http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۴، شماره ۴ (۱۳۹۸)، صص. ۳۰-۲۳

http://www.ui.ac.ir

مروری بر کتاب مبانی هندسه هیلبرت

خسرو منصف‌شکری

چکیده. در این مقاله مروری بر کتاب مبانی هندسه، اثر هیلبرت خواهیم داشت. در این مرور به جنبه‌های تاریخی و انگیزه‌ها و دستاوردهای نگارش این کتاب خواهیم پرداخت.

۱. مقدمه

مقدمات تاریخی. هیلبرت کتاب مبانی هندسه[۳] خود را با این جمله از نقد عقل محض کانت، قاب می‌گیرد:
"هر دانش بشری، با شهود آغاز می‌شود، و سپس به صورت مفاهیم در می‌آید و سرانجام به ایده منجر می‌شود."
شاید استفاده از این جمله کانت توسط هیلبرت در آغاز کتابش، با تصور ما از عقاید هیلبرت که از بنیان‌گذاران صورت‌گرایی ریاضی است، چندان منطبق نباشد، هر چند این بیشتر به تفاسیر ناقص ما از صورت‌گرایی آن‌گونه که هیلبرت منظور نظرش است، برمی‌گردد. هیلبرت اساسا تفاوتی بنیادین بین هندسه و باقی شاخه‌های ریاضی قائل است، زیرا علم هندسه بدون مکان بی‌معناست. مکان در کنار زمان دو مقوله از مقولات حسی ناب در فلسفه کانت هستند. همین تصور حسی ناب از مکان است که به ما امکان می‌دهد یک گزاره هندسی را در ذهن تجسم کنیم اما چنین امکانی برای گزاره‌های حسابی وجود ندارد. دایره را می‌توان مشاهده کرد اما عدد اول را نمی‌توان مشاهده کرد.

هیلبرت نخستین بار درس مبانی هندسه را در دانشگاه کونیگسبرگ[۱] در سال تحصیلی ۱۸۹۴-۱۸۹۳، ارائه کرد. در یادداشت‌های این درس می‌نویسد:
منشأ دانش هندسه در تجربه است. اصول، چنان که هرتز بیان می‌کند، تصاویر یا نمادهایی در ذهن ما هستند چنان که نتایج این تصاویر، تصاویری از این نتایج هستند، یعنی آنچه ما به طور منطقی از این تصاویر نتیجه می‌گیریم، درون طبیعت همچنان معتبر هستند. [۱]

اشاره به هرتز فیزیکدان در این نقل قول از اهمیت فراوانی برخوردار است، زیرا کار هرتز در زمینه اصول موضوعه‌سازی مکانیک نیوتنی، یکی از انگیزه‌های اصلی هیلبرت در سامان دادن مبانی هندسه او بوده است. هیلبرت به واسطه دوستی با مینکوفسکی[۲] با این اثر هرتز آشنا شد و از آن پس ایده اصول موضوعه‌سازی ریاضیات و فیزیک به یکی از دلمشغولی‌های جدی هیلبرت بدل شد. او پس از انجام این مهم در هندسه اقلیدسی به سراغ کار نافرجام هرتز که با مرگ زودهنگام او متوقف شده بود رفت و تلاش کرد مکانیک و نور و الکترومغناطیس را اصول موضوعی کند، زیرا او بر این باور بود که علت انجام موفقیت‌آمیز اصول موضوعه سازی هندسه مربوط به دانش گسترده ما در هندسه است و اگر این دانش در

عبارات و کلمات کلیدی. :مبانی هندسه، صورت‌گرایی، روش بنداشتی (اصل موضوعه).
نوع مقاله: ترویجی
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی
تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۳ .

[1]Königsberg [2]H. Minkowski (1864-1909)

شاخه‌های فیزیک به انجام برسد، این کار در فیزیک هم شدنی است. همانطور که اشاره شد به باور هیلبرت هندسه جزء علوم طبیعی است. پس آنچه در بخشی از علوم طبیعی انجام شدنی است باید در باقی شاخه‌های آن نیز امکان‌پذیر باشد.

