

قضیه اعداد اول

محمد رضا اسفندیاری

چکیده. قضیه اعداد اول یکی از مهمترین و برجسته‌ترین قضایا در نظریه اعداد است. این قضیه که درباره‌ی توزیع اعداد اول است و یک رابطه‌ی هم‌ارز و مجانبی برای تعداد اعداد اول مشخص می‌کند؛ نخست توسط گاوس حدس زده شد و بعد از حدود صد سال سرانجام درستی این فرضیه به اثبات رسید. قضیه اعداد اول همچنان از اهمیت والایی برخوردار است چرا که تقریب دقیق‌تر این قضیه، یعنی قضیه اعداد اول با جمله خطا، منوط به درستی فرضیه ریمان است که تا به امروز به‌عنوان یکی از بزرگ‌ترین مسائل حل نشده در ریاضیات مطرح است. در این نوشته ضمن اشاره تاریخی به این مساله و فرایند اثبات آن، اثباتی نسبتاً مختصر که توسط دان زگیلر (Don Zagier) در جشن صد سالگی ارائه داده است را شرح می‌دهیم.

۱. اعداد اول و قضیه اعداد اول

«جی.اچ. هاردی»^۱ یکی از ریاضیدانان خوشنام قرن بیستم، چنین گفته است: «فکر نمی‌کنم کسی بتواند بیشتر و عمیق‌تر از آن میزان که من به نظریه اعداد علاقمندم، به چیزی علاقه پیدا کند». بسیاری از کسانی که ریاضیدان حرفه‌ای نیستند نیز به جذابیت نظریه اعداد به‌ویژه اعداد اول معتقدند. البته اعداد اول نیز مثل بقیه اعداد، عدد هستند؛ اعدادی مثل ۳ و ۵ که فقط بر خودشان و ۱ بخش پذیرند. آنها اعدادی هستند که از حاصلضربشان می‌توانیم همه اعداد را به‌دست آوریم و به همین دلیل آنها را اغلب «بلوک‌های سازنده دستگاه اعداد» می‌نامند. تمایز بین دو نوع از اعداد، یعنی آنهایی که می‌سازند و آنهایی که خود ساخته می‌شوند، نسبتاً دیر به ریاضیات راه پیدا کرد اما با این حال مفهوم قدیمی است. نخستین تعریف از اعداد اول در کتاب «اصول اقلیدس»، (در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد) آمده است. اگر چه، بسیار پیش‌تر از آن معلوم شده بود که برخی اعداد خطی هستند و برخی اعداد چهارگوشه‌اند. (شکل ۱ را ببینید).

کلمات کلیدی: اعداد اول، تابع زتای ریمان، حاصلضرب اوایلر، ادامه تحلیلی، فرضیه ریمان.

دبیر تخصصی رابط: مسعود آیین‌نژاد

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۰۳

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118119.1330>

^۱G. H. Hardy

2	3	5	7	4	6	8	9
○	○	○	○	○○	○○○	○○	○○○
○	○	○	○	○○	○○○	○○	○○○
	○	○	○			○○	○○○
		○	○			○○	
		○	○				
			○				
			○				
			○				
			○				

شکل ۱: نمایش اعداد به صورت خطی و چهارگوشه

نخستین پرسشی که در مورد اعداد اول مطرح شد و پاسخ داده شد، این بود که: «تعداد اعداد اول چند تا است؟» به بیان دقیق ریاضی، پرسش این بود که آیا مجموعه اعداد اول متناهی است یا نامتناهی؟ پاسخ به این پرسش در میزان جذابیت اعداد اول نقش بسزایی دارد. اگر اعداد اول متناهی باشند به اندازه یک مجموعه نامتناهی جالب توجه نیستند. اقلیدس در کتاب خود اثبات جالبی برای نامتناهی بودن اعداد اول ارائه داد. اثبات نامتناهی بودن اعداد اول به دست اقلیدس درست به سادگی اثبات نامتناهی بودن اعداد طبیعی است. اساس کار به این صورت است که اگر گروهی از اعداد اول را در هم ضرب کنیم و عدد n را به عنوان پاسخ به دست آوریم، عددی که بلافاصله بعد از n می آید (به زبان ریاضی $n+1$) بر هیچ یک از اعداد اولی که در هم ضرب کردیم بخش پذیر نیست، پس یا اول است و یا عوامل اولی غیر از عوامل n دارد. دلیل این امر آن است که به جز یک، که عدد اول نیست، هیچ عدد دیگری وجود ندارد که n و $n+1$ هر دو بر آن بخش پذیر باشند. اعداد اول با ۲ و ۳ پیشی می گیرند، تا ۱۳ تعدادشان با اعداد مرکب برابر می شود، در ۱۷ عقب می افتند و از اینجا به بعد عقب تر و عقب تر می مانند. در دنباله نامتناهی اعداد طبیعی مکان هایی وجود دارد که یک میلیون، یک میلیارد، یک تریلیون، اصلاً «هر تعداد که دوست داشته باشیم» اعداد مرکب بی وقفه و بدون هیچ عدد اولی پشت سر هم می آیند. این محل ها را «برهوت اعداد اول»^۲ می نامند. اثبات وجود این زمین های بی سکنه به سادگی و بدون کاوش ریاضی امکان پذیر است. برای مثال فرض کنید که می خواهیم ۵ عدد مرکب متوالی داشته باشیم. به حاصل ضرب زیر توجه کنید:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

حال با اطمینان می توانیم بگوییم ۵ عدد متوالی ۷۲۶، ۷۲۵، ۷۲۴، ۷۲۳، ۷۲۲ مرکب هستند زیرا اعداد بالا به ترتیب از چپ بر ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر هستند.

با این حال، ریاضیدانان تا کنون نتوانسته اند نامتناهی بودن اعداد اول دوقلو (دو عدد اول متوالی به صورت p و $p+2$) را ثابت کنند. تا سال ۱۹۵۰ بزرگترین اعداد اول دوقلو شناخته شده ۶۴۹، ۰۰۹، ۰۰۰، ۰۰۰، ۱، و ۶۵۱، ۰۰۹، ۰۰۰، ۰۰۰، ۱ بودند. امروزه رایانه ها به کمک اپراتورهای خود به اعداد اول بسیار بزرگی دست یافته اند که قبلاً حتی کسی فکرش را هم نمی کرد. اکنون بزرگترین اعداد اول دوقلو $2996863034895 \times 2996863034895 + 1$ می باشد که ۳۸۸،۳۴۲ رقم دارد.

