

یک رویکرد ترکیبیاتی از قضیه ویلسون برای گروه‌های آبلی متناهی

چیس ساوسیر

مترجمین: علیرضا خلیلی اسبویی* و سید صادق صالحی امیری

چکیده. در این مقاله قصد داریم با استفاده از استدلال‌های شمارشی ساده و غیرمستقیم، بدون استفاده از قضایایی چون لاگرانژ و کوشی یا حتی مفاهیم اساسی جبر مانند زیرگروه، گروه خارج قسمت یا هم‌ریختی، نتایجی در نظریه گروه‌ها به دست آوریم. یادآوری می‌کنیم که بر اساس قضیه ویلسون اگر p عددی اول باشد آن‌گاه $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ که در آن $(p-1)!$ حاصل ضرب یکال‌ها به پیمانه p است. این مسئله در حالت کلی مطالعه شده است و به این ترتیب این سوال مطرح شده است: برای گروه آبلی متناهی G ، درباره حاصل ضرب همه عناصر G چه می‌توان گفت؟ هر چند جواب سوال مشخص است، اما پیدا کردن آن در یک کتاب درسی استاندارد سخت است. لذا رویکرد خودمان را ارائه نموده و برای رویکرد دیگران مراجع مناسبی معرفی می‌کنیم.

۱. مقدمه

در ادامه یک گروه آبلی متناهی را با نماد G نشان می‌دهیم مگر آنکه خلافش بیان شود. عنصر همانی گروه G را با نماد 1 و حاصل ضرب همه عناصر G را با نماد $p(G)$ نشان می‌دهیم، به عبارت دیگر:

$$p(G) = \prod_{g \in G} g.$$

ابتدا درباره $p(G)$ مطالب مقدماتی ارائه می‌کنیم، چون هر عضو G در $p(G)$ ظاهر می‌شود، می‌توان عناصری مانند g که $g^{-1} \neq g$ را در $p(G)$ حذف کرد؛ اگر عنصری با معکوسش یکسان باشد آن‌گاه نمی‌توان آن عنصر را در $p(G)$ حذف نمود؛ زیرا هر عنصر گروه فقط یک بار در $p(G)$ ظاهر می‌شود. از طرفی یک عنصر مانند g معکوس خودش است اگر و فقط اگر مرتبه g کمتر یا مساوی ۲ باشد؛ بنابراین حاصل ضرب‌ها در $p(G)$ را دقیقاً می‌توان به حاصل ضرب عناصر از مرتبه ۲ کاهش داد. آن‌چه که بیان شد را می‌توان به شرح ذیل خلاصه کرد.

لم کاهش یافته. برای هر گروه آبلی G ، $p(G) = \prod_{|g|=2} g$.

عبارات و کلمات کلیدی. قضیه ویلسون، قضیه اوایلر، گروه آبلی، اصل لانه کبوتری تعمیم یافته.

دبیر تخصصی رابط: علیرضا عبدالحی

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۷

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.120097.1348>

Chase Saucier, A Combinatorial Approach to Wilson's Theorem for Finite Abelian Groups, *Mathematics Magazine*, **91** (2) (2018) 97–102.

بنابراین وجود عناصر از مرتبه ۲ تنها مانع رسیدن به این است که $p(G) = 1$. نتیجه. اگر G عضوی از مرتبه ۲ نداشته باشد، آنگاه $p(G) = 1$. توجه می‌کنیم که قضیهٔ اوایلر دربارهٔ همبستگی ([۱]) بلافاصله می‌تواند به یک گروه آبلی متناهی توسعه پیدا کند. **قضیهٔ اوایلر.** فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی است؛ در این صورت برای هر $g \in G$ داریم $|g| = 1$. **اثبات.** یادآوری می‌کنیم که برای هر $g \in G$ ، نگاشت f با ضابطه $f(x) = gx$ یک تابع دوسویی روی G است؛ بنابراین داریم:

$$p(G) = \prod_{x \in G} x = \prod_{x \in G} gx = |G|p(G)$$

با حذف $p(G)$ از دو طرف تساوی نتیجه به دست می‌آید. $\square$

وقتی که مرتبه G فرد است: فرض کنید مرتبه G فرد است، از این رو $|G| = 2n + 1$. در قضیهٔ بعد نشان می‌دهیم که $p(G)$ عضو بدیهی گروه است.