به نظر می‌رسد با انتقال هیلبرت از کونیگسبرگ به گوتینگن در سال ۱۸۹۵، و تمرکز بر تخصص اصلیش یعنی نظریه ناورداهای جبری و همچنین نظریه جبری اعداد، او از مباحث مبانی هندسه فاصله گرفته است، اما اعلان درسی در ترم بهار ۱۸۹۹، در عین شور و هیجانی که در دانشجویان به پا کرد، با شگفتی نیز همراه بود، زیرا بنا بر گزارش اتو بلومنتال[۳] و هرمان وایل[۴]، هیلبرت در این چهار سال اقامت در گوتینگن هیچ‌گاه صحبتی از هندسه به میان نیاورده بود. اما بررسی‌های دقیق‌تر نشان می‌دهد او حداقل از سال قبل از آن به این موضوع بازگشته بود. او در زمستان ۱۸۹۸ در کلاس درس شوئن‌فلایس[۵]، درباره اصول هندسه تصویری شرکت کرد. در این کلاس اثبات قضیه پاپوس بدون استفاده از اصول پیوستگی، که کار اخیر شور[۶] و کلاین بود، ارائه شد. این مطلب، انگیزه مهمی بود تا هیلبرت را بیش از پیش به مبانی هندسه بازگرداند. زیرا او چند سال پیش از این، در یک سخنرانی از هرمان واینر[۷] شنیده بود که باید بتوان قضایای اصلی هندسه تصویری را بدون اصل پیوستگی (ارشمیدس) ثابت کرد. این سخنرانی چنان هیجان و انگیزه‌ای در هیلبرت ایجاد کرد که بنابر گزارش بلومنتال، هیلبرت بعد از بیرون آمدن از جلسه سخنرانی جمله معروف خود را بیان کرد: *"می‌توان به جای نقطه، خط، صفحه گفت میز، صندلی و لیوان آبجو، بدون این که در صحت قضایای هندسه تغییری حاصل شود."* [۱]

۲. اهداف هیلبرت

هیلبرت برای نوشتن درس‌گفتار خود که در همان سال ۱۸۹۹ به چاپ رسید و با اصلاحاتی دوباره در ۱۹۰۳ تجدید چاپ شد، چند هدف را دنبال می‌کرد.

۱.۲. اصلاح ضعف‌های کتاب اصول اقلیدس. نخستین هدف هیلبرت ارائه و صورتبندی بنداشت‌های (اصول) هندسه اقلیدسی به شیوه‌ای دقیق بود، که اولا کاستی‌های کتاب اصول اقلیدس را نداشته باشد. چنین رهیافتی را پیش از او ریاضیدانانی از جمله پاش[۸] آغاز کرده بودند که الهام‌بخش هیلبرت در این راه بود. ثانیا ساده، کوتاه و سازگار باشد. در مورد این صفات اخیر، هیلبرت چندان توضیحات مستدلی ندارد که منظور از ساده بودن چیست، هر چند به این نکته اشاره دارد که هر بنداشتی باید تنها شامل یک ایده باشد، اما سادگی بیشتر مفهومی است زیبایی‌شناسانه و به تشخیص شهود ما برمی‌گردد که از بین دو اصل معادل، کدام بهتر است به عنوان بنداشت گنجانده شود. در مورد کوتاهی که هم به تعداد بنداشت‌ها هم به خود محتوای بنداشت‌ها مربوط است نیز محک چندان قابل سنجه‌ای در اختیار نیست. هیلبرت در چاپ اول کتاب، ادعا کرده بود که مجموعه اصول او از هم مستقل‌اند که دو ریاضیدان با نام مشابه مور[۹] نشان دادند یکی از بنداشت‌های هیلبرت از باقی اصول نتیجه می‌شود[۴] و به این ترتیب در چاپ دوم این ادعا حذف شد و هیلبرت سادگی را بر کوتاهی ترجیح داد و همچنان از مجموعه بنداشت‌های غیرمستقل خود استفاده کرد. اما در جای جای کتاب او، قضایایی درباره استقلال بعضی اصول وجود دارد. فارغ از بنداشت توازی که داستان استقلال آن هنوز در محافل ریاضی آن دوران داغ بود و هیلبرت با اشاره‌ای گذرا از آن عبور می‌کند، او استقلال بنداشت آخر از مجموعه اصول قابلیت انطباق را که معادل با حالت انطباق دو مثلث در حالت دو ضلع و زاویه بین است، را ثابت می‌کند. او همچنین استقلال بنداشت ارشمیدس را نیز نشان می‌دهد. روش او در این قضایا، همان روش آشنایی است که امروزه می‌شناسیم؛ یعنی ارائه مدلی که در باقی اصول و نقیض اصل مورد بحث صدق کند و اینگونه استقلال اصل مذکور از باقی اصول ثابت می‌شود. در مورد سازگاری، هیلبرت در آن زمان چندان به اهمیت این مسأله واقف نبود،