^۲Prime Deserts

به نظر می‌رسد که کشف نحوه وقوع اعداد اول بسیار سخت باشد. اگر یکان عددی ۱، ۳، ۷، یا ۹ باشد قادر نیستیم سریعاً تعیین کنیم آیا این عدد اول است یا خیر. همچنین با داشتن یک عدد که می‌دانیم اول است، نمی‌توانیم بگوییم عدد اول بعدی کدام است. اوایلر در این باره می‌گوید: «ریاضیدانان تا امروز بیهوده به دنبال کشف نظمی در دنباله اعداد اول بوده‌اند، و دلایلی داریم تا معتقد شویم این رازی است که هیچ‌گاه ذهن بشر بدان نفوذ پیدا نخواهد کرد».

اگر چه اعداد اول تا بی‌نهایت ادامه می‌یابند، اما در سوی بزرگ شدن اعداد به تدریج وقوع کمتر و کمتری دارند تا جایی که به تناقض می‌توان گفت علی‌رغم این که اعداد اول نامتناهی‌اند، اما تقریباً همه اعداد مرکب هستند. غلامحسین مصاحب در کتاب تئوری اعداد خود می‌گوید: «اعداد اول در میان اعداد طبیعی مانند واحه‌هایی دور افتاده در صحرایی پهناورند» [۱۴].

قضیه اعداد اول. با وجود آنکه توزیع اعداد اول در مقیاس کوچک بی‌قاعده به نظر می‌رسند، اما در مقیاس بزرگ نظم و قاعده‌های خاصی در بین آنها قابل مشاهده است. کاهش تعداد آنها آهسته و پیوسته است.

- در بین ۱۰ عدد نخست ۴ عدد اول وجود دارد، یعنی ۴۰٪
- در بین ۱۰۰ عدد نخست ۲۵ عدد اول؛ یعنی ۲۵٪
- در بین ۱۰۰۰ عدد نخست ۱۶۸ عدد اول؛ یعنی ۱۶۸٪
- در بین ۱۰۰۰۰ عدد نخست ۱۲۲۹ عدد اول؛ یعنی ۱۲۲۹٪
- در بین ۱۰۰۰۰۰ عدد نخست ۹۵۹۲ عدد اول وجود دارد یعنی ۹۵۹۲٪ اعداد.

اما الگوی این کاهش چگونه است؟

مهمترین تابع در این بحث «تابع شمارنده اعداد اول»^۳ یعنی $\pi(x)$ است که برابر با تعداد اعداد اول نابیشتر از x است. به عبارت دیگر $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ ، برای نمونه $\pi(10) = 4$. می‌دانیم که تعداد اعداد اول نامتناهی است. به زبان ریاضی اگر $x \rightarrow \infty$ آنگاه $\pi(x) \rightarrow \infty$. سؤالی که به طور طبیعی برای ریاضیدان‌ها مطرح شد، این بود که رشد مجانبی تابع $\pi(x)$ چیست؟ در واقع آیا یک تابع مقدماتی چون $f(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{f(x)} = 1,$$

به بیان ساده $\pi(x) \sim f(x)$.

حال به جدول زیر برای مقایسه مقادیر بین دو تابع توجه کنید:

³The Prime Counting Function

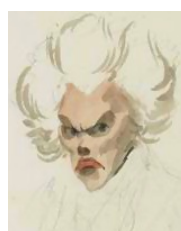
N	$\log N$	$N / \pi(N)$	% error
1,000	6.9077	5.9524	16.0490
1,000,000	13.8155	12.7392	8.4487
1,000,000,000	20.7232	19.6665	5.3731
1,000,000,000,000	27.6310	26.5901	3.9146
1,000,000,000,000,000	34.5378	33.6247	2.7156
1,000,000,000,000,000,000	41.4465	40.4204	2.5386

شکل ۲: مقایسه $N/\pi(N)$ با $\log N$

این چشمان تیزبین ریاضیدانان بزرگ قرن ۱۸ یعنی لژاندر^۴ و گاوس بود که تقریب‌های خوبی برای تابع $\pi(x)$ حدس زدند. گاوس با مشاهدات عددی و تهیه جدول‌های منظم در دسته‌هایی مرکب از ۱۰۰۰ عدد صحیح متوالی مانند جدول بالا، حدس زد

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \rightarrow \infty).$$

در اینجا منظور از $\log$ ، لگاریتم طبیعی است. این که از $\ln$ استفاده نمی‌کنیم، در ادبیات نظریه تحلیلی اعداد کاملاً مرسوم است.



شکل ۳: به ترتیب از راست، آدرین ماری لژاندر (۱۸۳۳ - ۱۷۵۲) و کارل فریدریش گاوس (۱۸۵۵ - ۱۷۷۷)

لژاندر ریاضیدان بزرگ فرانسوی حدود پنج سال بعد از گاوس و بدون اطلاع از حدس گاوس، برای اولین بار به‌طور رسمی در سال ۱۷۹۸ در کتابش تحت عنوان «رساله‌ای درباره‌ی نظریه اعداد» ادعا کرد

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A \log x + B}.$$

لژاندر در چاپ بعدی کتاب خود پیشنهاد داد که $A = 1$ و $B = -1/0.8366$ ، که بعدها نشان داده شد مقدار B نمی‌تواند درست باشد. یافته‌های گاوس طی نامه‌ای در سال ۱۸۴۹ به اطلاع انکه (Encke) منجم معروف

⁴ Adrien-Marie Legendre

رسید و در این زمان گاوس حدس بهتری نسبت به حدس اولیه خود ارائه داد. گاوس حدس زد که

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

که در آن $\text{Li}(x)$ انتگرال لگاریتمی است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

در واقع با استفاده از انتگرال گیری جز به جز می توان نشان داد:

$$\text{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{n! x}{\log^{n+1} x} + \int_2^x \frac{(n+1)!}{\log^{n+2} t} dt + C_n,$$

که در آن C_n یک ثابت مشخص است.

