ۲^n خودتوان دارد.*

اثبات. بنا به قضیه ۱.۲، همریختی حلقه‌ها $\pi : R \to R/\mathfrak{m}_۱^N \times \cdots \times R/\mathfrak{m}_n^N$ با ضابطه $f \rightsquigarrow (f + \mathfrak{m}_۱^N, \ldots, f + \mathfrak{m}_n^N)$ یک یکریختی حلقه‌ها است. اگر $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال R و $N \geqslant ۱$ یک عدد طبیعی باشد آنگاه حلقه $R/\mathfrak{m}^N$ یک حلقه موضعی است. هر حلقه موضعی هیچ خودتوان غیر بدیهی ندارد. لذا بنا به اثبات قضیه ۱.۲، $f \in R$ خودتوان است اگر و تنها اگر $f = \sum\limits_{k=۱}^{n} h_k \epsilon_k$ که در آن $\epsilon_k \in \{۰, ۱\}$ و $h_k \in \prod\limits_{\substack{i=۱,\\ i\neq k}}^{n} \mathfrak{m}_i^N$ به‌طوریکه $h_k - ۱ \in \mathfrak{m}_k^N$. $\square$

۳. ترفیع خودتوان‌ها

در این بخش یک نتیجه جدید در رابطه با ترفیع خودتوان‌ها بدست می‌آوریم. در قضیه ذیل $\mathfrak{N}$ رادیکال‌پوچ (مجموعه تمام پوچتوان‌های) حلقه R است.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید R یک حلقه باشد. اگر $f + \mathfrak{N} \in R/\mathfrak{N}$ خودتوان باشد آنگاه خودتوان یکتا مانند $g \in R$ وجود دارد به‌طوریکه $f - g \in \mathfrak{N}$.*

اثبات. فرض کنید $\pi^* : \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{N}) \to \mathrm{Spec}(R)$ نگاشت القاءشده بوسیله همریختی حلقه‌ای کانونیک $\pi : R \to R/\mathfrak{N}$ باشد. براحتی می‌توان مشاهده کرد که π^* یکریختی فضاهای توپولوژی است. لذا $\pi^*(D(f + \mathfrak{N})) = D(f)$ یک زیرمجموعه کلوپن $\mathrm{Spec}(R)$ است. می‌دانیم که نگاشت $a \rightsquigarrow D(a)$ یک نگاشت دوسویی از مجموعه تمام خودتوان‌های R بروی گردایه زیرمجموعه‌های کلوپن $\mathrm{Spec}(R)$ است، به [۹، گزاره ۳٫۱] مراجعه

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.123926.1371

کنید. بنابراین یک خودتوان مانند $g \in R$ وجود دارد به‌طوریکه $D(f) = D(g)$. از آن نتیجه می‌شود که برای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R داریم $f \in \mathfrak{p}$ اگر و تنها اگر $g \in \mathfrak{p}$. بنابراین $f - g = f(۱ - g) - g(۱ - f) \in \mathfrak{p}$ و لذا $f - g \in \mathfrak{N}$. حال نشان می‌دهیم که g یکتاست. فرض کنید یک خودتوان دیگر مانند $h \in R$ چنان موجود باشد که $f - h \in \mathfrak{N}$. آنگاه $g - h = (g - f) + (f - h)$ پوچتوان است. بنابراین یک عدد طبیعی مانند $n \geqslant ۱$ وجود دارد به‌طوریکه $(g - h)^n = ۰$. از آن نتیجه می‌شود که $g = rh$ و $h = r'g$ که در آن $r, r' \in R$. بنابراین $g = gh = h$. $\square$

تشکر و قدردانی

از داور این مقاله بخاطر مطالعه دقیق و پیشنهادهای ارزشمند ایشان که باعث بهبود و ترفیع مقاله شد، نهایت تشکر و قدردانی را داریم.

مراجع

[1] P. N. Ánh et al., Idempotents and structure of rings, *Linear and Multilinear Algebra*, **64** (2016) 2002–2029.

[2] C. L. Chuang and P. H. Lee, Idempotents in simple rings, *J. Algebra*, **56** (1979) 510–515.

[3] A. J. de Jong et al., *Stacks Project*, see http://stacks.math.columbia.edu.

[4] D. R. Farks and Z. S. Marciniak, Idempotents in group rings: a surprise, *J. Algebra*, **81** (1983) 266–267.

[5] P. Kanwar et al., Idempotents in ring extensions, *J. Algebra*, **389** (2013) 128–136.

[6] N. K. Kim et al., Structure of idempotents with rings without identity, *J. Korean Math. Soc.*, **51** (2014) 751–771.

[7] M. Rich, Rings with idempotents in their nuclei, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298** (1975) 81–90.

[8] A. Weiss, Idempotents in group rings, *J. Pure Appl. Algebra*, 16 (1980) 207–2013.

[9] A.Tarizadeh, On the category of profinite spaces as a reflective subcategory, *Appl. Gen. Topol*, 14 (2013) 147–157.

[10] A. Tarizadeh and Z. Taheri, *Stone type representations and dualities by power set ring*, arXiv:1905.10612v4.

ابوالفضل تاری‌زاده
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
ebulfez۱۹۷۸@gmail.com

ابوالفضل تاری زاده متولد بهمن ماه ۱۳۵۶ در شهرستان مرند است. وی فارغ التحصیل کارشناسی رشته ریاضی محض از دانشگاه تبریز در سال ۱۳۸۱، کارشناسی ارشد رشته ریاضی، گرایش جبر از دانشگاه خوارزمی (تربیت معلم) تهران در سال ۱۳۸۵ و دکتری تخصصی رشته ریاضی، گرایش هندسه جبری از دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه رنجان در سال ۱۳۹۲ است. وی در حال حاضر استادیار دانشگاه مراغه می باشد. علایق پژوهشی ایشان ریاضیات مجرد به ویژه در حوزه های هندسه جبری، جبر جابجایی و توپولوژی است

زهرا طاهری امین
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
zta.pardafan@gmail.com

زهرا طاهری امین متولد آذر ماه ۱۳۷۵ در شهرستان مراغه است. وی فارغ التحصیل کارشناسی رشته ریاضیات و کاربردها از دانشگاه مراغه در سال ۱۳۹۸ است و اکنون مشغول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد گرایش هندسه جبری در دانشگاه مراغه است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.123926.1371