[3] O. Blumenthal (1876-1944) [4] H. Weyl (1885-1955) [5] A. M. Schoenflies (1853-1928) [6] I. Schur (1875-1941) [7] H. Weiner (1857-1939) [8] M. Pasch (1843-1930) [9] E. H. Moore(1862-1932), R. L. Moore(1882-1974)

از همین روست که او سازگاری هندسه را به صورت غیرمستقیم و با تحویل دادن به اعداد، یعنی ارائه مدلی دکارتی از هندسه، به سرعت حل و فصل می‌کند. او حتی برای احتراز از بنداشت ارشمیدس و اعداد حقیقی، این سازگاری را در مدلی که تنها متشکل از اعداد ساختنی یعنی مجموعه اعدادی که از واحد و با انجام چهار عمل اصلی و عمل $\sqrt{۱+x^۲}$ به دست می‌آید، به انجام می‌رساند. همانطور که اشاره شد هیلبرت به تجربی بودن علم هندسه و این‌که جهان عینی، جهانی اقلیدسی است، باور داشت. او امید داشت که اقلیدسی بودن جهان، به زودی توسط آزمایش‌هایی نظیر آنچه گاوس بر سه قله کوه اطراف هانوفر انجام داده بود، به اثبات می‌رسد. اما هر چه زمان گذشت خوش‌باوری هیلبرت کمتر رنگ واقعیت به خود گرفت. نخستین ضربه را پوانکاره با استدلال بدیع خود بر این باور وارد کرد. پوانکاره استدلال کرد، که حتی اگر محاسبات نشان دهد که زوایای مثلثی که رئوس آن سه ستاره دور از هم باشند، کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، این مشاهده هیچ دلیلی بر نااقلیدسی بودن جهان نمی‌کند، زیرا چیزی که در این مشاهده نادیده گرفته می‌شود، این فرض است که نور در خط مستقیم حرکت می‌کند. اما چه بسا جهان اقلیدسی باشد و نور ساطع شده از ستاره بر مسیری منحنی حرکت کند که ما آنرا به انحنای جهان تفسیر می‌کنیم. همین نکته است که پوانکاره را به سوی وضع فلسفه قراردادگرایی در علم کشاند. آنچه پس علم انجام می‌دهد، توصیف است نه توضیح جهان. از قضای روزگار این پیش‌بینی در همان دوران درباره نظریه نسبیت رخ نمود. هر چند پوانکاره خود یکی از پیش‌برندگان هندسه نااقلیدسی است، اما این ریمان بود که قبلا در سال ۱۸۵۴ با سخنرانی دوران‌ساز خود یعنی درباره فرض‌های بنیادین هندسه روحی تازه در هندسه دمید و همین روح در فضای آلمانی‌زبان زودتر از جاهای دیگر حس و درک شد. و این مینکوفسکی بود که به اینشتین پیشنهاد متریکی غیر از متریک اقلیدسی را برای مدل نسبیت داد. متریکی که امروزه ما به متریک لورنتس می‌شناسیم و نقشی اساسی در توصیف فضا–زمان اینشتین دارد. پس هیلبرت شاهد این بود که آن باور به سازگاری هندسه اقلیدسی که مبتنی بر شهود ما از جهان خارج بود، دچار تردید شده است. زیرا این باوری عمومی است که قوانین جهان حتی‌المکان ساده‌اند. پس اگر جهان واقعا اقلیدسی باشد، چرا بیان معادلات نظریه نسبیت در آن پیچیده‌تر از بیان آن در هندسه‌های ریمانی جدید است؟ این همان قراردادگرایی پوانکاره است: دست از این که جهان عینی واقعا چیست، برداریم. ما هیچ‌گاه نخواهیم دانست. این مهم نیست چه هندسه‌ای را برای جهان اختیار می‌کنیم، مهم این است که در کدام هندسه مدل‌های فیزیکی ساده‌تر بیان می‌شوند.[۵، ۱۰]