فرضیه گاوس به نام «قضیه اعداد اول»^۵ شناخته شده است؛ قضیه ای که شاید مهمترین حقیقت کشف شده در مورد اعداد طبیعی در دوران جدید است. جالب است که از بین صدها مساله و قضیه راجع به اعداد اول این قضیه به عنوان قضیه اعداد اول نامیده شده است. قضیه اعداد اول که به اختصار PNT نامیده می شود، به صورت زیر بیان می شود:

قضیه ۱.۱ (قضیه اعداد اول).

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

یا به طور معادل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

از قضیه اعداد اول احکام بسیاری استنتاج شده است. برای نمونه نتایج زیر را بلافاصله می توان بیان کرد:

- احتمال اول بودن عدد N تقریباً برابر است با $\frac{1}{\log N}$. وقتی که $N \rightarrow \infty$ احتمال اول بودن صفر است.
- اگر p_n ، n امین عدد اول باشد در این صورت $p_n \sim n \log n$.

گاوس با توجه به مشاهدات عددی و محاسبات اولیه، حدس زد که همواره $\pi(x) - \text{Li}(x) < 0$ است. امروزه اطلاعات بیشتری درباره ی رابطه ی میان $\pi(x)$ و $\text{Li}(x)$ در دست است. از میان آنها فقط به ذکر قضیه ی لیتل وود (Littlewood) می پردازیم که می گوید، اگر x بر مجموعه ی همه ی اعداد صحیح مثبت تغییر کند، آنگاه تفاضل $\pi(x) - \text{Li}(x)$ هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را بینهایت بار اختیار می کند. قضیه لیتل وود صرفاً یک قضیه ی وجودی است و تاکنون مقداری عددی برای x که به ازای آن $\pi(x) - \text{Li}(x)$ مثبت باشد، به دست نیامده است. شگفت آور این که کران بالا، برای نخستین بار x ای که در $\pi(x) > \text{Li}(x)$ صدق می کند پیدا شده است. چنین x ای کوچک تر از عددی با بزرگی غیر قابل تصور $e^{e^{e^{7.7 \times 10^8}}}$ است. این کران بالا، که اسکویز (Skewes) در سال ۱۹۳۳ آن را به دست آورد، به عدد اسکویز معروف است. به هر حال هنوز مقدار عددی مشخصی از x به طوری که $\pi(x) > \text{Li}(x)$ خارج از دسترس هر رایانه ای است [۱].

⁵The Prime Number Theorem

۲. تابع زتای ریمان

در فرایند اثبات قضیه اعداد اول، تابع زتای ریمان نقشی عمده و کلیدی دارد. در اینجا سعی داریم تاریخچه مختصر از این تابع را بیان کنیم و همچنین برخی از ویژگی‌های این تابع را بیان کنیم. نخست به سری همساز یا هارمونیک اشاره می‌کنیم. سری همساز

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

یکی از مهمترین سری‌ها در ریاضیات است. چرا که مثالی است از یک سری واگرا که جمله عمومی آن، $\frac{1}{n}$ ، همگرا به صفر است. اولین فردی که واگرایی این سری را اثبات کرده است نیکول اورسم (Nicole Oresme) در سال ۱۳۵۰ میلادی می‌باشد، به این ترتیب که نشان داد $S_{2n} \geq 1 + n(\frac{1}{2})$ و از این نامساوی نتیجه گرفت دنباله $\{S_n\}$ که دارای یک زیردنباله بی‌کران $\{S_{2n}\}$ است، واگراست. این اثبات برای قرن‌ها گمنام باقی‌ماند. بعد از او به ترتیب پیتر منگولی (Pietro Mengoli) در سال ۱۶۴۷، یوهان برنولی (Johann Bernoulli) در سال ۱۶۸۷ و بعدها یاکوب برنولی (Jakob Bernoulli)، اثبات‌هایی برای واگرایی این سری ارائه کردند [۶]. پیتر منگولی که خود اثباتی برای واگرایی سری همساز ارائه داده بود، در سال ۱۶۴۴ تعمیمی از این سری را معرفی کرد و پرسید که آیا مجموع وارون مربع‌های اعداد طبیعی همگراست و اگر همگراست به چه عددی همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = ?$$

این مساله در بین ریاضیدان‌ها به مساله بازل (Basel Problem) شناخته شده است. بازل نام یکی از شهرهای معروف در سوئیس و هم مرز با آلمان و فرانسه است. نام‌گذاری یک مساله به نام یک شهر جالب است و دلیل این نام‌گذاری احتمال زیاد به‌خاطر زادگاه اوایلر بوده است که اولین بار این مساله را حل کرد. برخی هم می‌گویند به دلیل این که برادران برنولی در دانشگاه شهر بازل فارغ‌التحصیل شده‌اند، بر این مساله این نام را نهادند. به هر حال این مساله، مانند خیلی از مساله‌های مهم ریاضی برای چندین سال بدون حل باقی‌ماند. برخی از ریاضیدان‌ها تلاش‌هایی برای حل آن انجام دادند، برای نمونه

- والیس (Wallis)، ۱۶۵۵: همگراست و من مقدار همگرایی آن را تا سه رقم اعشار می‌دانم.
- یاکوب برنولی (Jakob Bernoulli)، ۱۶۸۹: مقدار همگرایی کمتر از دو است.
- جان برنولی (Johann/Daniel Bernoulli)، ۱۷۲۱: تقریباً $\frac{8}{5}$ است.
- گلدباخ (Goldbach)، ۱۷۲۱: مقدار همگرایی بین $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{4}$ است.