قضیه ۱.۱. اگر $|G|$ فرد باشد، آنگاه $p(G) = 1$.

اثبات. اگر $g \in G$ به طوری که $g^2 = 1$ ، آنگاه با استفاده از قضیهٔ اوایلر

$$1 = |g| = g^{2n+1} = g^{2n}g = g.$$

با استفاده از لم کاهش یافته و اینکه G عضوی از مرتبه ۲ ندارد حکم حاصل می‌شود. $\square$

اکنون اثبات دیگری از قضیه (۱.۱) را با استفاده از اصل لانهٔ کبوتری تعمیم یافته ارائه می‌دهیم که نیاز به لم کاهش یافته و در نظر گرفتن عناصر مرتبه ۲ نیست. همچنین قضیهٔ اوایلر (برای گروه‌های از مرتبه فرد) را به روش جدیدی نتیجه می‌گیریم. برای انجام این کار به اصل شمارش زیر نیاز داریم (به فصل اول از [۲] مراجعه شود).

قضیه (اصل لانهٔ کبوتری تعمیم یافته). اگر n شی (با جایگزینی) از یک مجموعه با m شی انتخاب شوند و $\frac{n}{m} > r$ آنگاه یک شی حداقل $r + 1$ بار انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر، اگر n کبوتر وارد m لانه شوند و $\frac{n}{m} > r$ ، آنگاه دست‌کم یک لانه شامل حداقل $r + 1$ کبوتر است.

اثبات دیگر قضیه (۱.۱). فرض کنید z عضو دلخواهی از G باشد. مجموعه G_z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_z = \{\{x, y\} : x, y \in G, x \neq y, x \neq z \neq y\}$$

و فرض کنید $\phi : G_z \rightarrow G$ به صورت $\phi(\{x, y\}) = xy$ تعریف می‌شود. توجه کنید که $|G_z| = \binom{2n}{2} = 2n^2 - n$ ، نتیجه می‌دهد ϕ با $2n^2 - n$ انتخاب از یک مجموعه با $2n + 1$ عنصر ساخته می‌شود؛ زیرا ϕ نگاشتی از G_z به G است، ملاحظه می‌شود که خارج قسمت تقسیم $2n^2 - n$ بر $2n + 1$ برابر $n - 1$ و باقیمانده ۱ است. با استفاده از اصل لانهٔ کبوتری تعمیم یافته، حداقل n عنصر در G_z وجود دارند که به یک عنصر $g \in G$ نگاشته می‌شوند، بنابراین داریم:

$$(1) \quad g_1 g_2 = g_3 g_4 = \dots = g_{2n-1} g_{2n} = g$$

که در آن برای هر $1 \leq i \leq 2n$ داریم $g_i \neq z$ و دو عنصر ظاهر شده در هر حاصل ضرب مجزا از هم هستند. ادعا می‌کنیم که $\{g_1, g_2, \dots, g_{2n}\} = G \setminus \{z\}$ ، توجه داشته باشید که همه g_i ها مجزا هستند، زیرا در غیر این صورت اگر برای دو حاصل ضرب مانند ab و ac در معادله (۱) داشته باشیم $ab = ac$ آنگاه $b = c$ که با فرض اینکه $\{a, b\}$ و $\{a, c\}$ در G_z حاصل ضرب مجزا هستند در تناقض است. به عبارت دیگر $\phi^{-1}(g)$ افزای برای $G \setminus \{z\}$ است. همچنین از معادله (۱) می‌توان همه

روش‌های تجزیه g به دو عنصر که با z برابر نیستند را به دست آورد. علاوه بر آن نتیجه می‌دهد که $g = z^2$. برای اثبات فرض کنید $g = z^{-1}$ ، آنگاه باید $x = z$ ، در غیر این صورت x باید در یکی از حاصل ضرب‌های معادله (۱) ظاهر شود، آن را برابر با xg_i می‌گیریم و داریم $g = xz = xg_i$ که نتیجه می‌دهد $g_i = z$ که با انتخاب g_i در تناقض است؛ بنابراین داریم $g = z^{-1}$ که نتیجه می‌دهد $g = z^2$.