سازگاری هندسه به طور خاص و سازگاری ریاضیات به طور عام کم‌کم به معضل بزرگی تبدیل شد، هر چند هنوز خوشبینی‌هایی برای اثبات سازگاری وجود داشت، اما ضربه گودل، یعنی قضایای ناتمامیت که منجر به امتناع اثبات سازگاری ریاضیات شد، صورت‌گرایی هیلبرتی و برنامه بنداشتی کردن را با بحرانی جدی مواجه کرد. البته سازگاری هندسه بالاخره با اثبات تارسکی به سرانجام رسید[۸]، اما این اثبات سازگاری تنها برای هندسه کامل امکان‌پذیر است، یعنی مدل کامل دکارتی که از دامنه اعداد حقیقی استفاده می‌کند. بنابراین بدون استفاده از بنداشت ارشمیدس و اصل کمال، سازگاری هندسه اثبات‌پذیر نیست.

اما این دستگاه بنداشتی هیلبرت از چه عناصری تشکیل شده است؟ هندسه مورد نظر هیلبرت، از سه دسته شی تعریف نشده تشکیل یافته که به آن‌ها، نقطه، خط، و صفحه می‌گوییم. اینها مفاهیم تعریف نشده دستگاه بنداشتی هستند. این اشیا با هم روابط متقابلی دارند که در مجموعه‌ای به نام بنداشت یا اصول موضوعه تعریف می‌شوند. هیلبرت برای تفکیک حوزه‌های مختلف شهود، مجموعه بنداشت‌ها را به پنج گروه کلی تقسیم‌بندی می‌کند: بنداشت‌های همبستگی (شامل ۷ اصل) که ارتباط میان مفاهیم نقطه، خط و صفحه را مشخص می‌کند. برای مثال بنداشت نخست بیانگر این حقیقت است که دو نقطه یک خط را مشخص می‌کنند. سپس گروه بنداشت‌های میان‌بود (شامل ۵ اصل) بیان می‌شوند که مفهوم مابین بودن نقاط روی یک خط را تبیین می‌کنند. برای مثال بنداشت اول این مجموعه به این خاصیت می‌پردازد که میان‌بود خاصیتی متقارن است: اگر نقطه A، بین نقاط B و C باشد، آنگاه A بین C و B نیز هست. گروه سوم تنها شامل بنداشت توازی یا همان اصل اقلیدس است، گروه چهارم، مجموعه بنداشت‌های قابلیت انطباق (شامل ۶ اصل)

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.122476.1363

است که بر پایه مفهوم قابلیت انطباق پاره‌خط‌ها و زوایا استوار است. مهم‌ترین بنداشت این مجموعه بنداشت ششم آن است:

اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، انطباق‌های $AB \equiv A'B'$ و $AC \equiv A'C'$ و $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ برقرار باشد، آنگاه انطباق‌های $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ و $\angle ACB \equiv \angle A'C'B''$ نیز برقرار است.