منظور از حل مساله بازل تعیین مقدار تقریبی برای آن نبود، بلکه مساله پیدا کردن مقدار دقیق و با ارائه اثبات بود. سرانجام در سال ۱۷۳۵ اوایلر جوان به حل مساله نائل آمد و نشان داد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

ظاهر شدن مربع π که ماهیت هندسی دارد، باعث شگفتی و زیبایی این مساله شد، امروزه هر جا از زیبایی‌های ریاضیات صحبت می‌شود، معمولاً نامی از مساله بازل نیز مطرح می‌شود. اوایلر با استفاده از بسط تیلور $\sin x$ ،

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

و این که معادله $\sin x = 0$ جواب‌هایی به صورت $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ دارد، توانست مساله را حل کند. اوایلر همچنین دو اثبات دیگر برای این مساله در سال‌های ۱۷۴۱ و ۱۷۵۵ ارائه داد. وی نه تنها توان‌های ۲، بلکه توان‌های ۴، ۶، ۸ و همه توان‌های زوج در این سری را حل کرد. در واقع نشان داد به ازای هر $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k},$$

که در آن B_{2k} اعداد برنولی می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_m = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{B_k}{m-k+1}.$$

روش‌های حل اوایلر، الهام بخش برخی از کارهای وایرستراس در آنالیز و همچنین برخی از کارهای ریمان در توسعه تابع زتا و قضیه اعداد اول شد. امروزه چندین اثبات برای مساله بازل ارائه شده است. برای مثال به [۲] و [۱۱] رجوع کنید. برای خواننده علاقمند بیان می‌کنیم که به دست آوردن مقدار دقیق برای توان‌های فرد هنوز به عنوان یک مساله باز مطرح است. همچنین نشان داده شده است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q}.$$

برای مطالعه بیشتر به [۴] و [۷] مراجعه کنید.

غربال اراتستن^۶، در ریاضیات، الگوریتم ساده‌ای است که با کمک آن می‌توان اعداد اول بین اعداد مختلف را یافت. کشف این روش را به اراتستن (۲۷۶-۱۹۴ قبل از میلاد) دانشمند یونان باستان نسبت می‌دهند. به نظر می‌رسد غربال اراتستن نخستین تلاش روشمند برای جدا کردن اعداد اول از اعداد مرکب بوده است. همه جدول‌های اعداد اول و عوامل اول که بعدها ایجاد شدند، به نوعی بر اساس تعمیم همین روش بوده‌اند. روش کار این است که بعد از عدد دو مضرب‌های ۲ را حذف می‌کنیم؛ بعد از عدد سه، مضرب‌های ۳، بعد از عدد پنج، مضرب‌های ۵، و به همین ترتیب. شاهکار اصلی اوایلر این بود که به غربال اراتستن به زبان تحلیلی و آنالیز نگاه کرد و با الهام گرفتن از این روش، توانست فرمولی ارائه دهد که در نظریه تحلیلی اعداد به عنوان «کلید طلایی» شناخته شده است. در واقع یک پل بین اعداد اول و اعداد طبیعی برقرار کرد و به فرمول حاصلضرب اوایلر (یا اتحاد اوایلر) معروف است. اوایلر علاوه بر این، با استفاده از این فرمول نشان داد سری $\sum_p \frac{1}{p}$ واگراست. در واقع اثبات دیگری برای نامتناهی بودن اعداد اول ارائه داد.

^۶Sieve of Eratosthenes

قضیه ۱.۲ (فرمول حاصلضرب اویلر). برای $s > 1$ حقیقی داریم

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

که در آن حاصلضرب روی همه اعداد اول p است.

اثبات. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ برای $s > 1$ به طور مطلق همگراست بنابراین حاصلضرب

$$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

نیز همگراست. N را به قدر کافی بزرگ انتخاب کنید به طوری که برای $s > 1$ ثابت و $\varepsilon > 0$ ثابت داشته باشیم

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| < \varepsilon.$$

حال قرار دهید

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

بنابراین

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \dots,$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots,$$

$$\left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \dots.$$

با ادامه روند بالا مشابه غربال اراتستن، با فرض این که p_n ، n امین عدد اول باشد داریم:

$$\left(1 - \frac{1}{(p_N)^s}\right) \left(1 - \frac{1}{(p_{N-1})^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{(p_{N+1})^s} + \frac{1}{(p_{N+2})^s} + \dots$$

حال برای $n \geq N$ داریم

$$\left| \left(\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{(p_j)^s}\right) \right) \zeta(s) - 1 \right| < \varepsilon,$$

□

به این ترتیب با فرض $N \rightarrow \infty$ نتیجه مورد نظر حاصل می شود.

قضیه ۲.۲ (اویلر). مجموع $\sum_p \frac{1}{p}$ واگراست. به عبارت دیگر مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

اثبات اویلر. می خواهیم ثابت کنیم

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

توجه داشته باشید رابطه بالا چیزی بیش از نامتناهی بودن تعداد اعداد اول را تصدیق می‌کند. به عنوان مثال، تعداد اعداد مربع کامل به صورت n^2 هم نامتناهی است، ولی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

بنابراین، به تعبیری تعداد اعداد اول بیشتر از تعداد اعداد مربع است. بیان دقیق‌تر این‌که، در مجموع همه اعداد صحیح، اعداد اول متراکم‌تر (چگال‌تر) از مربع‌های کامل هستند. با گرفتن لگاریتم از طرفین فرمول حاصلضرب اوایلر و با توجه به بسط $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ برای $|x| < 1$ و به ازای $s > 1$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1^+} \log \zeta(s) &= - \sum_p \log(1 - p^{-s}) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}} \\ &= \sum_p \frac{1}{p} + \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m p^{ms}} = \sum_p \frac{1}{p} + O(1). \end{aligned}$$

در رابطه بالا سری دوم به ازای $s > 1$ به‌طور مطلق همگراست^۷. اوایلر با علم به این‌که سری همساز واگراست، یعنی مقدار حد سمت چپ بی‌نهایت است (چون $\log x$ تابعی پیوسته است از این‌که $a_n \rightarrow a$ ایجاب می‌کند $\log a_n \rightarrow \log a$)، نتیجه گرفت که سری $\sum_p \frac{1}{p}$ واگراست. □

سرعت واگرایی $\sum_p \frac{1}{p}$ بسیار کند است، در واقع ثابت شده است، $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \approx \log \log x$. جالب است برای تمام اعداد اولی که تاکنون شناخته شده است داریم

$$\sum_{p \text{ known prime}} \frac{1}{p} < 4,$$

در حالی که $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$ ، و این نشان می‌دهد که شناخت ما از اعداد اول چقدر کم است. بزرگترین عدد اولی که تا امروز (ژانویه ۲۰۲۰) شناخته شده است $2^82,589,933 - 1$ ، که تعداد ارقام آن ۲۴,۸۶۲,۰۴۸ است.