حال اگر $z = 1$ با توجه به توضیحات بالا و معادله (۱) همواره می‌توان هر عنصر غیربدیهی را با معکوس‌اش که با خودش برابر نیست را جفت نمود؛ بنابراین با توجه به آنچه در مقدمات بیان شد G نمی‌تواند عضو مرتبه ۲ داشته باشد. (در نتیجه عضو مرتبه زوج ندارد.)

از معادله (۱) و توضیحات بالا همچنین می‌توان نتیجه گرفت

$$(2) \quad p(G) = z \prod_{i=1}^n g_{2i-1} g_{2i-1} = z \prod_{i=1}^n z^2 = z^{2n+1} = z^{|G|}$$

□

حال چون z دلخواه است، با در نظر گرفتن $z = 1$ قضیه نتیجه می‌شود. نتیجه بعد از قضیه (۱.۱) و معادله (۲) به دست می‌آید.

نتیجه (قضیه اوایلر برای گروه از مرتبه فرد). فرض کنید G گروهی از مرتبه فرد باشد برای هر $z \in G$ ، $|z| = 1$. وقتی که مرتبه G زوج است: فرض کنید $|G| = 2n$ ، متاسفانه همان بحثی که در حالت فرد ارائه شد را نمی‌توان به طور

کامل در این حالت نیز ارائه کرد. برای عضو دلخواه $z \in G$ ، تعداد عناصر $\{z\} \setminus G$ فرد هستند؛ بنابراین عضوی مانند $z \in G \setminus \{z\}$ وجود دارد که نمی‌توان جفتی برای آن پیدا نمود. اگر بخواهیم با جدا کردن x, y و انتخاب جفت‌ها از $G \setminus \{x, y\}$ مشکل را حل کنیم، اصل لانه کبوتری تعمیم یافته، فقط وجود $n - 2$ حاصل ضرب را تضمین می‌کند. در هر صورت با قطعیت صحبت کردن سخت است، چون نمی‌توان کنترل کرد که کدام عناصر از جفت شدن خارج می‌شوند؛ بنابراین از لم کاهش یافته استفاده کرده و $p(G)$ را به حاصل ضرب عناصر از مرتبه ۲ کاهش می‌دهیم.

ابتدا نشان می‌دهیم که G دارای عنصری از مرتبه ۲ است. چون مرتبه G زوج است با حذف عضو همانی، عناصر باقیمانده فرد هستند. عناصری که از مرتبه ۲ نیستند با ضرب در معکوسشان حذف می‌شوند، بقیه عناصری که باقی می‌مانند تعدادشان فرد است؛ بنابراین G حداقل دارای یک عنصر مرتبه ۲ است.

توجه کنید اگر G دارای یک عضو منحصر بفرد از مرتبه ۲ مانند z باشد، آنگاه با استفاده از لم کاهش یافته $p(G) = z$. در ادامه فرض کنید $A = \{g \in G : |g| = 2\}$ و $|A| = 2m + 1$. چون $1 \notin A$ پس A زیرگروه G نیست. مشابه حالت فرد از اصل لانه کبوتری تعمیم یافته استفاده می‌کنیم. عضو دلخواه $z \in A$ را انتخاب کرده و فرض می‌کنیم:

$$A_z = \{\{x, y\} : x, y \in A, x \neq y, x \neq z \neq y\}$$

چون حاصل ضرب هر دو عضو مجزا از مرتبه ۲ عضوی از مرتبه ۲ است داریم $\phi(A_z) \subseteq A$. با استفاده از اصل لانه کبوتری تعمیم یافته می‌توان m حاصل ضرب برابر زیر را به دست آورد:

$$(3) \quad a_1 a_2 = a_3 a_4 = \dots = a_{2m-1} a_{2m} = a \in A$$

جائیکه a_i ها مجزا و مساوی z نیستند. مشابه حالت فرد معادله (۳) همه تجزیه‌های a به حاصل ضرب دو عضو A ، مجزا از z را مشخص می‌کند. می‌توان نتیجه گرفت $a = z$ ؛ زیرا در غیر این صورت اگر $a \neq z$ آنگاه a باید با عنصری مانند x از مرتبه ۲ برابر باشد. مشابه حالت فرد x باید در یکی از m حاصل ضرب ظاهر شود، آنرا xa_i در نظر می‌گیریم، پس داریم $xa_i = a = x$ که نتیجه می‌دهد $a_i = 1$. چون a_i از مرتبه ۲ است یک تناقض حاصل می‌شود. با استفاده از معادله (۳) و این که $a = z$ داریم $p(G) = z^{m+1}$.

اگر $m + 1$ فرد باشد، آنگاه چون z از مرتبه ۲ است $p(G) = z$. با توجه به آنچه که در ابتدای این بخش گفته شد $p(G) = z$ زمانی امکان پذیر است که z تنها عضو مرتبه ۲ در G باشد.

اگر $m + 1$ زوج باشد، آنگاه $p(G) = 1$. با در نظر گرفتن این نتایج و قضیه (۱.۱)، قضیه زیر ثابت می شود.
قضیه (قضیه ویلسون برای گروه های آبلی متناهی). برای هر گروه آبلی متناهی G ، اگر G دارای یک عضو منحصر بفرد از مرتبه ۲ باشد، آنگاه $p(G) = z$ ، در غیر این صورت $p(G) = 1$.

با افزودن عضو همانی به مجموعه A ، گروه آبلی مقدماتی $H = \{g \in G : |g| \leq 2\}$ به دست می آید که دارای (با استفاده از قضیه کوشی [۵]) مرتبه $|H| = 2^r$ است که در آن $r \geq 1$ عددی صحیح است. چون $|A| = 2m + 1$ داریم:

$$2(m + 1) = 2m + 2 = |\{1\} \cup A| = |H| = 2^r.$$

بنابراین $m + 1$ فرد است اگر و فقط اگر $r = 1$ ، که در قسمت قبل هم به این نتیجه رسیده بودیم.
 بالاخره، توجه کنید که در قضیه ویلسون برای گروه های آبلی متناهی اشاره ای به اعداد اول نشده است، همچنین از نظریه حلقه ها نیز استفاده نشده است. قضیه کلاسیک ویلسون را نمی توان بلافاصله از قضیه ویلسون برای گروه های آبلی متناهی نتیجه گرفت. ابتدا باید بررسی کنیم که اعداد صحیح کمتر از عدد اول p یک گروه ضربی به پیمانه p تشکیل می دهند، سپس باید نشان داد که $1 -$ تنها عنصر مرتبه ۲ است. در ادامه اثبات این حکم آمده است.

اثبات. فرض کنید p عددی اول است. توجه کنید عنصر x از مرتبه ۲ در گروه U_p شامل یکال های به پیمانه p در معادله $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ صدق می کنند، در نتیجه

$$x^2 - 1 \equiv (x + 1)(x - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

معادله اخیر و فرض این که p عددی اول است نتیجه می دهد $p \mid (x + 1)$ یا $p \mid (x - 1)$. بنابراین $1 -$ تنها عنصر از مرتبه ۲ در U_p است. با استفاده از لم کاهش یافته قضیه کلاسیک ویلسون نتیجه می شود. $\square$