همانطور که قبلا اشاره کردیم، این بنداشت معادل انطباق دو مثلث در حالت دوضلع و زاویه بین است که در کتاب اصول اقلیدس به عنوان قضیه ثابت شده است. هر چند اقلیدس اثبات آن را با کراهت پذیرفته بود زیرا در برهان لازم است از مفهوم حرکت دادن مثلثی بر مثلث دیگر استفاده کنیم و مفهوم حرکت چیزی نیست که درباره آن در این هندسه صحبتی به میان آمده باشد. پوانکاره در کتاب علم و فرضیه[۵]، ماهیت نابدیهی این مفروض را نشان می‌دهد. او می‌گوید پیش‌فرض ذهنی ما از اشیای هندسی اشیای صلب هستند که حرکت در آن‌ها تغییری ایجاد نمی‌کند، اما اگر اشیای هندسی از جنس مایع باشند چه؟ چطور در طول حرکت می‌توانند شکل اولیه خود را حفظ کنند. البته پیش از او ریمان به طور بنیادی به این مسأله پرداخته بود و اساسا هندسه‌های مختلف را ناشی از تغییر حالات اشیای هندسی بر اثر حرکت دانسته بود. در همین فضاست که کلاین با تعریف جدیدی از هندسه یعنی نظامی که سر و کارش با آن ویژگی‌هایی از شکل‌هاست که بر اثر تبدیل‌های یک گروه از تبدیل‌ها، تغییر نکند، برنامه ارلانگن را پایه‌گذاری می‌کند.[۹]

هیلبرت با ساختن متریکی متفاوت برای هندسه اقلیدسی به راحتی نشان می‌دهد، چرا نمی‌توان این حالت انطباق مثلث را از باقی بنداشت‌ها نتیجه گرفت و در نتیجه به ناچار باید آن را به عنوان بنداشتی جداگانه پذیرفت.

۲.۲. خالص‌سازی هندسه. با همه اهمیتی که موضوع صورت‌بندی دقیق اصول موضوعه هندسه اقلیدسی برای هیلبرت داشت، اما این موضوع، همه اهداف او از این درس گفتار نبود، بلکه هدف اصلی او، ارائه اثبات‌هایی از قضایای اصلی هندسه تصویری، بدون استفاده از بنداشت ارشمیدس بود. علت این دغدغه را باید در نزاع درونی بین دو طیف از هندسه‌دانان دانست که ریشه‌های اصلی آن به جبری و آنالیزی‌سازی هندسه که امروزه به هندسه تحلیلی می‌شناسیم باز می‌گردد. پس از موفقیت اولیه این روش به مدت دست کم یک قرن، کم‌کم و با ظهور هندسه تصویری و ایده‌های دزارگ، مقاومتی علیه هندسه تحلیلی صورت پذیرفت و کسانی همچون شازله[۱۰] در فرانسه و اشتاینر[۱۱] و فون اشتاد[۱۲] در آلمان کوشش کردند دستگاه مختصات را از هندسه حذف کنند تا همگن‌سازی فضا را به انجام برسانند.[۲] زیرا در هندسه تصویری که از اضافه کردن نقاطی در بی‌نهایت به فضای عادی به دست می‌آید، نقاط هیچ تمایزی نسبت به یکدیگر ندارند، از مزایای این روش این است که قضایا در این هندسه جدید به صورت عام و بدون حالت‌بندی‌های مرسوم در هندسه تحلیلی بیان می‌شوند. از ویژگی‌های این هندسه، عدم برقراری بنداشت ارشمیدس است[۱۳]. بنابراین طبیعی است که هیلبرت نیز می‌خواست تا حد امکان از بنداشت ارشمیدس احتراز کند. در این راستا او حتی از این هم جلوتر رفت و مفهوم عدد را به کلی از هندسه کنار گذاشت. همین است که اثر او را در این زمینه نسبت به آثار مشابه، برجستگی می‌بخشد. برای این منظور او ابتدا قضیه پاسکال را بدون بنداشت ارشمیدس ثابت کرد.