یکی از آخرین شاگردان گاوس، یعنی ریمان در سال ۱۸۵۹ مقاله تاریخی خود را در نظریه تحلیلی اعداد ارائه داد. مقاله‌ای هشت صفحه‌ای که تفکری عمیق را در خود جای داده بود و نقطه عطفی را در نظریه تحلیلی اعداد رقم زد. او در این مقاله تابعی را که پیش‌تر توسط اوایلر مورد مطالعه قرار گرفته بود، به عنوان یک تابع مختلط مطالعه نمود و در همان مقاله اسم این تابع را زتا (ζ) نامید. وی روشی ابتکاری برای ربط دادن توزیع اعداد اول به خواص این تابع طراحی کرد و به بررسی حدس گاوس پرداخت. تابع زتای ریمان برای هر عدد مختلط $s \in \mathbb{C}$ که $\text{Re}(s) > 1$ ^۸ به صورت سری نامتناهی زیر تعریف می‌شود.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

^۷ $f(x) = O(g(x))$: ثابت c وجود دارد به‌طوری‌که $|f(x)| \leq c g(x)$.
^۸ قسمت حقیقی عدد مختلط s را با نماد $\text{Re}(s)$ نشان می‌دهیم

تابع زتای ریمان بخاطر اهمیت زیادی که دارد تحقیقات بسیار گسترده روی آن انجام شده است. چندین کتاب با عنوان این تابع از صاحب نظران معروف در این زمینه وجود دارد برای نمونه می‌توانید به [۸] و [۱۲] مراجعه کنید. در بخش بعد برخی از ویژگی‌های مورد نیاز تابع زتای ریمان را بیان می‌کنیم.

۳. اثبات قضیه اعداد اول

دشواری اثبات این قضیه (که حتی پی‌بردن به آن نیز به اندازه‌ی کافی دشوار بود) از آنجا مشخص می‌شود که حتی گاوس که خود آن را مطرح کرده بود نیز موفق به اثبات آن نشد. نخستین تلاش‌ها برای اثبات قضیه اعداد اول توسط چبیشف (Chebyshev) ریاضیدان نامی روس انجام شد. وی دو مقاله در این زمینه در سال‌های ۱۸۴۸ و ۱۸۵۰ ارائه داد. او برای x های به قدر کافی بزرگ نشان داد.

$$0.89 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1.11 \frac{x}{\log x}.$$

به‌علاوه نشان داد وقتی که $x \rightarrow \infty$ آنگاه اگر خارج قسمت $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$ دارای حد باشد، مقدار این حد باید ۱ باشد. هر چند کار چبیشف جالب بود ولی نتوانست ثابت کند که حد فوق واقعاً وجود دارد، بنابراین نتوانست قضیه‌ی اعداد اول را ثابت کند.

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم ریمان برای اولین بار با استفاده از ویژگی‌های تحلیلی تابع زتا به ارتباط بین این تابع و قضیه اعداد اول پرداخت. وی ابتدا به بررسی رابطه تابع گاما و تابع زتا پرداخت و اتحاد زیر را که به معادله تابعی معروف است، اثبات کرد

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s),$$

که در آن $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ که برای $\text{Re}(s) > 0$ تعریف می‌شود. بر اساس همین رابطه وی تابع زتا را به کل صفحه مختلط به جز قطبی ساده در $s = 1$ ، با مانده واحد، ادامه تحلیلی (Analytic Continuation) داد. ریمان شش سال بعد از انتشار مقاله خود، در اوج نبوغ فکری در سن ۳۹ سالگی درگذشت و نتوانست اثباتی برای قضیه اعداد اول ارائه بدهد. وی راجع به اثبات قضیه اعداد اول در مقاله خود پنج حدس مهم زد که طی ۳۰ سال درستی چهار تا از این حدس‌ها توسط منگولد (Mangoldt)، هادامارد (Hadamard) و دی واله پوسین (de la Vallée Poussin) اثبات شد. سرانجام در سال ۱۸۹۶ هادامارد و پوسین به طور مستقل، موفق به اثبات قضیه اعداد اول شدند. حدس پنجم ریمان که به فرضیه ریمان معروف است، بیان می‌کند، «تمام صفرهای نابدیهی تابع زتای ریمان رو خط $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ واقع است». فرضیه ریمان یکی از بزرگترین مساله‌های حل نشده در ریاضیات است که تا کنون تلاش‌های زیادی برای اثبات آن انجام شده است.^۹ صفرهای تابع زتای ریمان ارتباط ظریفی با اعداد اول دارند، که در اینجا ما قصد ورود به این مساله نداریم. در حقیقت با اثبات فرضیه ریمان، تقریب دقیق‌تری از قضیه اعداد اول و توزیع اعداد اول در بین اعداد طبیعی بدست می‌آید.

امروزه برای پژوهشگران قضیه اعداد اول با جمله خطا و ناحیه‌های خالی از صفر تابع زتای ریمان از اهمیت بالایی برخوردار است. بهترین جمله خطا برای قضیه اعداد اول بدون فرض درستی حدس ریمان به صورت

^۹فرضیه ریمان یکی از مسائل هزاره است که برای حل آن جایزه یک میلیون دلاری تعیین شده است.