یک رویکرد غیر مستقیم: فرض کنید G گروه متناهی دلخواه (شاید غیر آبلی) و $h \in G$ از مرتبه ۲ است. توجه کنید برای عناصر دلخواه $g_1, g_2 \in G$ اگر $hg_1 = g_2$ و فقط اگر $hg_2 = g_1$ ، که نشان می دهد نگاشت $f_h(g) = hg$ نگاشتی از مرتبه ۲ است، یعنی برای هر $g \in G$ ، $f_h^2(g) = g$. همچنین f_h دارای هیچ نقطه ثابتی نیست، به عبارت دیگر برای هر $g \in G$ ، $f_h(g) \neq g$. f_h یک جفت از G تعریف می کند (هر عنصر با تصویرش تحت f_h جفت است) از این رو مرتبه G باید زوج باشد. بنابراین یک گروه دلخواه از مرتبه فرد نمی تواند عنصری از مرتبه زوج داشته باشد. (توجه کنید که موارد فوق حالت خاصی از قضیه لاگرانژ است. جفت شدن ایجاد شده توسط f_h یک افزای از G به هم دسته های زیرگروه $\langle h \rangle = \{1, h\}$ است.)

حال فرض کنید G آبلی است. اگر $|G|$ فرد باشد، می توان روابط معادله (۱) را به صورت زیر ساخت: عضو دلخواه $z \in G$ را در نظر بگیرید و توجه کنید نگاشت $\varphi_z(g) = g^{-1}z^2$ عضوی از مرتبه ۲ است. علاوه بر این $\varphi_z(g) = z$ اگر و فقط اگر $g = z$. برای اینکه نشان دهیم φ_z یک جفت از عناصر $G \setminus \{z\}$ را ایجاد می کند، فرض کنید $g \neq z$ ، آنگاه $\varphi_z(g) \neq g$ یا اینکه $(g^{-1}z)^2 = (g^{-1})^2z^2 = 1$ ، که نتیجه می دهد $g^{-1}z$ عنصری از مرتبه ۲ است؛ بنابراین جفت ها در معادله (۱) ظاهر می شوند.

اگر $|G|$ زوج باشد، می توان روابط معادله (۳) را به شکل زیر ایجاد کرد. مجدداً قرار دهید:

$$A = \{g \in G : |g| = 2\}.$$

عضو $z \in A$ را انتخاب نموده و یادآوری می کنیم که نگاشت $f_z(a) = za$ عضوی از مرتبه ۲ بدون نقطه ثابت است به طوری که $f_z(A \setminus \{z\}) \subseteq A \setminus \{z\}$ ؛ بنابراین f_z یک زوج از $A \setminus \{z\}$ را ایجاد می کند که جفت ها در معادله (۳) ظاهر می شوند.

با توجه به اطلاعات نویسنده، این روش ساده ترین راه برای رسیدن به قضیه ویلسون برای گروه های آبلی متناهی است.

یک اثبات استاندارد: با استفاده از لم کاهش یافته، کافی است حاصل ضرب‌ها روی گروه آبلی مقدماتی

$$H = \{g \in G : |g| \leq 2\}$$

را در نظر بگیریم.

با استفاده از قضیه اساسی گروه‌های آبلی منتهای H حاصل ضرب مستقیمی از گروه‌های دوری از مرتبه ۲ است. در واقع هر p -گروه آبلی مقدماتی H به صورت مجموعی از فضای برداری $\mathbb{F}_p$ روی میدان $\mathbb{F}_p$ نوشته می‌شود که در آن p اول است و برای هر $h \in H$ ، $h^p = 1$. توجه کنید برای این تجزیه نیازی به استفاده کامل از قضیه اساسی گروه‌های آبلی منتهای نیست (مرجع [۵] فصل ۱ بخش ۸ تمرین ۶ را ببینید).

اگر $|H| = 2^n$ آن‌گاه $H \cong \mathbb{F}_2 \times \dots \times \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2^n$ و بدون نقطه ثابت $\sigma : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ را به صورت $\sigma(h) = (1, 1, \dots, 1) - h$ تعریف می‌کنیم که قسمت اول تفاضل، برداری است که همه مولفه‌های آن ۱ است. حال جمع همه جفت‌های ایجاد شده توسط σ که تعداد آن‌ها برابر 2^{n-1} است را به دست می‌آوریم:

$$p(G) = \sum_{h \in H} h = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} [h_i + \sigma(h_i)] = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} (1, 1, \dots, 1) = (2^{n-1}, 2^{n-1}, \dots, 2^{n-1}).$$

اگر $n > 1$ جمله آخر، بردار صفر به پیمانه ۲ است و اگر $n = 1$ آن‌گاه جمع برابر با ۱ به پیمانه ۲ است، که عنصر منحصر بفرد از مرتبه ۲ خواهد بود.