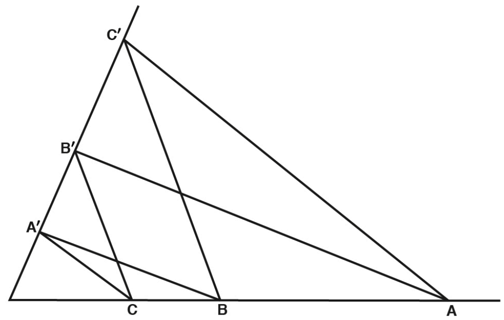
قضیه ۱ (قضیه پاسکال). *دو مجموعه A, B, C و $A'B'C'$ طوری واقع شده است، که هر مجموعه روی خط راستی واقع است و هیچ کدام از آن‌ها در نقطه تقاطع خطوط مذکور واقع نیست. اگر CB'، موازی BC' و CA' موازی AC' باشد، آنگاه BA' نیز موازی AB' است.*

هیلبرت توانست با استفاده از این قضیه، ساختار جبری اعداد حقیقی (یعنی حلقه یکدار جابه‌جایی با ساختار ترتیب) را بازسازی کند. برای این منظور او جمع و ضرب پاره‌خط‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کند:

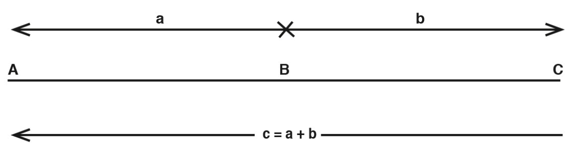
[۱۳] در واقع در هندسه تحلیلی دکارتی، نمی‌توان با جمع متناهی پاره‌خط به نقطه بی‌نهایت رسید.

[10] C. Chasles (1793-1880) [11] J. Steiner (1796-1863) [12] K. G. Von Staudt (1798-1867)

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.122476.1363



اگر A، Bو C سه نقطه روی خط راست باشند که B بین A و C است می‌گوییم $c = AC$ جمع پاره‌خط‌های $a = AB$ و $b = BC$ است و می‌نویسیم: $c = a + b$.



می‌توانیم روی پاره‌خط‌ها ترتیب هم بگذاریم. اگر حالت فوق بین پاره‌خط‌های a، b و c برقرار باشد، می‌گوییم پاره‌خط a و b از c کوچک‌تراست و با نماد

$$a < c$$

$$b < c$$

نشان می‌دهیم. از سوی دیگر c را بزرگ‌تراز a و b می‌گوییم و می‌نویسیم

$$c > a$$

$$c > b$$

از اصول خطی انطباق به سادگی نتیجه می‌شود که با توجه به تعریف جمعی که در بالا ارائه شد، خاصیت شرکت‌پذیری، یعنی

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

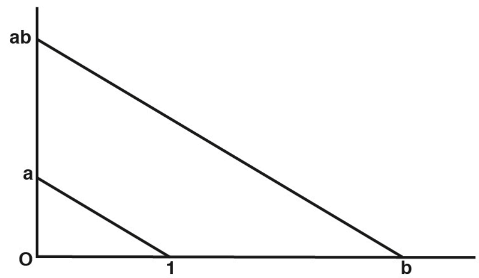
و همچنین خاصیت جابه‌جایی

$$a + b = b + a$$

برقرار است.