زیر است:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + \left(\frac{x}{\exp(c(\log x)^{\frac{1}{\delta}} (\log \log x)^{-\frac{1}{\delta}})} \right).$$

که c ثابت مثبتی می‌باشد. همچنین با فرض درستی حدس ریمان داریم

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right).$$

ثابت شده است، تقریب فوق بهترین تخمین برای قضیه اعداد اول و توزیع اعداد اول است. اثبات‌های هادامارد و پوسین از قضیه اعداد اول، در نظریه تحلیلی اعداد به عنوان اثبات‌های نسبتاً طولانی و سخت شناخته می‌شوند. در سال ۱۹۴۹، دو ریاضیدان بزرگ معاصر، یعنی سلبرگ (Selberg) و اردوش (Erdős)، موفق شدند اثباتی مقدماتی (یعنی بدون استفاده از آنالیز مختلط) برای این قضیه ارائه دهند [۵]. در این اثبات با همه پیچیدگی‌های خود از خواص توابع مختلط استفاده نشد، هر چند این اثبات نیز بسیار فنی و طولانی است.

در سال ۱۹۸۰ نیومن (Newman) اثبات تحلیلی دیگری برای قضیه اعداد اول ارائه داد، که این اثبات نسبت به اثبات‌های قبل نسبتاً ساده‌تر و مختصرتر می‌باشد [۹]. در سال ۱۹۹۶ دان زگیر (Don Zagier) به مناسبت صدسالگی اثبات قضیه اعداد اول، برهان نیومن را کمی ساده‌تر و منظم‌تر در [۱۳] ارائه داد. ما در این یادداشت سعی می‌کنیم اثبات اخیر را به طور کامل و با شرح جزئیات بیان کنیم. همان‌طور که در ابتدا گفتیم نخستین تلاش‌ها برای اثبات قضیه اعداد اول توسط چبیشف انجام شد. چبیشف تابع حقیقی $\vartheta(x)$ که به تابع تتای چبیشف نیز معروف است را به صورت زیر معرفی کرد

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

که در آن جمع روی همه اعداد اول p کوچکتر یا مساوی x است. تابع ϑ قطعه قطعه پیوسته، پله‌ای و غیر نزولی است. این تابع در اثبات‌های مربوط به قضیه اعداد اول و به‌ویژه در اثباتی که در اینجا ارائه می‌دهیم نقشی بسیار مهم و کلیدی دارد.

لم ۱.۳. قضیه اعداد اول برقرار است اگر و فقط اگر $\vartheta(x) \sim x$. به زبان ریاضی

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Leftrightarrow \vartheta(x) \sim x.$$

اثبات. فرض کنید $\vartheta(x) \sim x$ باشد، داریم

$$0 \leq \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x$$

با تقسیم طرفین رابطه بالا بر x داریم

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \pi(x) \frac{\log x}{x}. \quad (2)$$

همچنین برای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} \log p \\ &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq p \leq x} (1-\varepsilon) \log x \\ &= (1-\varepsilon) \log x \left(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon}) \right)\end{aligned}$$

بنابراین

$$(3) \quad \frac{\vartheta(x)}{x} \geq (1-\varepsilon) \frac{\log x}{x} \pi(x) - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon}) \log x}{x} (1-\varepsilon)$$

از نامساوی (۲) و (۳) داریم

$$(4) \quad (1-\varepsilon) \frac{\log x}{x} \pi(x) - \frac{\pi(x^{1-\varepsilon}) \log x}{x} (1-\varepsilon) \leq \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \pi(x) \frac{\log x}{x}.$$

با در نظر گرفتن نامساوی واضح $\pi(x^{1-\varepsilon}) \leq x^{1-\varepsilon}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x^{1-\varepsilon}) \log x}{x} = 0,$$

حال با توجه به نامساوی (۴)، وقتی که $x \rightarrow \infty$ ، اگر $\vartheta(x) \sim x$ باشد در این صورت $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ و بالعکس. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

لم زیر در واقع کلید اصلی اثبات قضیه اعداد اول است. برای اثبات هم ارزی $\vartheta(x) \sim x$ تلاش‌های زیادی شده است. نیومن در سال ۱۹۸۰ رهیافتی نسبتاً مختصر و ساده‌تر ارائه داد.

لم ۲.۳. اگر

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt,$$

وجود داشته باشد (انتگرال همگرا باشد)، در این صورت $\vartheta(x) \sim x$.

بنابراین اثبات قضیه اعداد اول معادل با همگرایی یک انتگرال است. برای اثبات همگرایی این انتگرال ما به ابزارهایی از آنالیز مختلط مانند ادامه تحلیلی، فرمول انتگرال کوشی، نقاط تکینی، تبدیلات لاپلاس و ... نیاز داریم [۳]. همچنین برخی از ویژگی‌های تحلیلی تابع زتای ریمان نقش کلیدی در این اثبات ایفا می‌کنند که به آنها اشاره می‌کنیم.

اثبات لم ۲.۳. فرض کنید $\int_1^\infty \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt$ همگرا باشد. بنا به برهان خلف فرض کنید

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \neq 1$$

بنابراین برای $\varepsilon > 0$ ، عدد دلخواه بزرگ x وجود دارد به طوری که

$$\left| \frac{\vartheta(x)}{x} - 1 \right| \geq \varepsilon,$$

به آسانی می‌توان نشان داد که x به اندازه کافی بزرگ وجود دارد که $\vartheta(x) \geq (1 + \varepsilon)x$ یا $\vartheta(x) \leq (1 - \varepsilon)x$. نخست فرض کنید $\varepsilon > 0$ وجود داردی که برای هر x به قدر کافی بزرگ $\vartheta(x) \geq (1 + \varepsilon)x$ باشد. قرار دهید $\lambda := 1 + \varepsilon$ ، با توجه به این‌که تابع ϑ غیر نزولی است، داریم

$$\begin{aligned} \int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt &\geq \int_x^{\lambda x} \frac{\vartheta(x) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt \\ &= \int_1^\lambda \frac{\lambda x - ux}{(ux)^2} x du = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du \\ &= \left[-\frac{\lambda}{u} - \log u \right]_{u=1}^\lambda = \lambda - 1 - \log(\lambda) = c > 0, \end{aligned}$$

در بالا از تغییر متغیر $t = ux$ استفاده کردیم. مقدار ثابت فوق برای x به قدر کافی بزرگ، مستقل از x است و این با فرض همگرایی انتگرال در تناقض است. در حالتی که $\vartheta(x) \leq (1 - \varepsilon)x$ به طور مشابه به تناقض می‌رسیم. $\square$

در فرایند اثبات قضیه اعداد اول، چیشیف در مورد تابع ϑ حکم زیر را بیان و اثبات کرد.