تعمیم دیگری از قضیه ویلسون: گاوس قضیه ویلسون را به حاصل ضرب یکال‌های گروه U_m برای هر عدد صحیح $m > 2$ توسعه داد [۸]. در حالت خاص اگر $m = 4, p^b, p^{2b}$ که در آن p یک عدد اول و b یک عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه $p(U_m) \equiv -1 \pmod{m}$ ، در غیر این صورت $p(U_m) \equiv 1 \pmod{m}$. تعمیم دیگری از قضیه ویلسون در [۷] ارائه شده است، که در قضیه زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه. برای هر عدد اول p و هر عدد طبیعی n که $n \geq p$ داریم:

$$\sum_{k=1}^t \frac{n!}{p^k(n-kp)!k!} \equiv -1 \pmod{p}$$

که در آن t بزرگترین عدد طبیعی است که $tp \leq n$.

اگر در فرمول بالا فرض کنیم $n = p$ ، می‌توان قضیه کلاسیک ویلسون را به دست آورد. همچنین قضیه زیر نیز از [۷] در حالت $n = p$ قضیه ویلسون را نتیجه می‌دهد.

قضیه. اگر $n/2 < p_1 < p_2 < \dots < p_k < n$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و p_i ها اعدادی اول باشند آن‌گاه:

$$\sum_{t=1}^k \frac{n!}{p_t(n-p_t)!} \equiv -1 \pmod{p_1 p_2 \dots p_k}.$$

مقاله کلارک گنجینه‌ای از شکل‌های مختلف قضیه ویلسون است، در آن مقاله بیان می‌شود که "تا آنجا که من می‌دانم قضیه ویلسون برای گروه‌های آبلی منتهای اولین بار توسط ریاضیدان آمریکایی میلر اثبات شد؛ اما من نتوانستم آن را در هیچ کتاب درسی پیدا کنم".

وقتی G غیر آبلی است: وقتی که G غیر آبلی است، $p(G)$ در حالت کلی به مرتبه عناصر در حاصل ضرب بستگی دارد. جزئیات را در [۴] ببینید. با این وجود باید سعی کنیم (بدون استفاده از قضیه لاگرانژ یا عناصر مرتبه ۲) با ایده ذکر شده در روش دوم اثبات قضیه (۱.۱) نشان دهیم که گروه‌های غیر آبلی از مرتبه فرد نمی‌توانند عنصر از مرتبه زوج داشته باشند. اگر بتوانیم نشان دهیم که هر عنصر غیربدیهی با معکوس مجزا یک جفت تشکیل می‌دهد می‌توان نتیجه گرفت که عضو مرتبه ۲ وجود ندارد.

حال باید توجه کنیم که یک عنصر ممکن است بیش از یک بار (اما حداکثر دوبار) در جفت‌های به‌دست آمده ظاهر شود. از آن‌جا که جفت‌های مرتب شده شمارش می‌شود، جفت‌های بیشتری خواهیم داشت. متأسفانه اصل لانه کبوتری تعمیم یافته ما را به یک جفت کوتاه می‌رساند!

به طور دقیق‌تر فرض کنید $|G| = 2n$ و $G_1 = \{(a, b); a, b \in G, a \neq b, b \neq 1\}$ ، آنگاه $|G_1| = 2n(2n - 1)$ و اصل لانه کبوتری تعمیم یافته نتیجه می‌دهد $2n - 1$ حاصل ضرب از عناصر غیربدیهی برابرند که برای جبران کمبود عناصری که دوبار در بین این حاصل ضرب تکرار می‌شوند کافی نیست. یعنی ممکن است یک عضو غیربدیهی $g \in G$ در بین حاصل ضرب‌ها ظاهر نشود؛ بنابراین مشابه حالت آبی نمی‌توانیم استدلال کنیم که همه آن‌ها باید برابر ۱ باشند. اگر $2n$ حاصل ضرب برابر ۱ داشته باشیم، باید بتوان استدلال کرد که هر عنصر غیربدیهی در بین حاصل ضرب‌ها ظاهر می‌شود، چون یک عنصر حداکثر دو بار در بین آن‌ها ظاهر می‌شود (با استفاده از اصل لانه کبوتری) و همان‌گونه قبلاً داشتیم این باید نتیجه دهد که همه حاصل ضرب‌ها برابر ۱ است.