برای تعریف ضرب دو پاره‌خط a و b هیلبرت از روش زیر استفاده می‌کند:

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.122476.1363



ابتدا پاره‌خطی را انتخاب کرده که در طول بحث ثابت خواهد بود و آن را با ۱ نشان می‌دهیم. در یک سوی یک ضلع زاویه قائمه از رأس O پاره‌خط‌های ۱ و b را جدا کرده و در ضلع دیگر از رأس O ضلع a را جدا می‌کنیم. پاره خط a را به ۱ وصل و از b خط موازی این خط اخیر رسم می‌کنیم. این پاره خط، از ضلع دیگر زاویه پاره‌خطی مثل c جدا می‌کند. این پاره‌خط c را ضرب a, b می‌گوییم و این رابطه را به صورت

$$c = ab$$

نمایش می‌دهیم. سپس او با استفاده از قضیه پاسکال، جابه‌جایی و شرکت‌پذیری و پخشی ضرب را ثابت می‌کند. و بلافاصله قضیه مهم تالس در مورد نسبت‌ها را بدون استفاده از بنداشت پیوستگی (ارشمیدس) ثابت می‌کند.

یکی دیگر از هدف‌های هیلبرت اثبات قضیه کیلینگ[۱۴] و شور بدون استفاده از بنداشت ارشمیدس بود:

قضیه ۲ (کیلینگ ـ شور). *اگر مستطیلی را با کمک خطوط راست به مثلث‌هایی تجزیه کنیم و اگر یکی از این مثلث‌ها را حذف کنیم، غیرممکن است که با باقی مثلث‌ها، مستطیل اولیه را از نو بازسازی کنیم.*

هیلبرت برای اثبات این قضیه تئوری مساحت را در هندسه اقلیدسی، در غیاب اعداد و با کمک جبر پاره‌خط‌ها بازسازی می‌کند. به این منظور او سه مفهوم کلیدی را برای چندضلعی‌ها معرفی می‌کند: هم‌مساحت بودن، هم‌محتوا بودن و اندازه مساحت.

تعریف ۳. *دو چندضلعی هم‌مساحت[۱۵] گفته می‌شود، هرگاه بتوان آن‌ها را به تعداد متناهی مثلث به گونه‌ای تجزیه کرد که مثلث‌ها نظیر به نظیر قابل انطباق باشند.*

تعریف ۴. *دو چند ضلعی هم‌محتوا[۱۶] گفته می‌شود هرگاه بتوان با اضافه کردن چند ضلعی‌های هم‌مساحت به آن‌ها، دو چندضلعی هم‌مساحت به دست آید.*

تعریف ۵. *با توجه به ضرب پاره‌خط‌ها، نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع نظیر مثلث Δ را اندازه مساحت مثلث[۱۷] Δ می‌گوییم و با $F(\Delta)$ نشان می‌دهیم. این مفهوم مستقل از انتخاب قاعده و ارتفاع نظیر است. اندازه مساحت چندضلعی از جمع اندازه مساحت مثلث‌های افراز شده دلخواهی از آن به دست می‌آید.*

هیلبرت معادل بودن مفهوم هم‌محتوایی و اندازه مساحت را بدون استفاده از اصل ارشمیدس نشان می‌دهد و به عنوان نتیجه‌ای سرراست، قضیه کیلینگ ـ شور را نتیجه می‌گیرد.

باقی کتاب به دو مبحث عمده می‌پردازد. هیلبرت تکرار آنچه در نیمه اول با قضیه پاسکال انجام شده بود، را این بار با قضیه دزارگ به انجام می‌رساند. در عین شباهت‌ها اما این دو قضیه معادل هم نیستند و دستگاهی عددی

[14] W. Killing (1847-1923) [15] Equal area [16] Equal content [17] Measure of area

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.122476.1363

که با کمک قضیه دزارگ ساخته می‌شود، در غیاب بنداشت ارشمیدس، خاصیت جابه‌جایی ضرب را ندارد. اما قضیه شگفت‌انگیزی که او در این بخش ثابت می‌کند، این حقیقت است که قضیه دزارگ را برای هندسه مسطحه می‌توان، به عنوان نتیجه‌ای از حذف بنداشت‌های مربوط به فضا دانست. یعنی قضیه دزارگ که قضیه‌ای در هندسه مسطحه است، معادل با مجموعه بنداشت‌های هندسه اقلیدسی درباره هندسه فضایی است که در بنداشت‌های گروه اول شامل اصل‌های ۷–۳ بیان شده‌اند.