لم ۳.۳. برای $x \geq 1$ داریم $\vartheta(x) \leq (4 \log 2)x$ با نمادهای لاند $\vartheta(x) = O(x)$ [۱۳].

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم تابع زتای ریمان در اثبات قضیه اعداد اول نقش مهمی دارد، در اینجا دو لم راجع به تابع زتای ریمان بیان می‌کنیم

لم ۴.۳. تابع $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ که برای $\operatorname{Re}(s) > 1$ تعریف شده است، می‌توان آن را به $\operatorname{Re}(s) > 0$ ادامه تحلیلی داد. به عبارت دیگر

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s),$$

که در آن $\phi(s)$ یک تابع تحلیلی برای $\operatorname{Re}(s) > 0$ است. بنابراین تابع زتای ریمان به ناحیه $\operatorname{Re}(s) > 0$ ادامه تحلیلی داده می‌شود، که در $s = 1$ یک قطب ساده با مانده واحد دارد.

اثبات. برای $\operatorname{Re}(s) > 1$ ثابت داریم

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\phi_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx$ برای هر s و x در بازه $[n, n+1]$ داریم

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| = \left| \int_n^x s t^{-s-1} dt \right| \leq \int_n^x \frac{|s|}{t^{1+\operatorname{Re}(s)}} dt \leq \frac{|s|}{n^{1+\operatorname{Re}(s)}},$$

بنابراین

$$|\phi_n(s)| \leq \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| dx \leq \frac{|s|}{n^{1+\operatorname{Re}(s)}},$$

می‌دانیم برای هر $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{1+\operatorname{Re}(s)}} < \infty,$$

بنابراین با توجه به آزمون M-وایرستراس، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$ به‌طور یکنواخت همگرا به تابعی مانند $\phi(s)$ که روی $\operatorname{Re}(s) > 0$ تحلیلی است. در واقع $\phi(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ می‌باشد. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

گزاره ۵.۳. برای $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ تابع $\zeta(s)$ صفری ندارد. به عبارت دیگر

$$\zeta(1+it) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

اثبات. نخست برای $\operatorname{Re}(s) = \sigma > 1$ نشان می‌دهیم تابع زتا ناصفر است. با توجه به فرمول حاصلضرب اوایلر داریم

$$|\zeta(s)| = \prod_p \frac{1}{|1 - p^{-s}|}.$$

از طرفی

$$|1 - p^{-s}| \leq 1 + |p^{-s}| = 1 + p^{-\sigma},$$

در نتیجه

$$|\zeta(s)| \geq \prod_p \frac{1}{1 + p^{-\sigma}} = e^{-\sum_p \log(1 + p^{-\sigma})}.$$

حال با در نظر گرفتن نامساوی $\log(1+t) < t$ $\forall t > 0$ داریم

$$|\zeta(s)| \geq e^{-\sum_p p^{-\sigma}} \geq e^{-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}} = e^{-\zeta(\sigma)} > 0.$$

بنابراین تابع زتا در ناحیه $\operatorname{Re}(s) > 1$ ناصفر است.

حال نشان می‌دهیم تابع زتا در $\operatorname{Re}(s) = 1$ نیز ناصفر است. با گرفتن لگاریتم از طرفین فرمول حاصلضرب اوایلر داریم

$$\begin{aligned} \log |\zeta(s)| &= - \sum_p \log |1 - p^{-s}| = \sum_p \operatorname{Re} \log (1 - p^{-s}) \\ &= \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{Re}(p^{-ns})}{n}. \end{aligned}$$

در رابطه بالا از این حقیقت که $\log |z| = \operatorname{Re} \log z$ و برای $|z| < 1$ داریم $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = -\log(1-z)$ استفاده کردیم.

قرار می‌دهیم $s = \sigma + it$

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{Re}(p^{-n\sigma - int})}{n} = \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt \log p)}{np^{n\sigma}}.$$

در توضیح تساوی اخیر با توجه به اتحاد $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(p^{-n\sigma - nit}) &= \frac{\operatorname{Re}(e^{-nit \log p})}{p^{n\sigma}} = \frac{\operatorname{Re}(\cos(-nt \log p) + i \sin(-nt \log p))}{p^{n\sigma}} \\ &= \frac{\cos(nt \log p)}{p^{n\sigma}} \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\theta := nt \log p$ ، با توجه به رابطه بالا می‌توان نوشت

$$\log \left| \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) \right| = \sum_p \sum_{n \geq 1} \frac{3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta}{np^{n\sigma}} \geq 0.$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos \theta)^2$ ، سری اخیر نامنفی است و همواره

$$\log \left| \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) \right| \geq 0,$$

یا

$$(5) \quad \left| \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) \right| \geq 1.$$

حال بنا به برهان خلف فرض کنیم برای مقادیر $t \in \mathbb{R}$ و $t \neq 0$ ، $\zeta(1 + it) = 0$ باشد. با توجه به فرض تابع $\zeta(s)$ در $s = 1$ قطب ساده با مانده واحد دارد در $s = 1 + it$ برابر صفر است و در $s = 1 + 2it$ تحلیلی است. بنابراین

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \left| \zeta(\sigma)^3 \zeta(\sigma + it)^4 \zeta(\sigma + 2it) \right| = 0,$$

□

و این با رابطه (۵) در تناقض است. به این ترتیب اثبات تکمیل می‌شود.

این که تابع زتای ریمان روی خط $\operatorname{Re}(s) = 1$ ناصفر است، نقش کلیدی در اثبات قضیه اعداد اول دارد، برای دیدن این نقش، نخست تابع $\Phi(s)$ را تعریف می‌کنیم. برای هر عدد مختلط $s \in \mathbb{C}$ که $\operatorname{Re}(s) > 1$ تابع $\Phi(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s},$$

که در ناحیه‌ای $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$ به طور مطلق و به طور یکنواخت همگراست.