سوال: آیا روش دیگری برای کم کردن این بحث وجود دارد (بدون استفاده از قضیه لاگرانژ)؟

۲. تشکر و قدردانی

مترجمین از اعضای محترم نشریه ریاضی و جامعه، به خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌شان کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- [1] G. E. Andrews, *Number Theory*, Dover Publications, New York, 1994.
- [2] M. Bóna, *A Walk Through Combinatorics: An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, 2nd ed., World Scientific, Singapore, 2006.
- [3] P. L. Clark (n. d.), *Wilson's theorem: An algebraic approach*, [http://alpha.math.uga.edu/~sim\\$pete/wilson-easy.pdf](http://alpha.math.uga.edu/~sim$pete/wilson-easy.pdf).
- [4] J. Dénes and P. Hermann, On the product of all elements in a finite group, *North-Holland Math. Studies*, **65** (1982) 105–109.
- [5] T. Hungerford, *Algebra*, Springer Verlag, New York, Inc 1974.
- [6] M. Isaacs, *Algebra: A Graduate Course*, CA: Cole Publishing Company, Pacific Grove, 1994.
- [7] A. Khurana and D. Khurana, A theorem of Frobenius and its applications, *Math. Mag.*, **78** (2005) 220–225.
- [8] G. A. Miller, A new proof of the generalized Wilson's theorem, *Ann. Math.*, **4** (1903) 188–190.
- [9] O. Ore, *Number Theory and Its History*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 1948.

علیرضا خلیلی اسبویی

گروه آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

a.khalili@cfu.ac.ir

علیرضا خلیلی اسبویی متولد آذر ماه سال ۱۳۵۱ در شهر بابل است. وی دوره کارشناسی دبیری ریاضی را در سال‌های ۱۳۷۱ تا ۱۳۷۵ در دانشگاه خوارزمی گذراند. در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد دانشگاه تربیت مدرس رشته ریاضی محض (گرایش جبر) شد و در سال ۱۳۷۷ از رساله خود در زمینه مجموع درجات سرشت‌های تحویل ناپذیر تحت راهنمایی دکتر علی ایرانمنش دفاع نمود. سال ۱۳۸۷ دوره دکتری در گرایش جبر (نظریه گروه‌های متناهی) را در دانشگاه علوم و تحقیقات تهران تحت نظر دکتر علی ایرانمنش و دکتر ابوالفضل تهرانیان آغاز نمود و در سال ۱۳۹۱ از پایان نامه خود دفاع نمود. وی از سال ۱۳۹۵ تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه فرهنگیان است.



سید صادق صالحی امیری

گروه ریاضی، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی، بابل، ایران

salehiss@baboliau.ac.ir

سید صادق صالحی امیری متولد شهریور ماه سال ۱۳۵۹ در شهر بابل است. وی دوره کارشناسی ریاضی محض را در سال‌های ۱۳۷۸ تا ۱۳۸۲ در دانشگاه پیام‌نور بابل گذراند. در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران) رشته ریاضی محض (گرایش جبر) شد و در سال ۱۳۸۴ از رساله خود در زمینه گراف اول گروه‌های ساده پراکنده تحت راهنمایی دکتر بهروز خسروی دفاع نمود. سال ۱۳۸۷ دوره دکتری در گرایش جبر (نظریه گروه‌های متناهی) را در دانشگاه علوم و تحقیقات تهران تحت نظر دکتر علی ایرانمنش و دکتر ابوالفضل تهرانیان آغاز نمود و در سال ۱۳۹۱ از پایان نامه خود دفاع نمود. وی از سال ۱۳۸۸ تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد بابل است.