کتاب با بحثی درباره ترسیمات هندسی و امکان و نحوه آن‌ها به پایان می‌رسد. در این بخش نیز هیلبرت به شیوه‌ای خیره‌کننده، یکی از قضایای خود در نظریه جبری اعداد را ـ که درباره جمع عناصر یک میدان عددی به صورت جمع چهار مربع است،ـ به کار می‌گیرد تا درباره امکان ترسیم به کمک ابزار خط‌کش و انتقال‌دهنده پاره‌خط، بحث کند.

۳. نتیجه

کتاب مبانی هندسه هیلبرت را باید الگوی بی‌بدیل صورت‌گرایی در ریاضی دانست. مفاهیم تعریف نشده نشان می‌دهند، در یک دستگاه اصول موضوعه، ماهیت اشیا اهمیتی ندارند، بلکه روابط بین آن‌ها سازنده جهان هستند. از این رو این صورت‌گرایی ترجمان کاملی از جهان است. هرچند این باور، بعدها به سختی آسیب دید، اما کتاب مبانی هندسه نمونه‌ای موفق از این فلسفه است. این کتاب جان تازه‌ای به هندسه اقلیدسی می‌بخشد و امکانات نامکشوف آن را در برابر دید خوانندگان قرار می‌دهد. خواندن این کتاب چه برای علاقه‌مندان و چه برای ریاضیدانان حرفه‌ای تجربه‌ای بی‌همتاست.

در پایان لازم به ذکر است که از زمان نگارش این کتاب شرح‌های متعددی بر آن نوشته شده است. برای نمونه خواننده می‌تواند به مراجع [۶، ۷] نگاه کند.

۴. تشکر وقدردانی

از داور محترم بابت نظرات مفیدشان در بهبود این مقاله سپاسگزارم. از خانم مهدیس فتحی که زحمت تبدیل نسخه اولیه به نسخه قابل چاپ برای مجله را کشیدند، قدردانی می‌کنم.

مراجع

[1] L. Corry, *David Hilbert and axiomatization of physics*, (1898-1918), Dordrecht: Kluwer, 2004.

[2] J. Dieudonneé, *History of algebraic geometry*, translated by: J. Saly, Wadsworth series, 1985.

[3] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, translated by: E. I. Townsend, Illinois, 1950.

[4] E. H. Moore, On the projective axioms of geometry, *Trans. AMS*, **3**(1902) 142–158.

[5] H. Poincaré, *Science and Hypothesis*, translated by W. J. G, The Walter Scott publishing Co., 1905

[6] H. Poincaré, Poincaré's review of Hilbert's " foundations of geometry", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **10** (1903) 1–23.

[7] J. Sommer, Hilbert's Foundations of Geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6** (1900) 287–299.

[8] A. Tarski, *A decision method for Elementary algebra and geometry*, University of California press, 1951.

[۹] آی. ام. یاگلوم، *تبدیلهای هندسی*، جلد سوم، ترجمه: م. شفیعیها، ریاضیات پیش‌دانشگاهی(۲۴)، نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹.

[۱۰] ک. همپل، *هندسه و علم تجربی*، ترجمه: ش. اعتماد، فصلی در کتاب دیدگاه‌ها و برهان‌ها، انتشارات مرکز، چاپ سوم، ۱۳۹۳، صص.۲۱۲—۲۳۰.

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.122476.1363

خسرو منصف‌شکری
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
k_shokri@sbu.ac.ir

نویسنده متولد سال ۱۳۵۹در شهر رشت است. وی مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد خود را در رشته ریاضی محض و در دانشگاه صنعتی شریف گذرانده و دکترای خود را در دانشگاه بن و موسسه تحقیقاتی ماکس پلانک به پایان رسانده‌است.