ارتباط بین تابع زتای ریمان و تابع $\Phi(s)$

برای $\operatorname{Re}(s) > 1$ داریم

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

با گرفتن مشتق لگاریتمی از طرفین رابطه فوق داریم

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s})$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= - \sum_p \frac{\frac{d}{ds}(1 - p^{-s})}{1 - p^{-s}} \\ &= - \sum_p (p^{-s} \log p) \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} \\ (6) \quad &= \sum_p \frac{\log p (p^s - 1 + 1)}{p^s (p^s - 1)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s (p^s - 1)} + \Phi(s). \end{aligned}$$

لم ۶.۳. تابع $\Phi(s)$ که برای $\text{Re}(s) > 1$ تعریف شده است، می‌توان آن را به یک تابع مرمورفیک در ناحیه $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ توسعه داد، با قطب‌هایی در صفرهای تابع زتای ریمان و در $s = 1$. همچنین $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ برای $\text{Re}(s) \geq 1$ تحلیلی است.

اثبات. با توجه به رابطه اخیر (رابطه ۶)، سری $\sum_p \frac{\log p}{p^s (p^s - 1)}$ در ناحیه $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > \frac{1}{2}\}$ به طور مطلق و یکنواخت همگراست، همچنین با توجه به لم ۴.۳ $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ برای $\text{Re}(s) > 0$ ادامه تحلیلی داده می‌شود، بنابراین تابع $\Phi(s)$ به یک تابع مرمورفیک برای $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ توسعه داده می‌شود. حال در همسایگی $\text{Re}(s) = 1$ داریم

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1} = - \sum_p \frac{\log p}{p^s (p^s - 1)} - \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right),$$

با توجه به این‌که $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ در $s = 1$ قطب ساده با مانده -1 دارد. همچنین تابع $\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right)$ در همسایگی $s = 1$ تحلیلی است؛ بنابراین تابع $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ در $\text{Re}(s) \geq 1$ تحلیلی است.

□

نتیجه ۷.۳. تابع $\frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s}$ در ناحیه $\{s : \text{Re}(s) \geq 0\}$ تحلیلی است.

اثبات. داریم

$$\frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} \left(\Phi(s+1) - \frac{s+1}{s} \right) = \frac{1}{s+1} \left(\Phi(s+1) - \frac{1}{s} - 1 \right).$$

□

با توجه به لم قبل $\Phi(s+1) - \frac{1}{s}$ در همسایگی $s = 0$ تحلیلی است.

رابطه بین تابع ϑ و تابع Φ

برای اثبات قضیه اعداد اول باید نشان دهیم انتگرال $\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2} dx$ همگراست. با تغییر متغیر $x = e^t$ داریم

$$\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)-x}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\vartheta(e^t)-e^t}{e^t} dt = \int_0^\infty (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1) dt,$$

تعریف می‌کنیم $\mathbb{R} \rightarrow [\circ, \infty)$: $f(t)$ با ضابطه

$$f(t) := \vartheta(e^t)e^{-t} - 1,$$

تابع f تابعی کراندار و به‌طور قطعه قطعه پیوسته است. در واقع کرانداری f از $\vartheta(x) = O(x)$ نتیجه می‌شود. قطعه قطعه پیوستگی آن نیز از خاصیت پله‌ای بودن تابع ϑ می‌باشد. لم زیر ارتباط بین تابع ϑ و تابع Φ را بیان می‌کند و نقش مهمی در اثبات قضیه اعداد اول دارد.

لم ۸.۳. برای $\operatorname{Re}(s) > 1$ داریم

$$(\mathcal{L}\vartheta(e^t))(s) = \frac{\Phi(s)}{s}.$$

به عبارت دیگر

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-st} \vartheta(e^t) dt.$$

که $\mathcal{L}$ نماد لاپلاس است.

اثبات. $(\mathcal{L}\vartheta(e^t))(s)$ برای $\operatorname{Re}(s) > 1$ به طور مطلق همگراست زیرا می‌دانیم ثابت c وجود دارد به‌طوری که $\vartheta(e^t) \leq ce^{1t}$.

فرض کنیم p_n ، n امین عدد اول باشد و $p_\circ = \circ$. برای هر $t \in (\log p_n, \log p_{n+1})$ ، $\vartheta(e^t)$ ثابت است. بنابراین

$$\int_{\log p_n}^{\log p_{n+1}} e^{-st} \vartheta(e^t) dt = \vartheta(p_n) \int_{\log p_n}^{\log p_{n+1}} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \vartheta(p_n) (p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}),$$

با جمع بستن روی همه اعداد $n \geq 1$ و با استفاده از فرمول

$$\vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1}) = \log p_n$$

و همچنین با به‌کارگیری فرمول جمع‌بندی جزبه‌جز داریم

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \vartheta(e^t) dt &= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty \vartheta(p_n) (p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty (\vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1})) p_n^{-s} \\ &= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty \frac{\log p_n}{p_n^s} = \frac{1}{s} \Phi(s), \end{aligned}$$

□

برای $\operatorname{Re}(s) > 1$ برقرار است. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۹.۳.

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s}$$

به عبارت دیگر

$$(V) \quad \frac{\Phi(s+1)}{s+1} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \frac{1}{s},$$

که در آن $\frac{\Phi(s+1)}{s+1} - \frac{1}{s}$ ، در ناحیه $\operatorname{Re}(s) \geq \circ$ تحلیلی است.

اثبات. با استفاده از لم قبل و خاصیت تبدیلات لاپلاس به آسانی به دست می‌آید. که با توجه به نتیجه ۷.۳ انتگرال ناسره $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ برای $\text{Re}(s) \geq 0$ ادامه تحلیلی داده می‌شود.

□

یادآوری می‌کنیم که اثبات قضیه اعداد اول معادل با همگرایی انتگرال $\int_0^\infty f(t) dt$ که $f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1$ می‌باشد. حال با توجه به نتیجه قبل شرایط اثبات همگرایی این انتگرال فراهم است.

قضیه ۱۰.۳ (قضیه تحلیلی). فرض کنید $f(t)$ ، برای $t \geq 0$ ، تابعی کراندار و به طور موضعی انتگرال پذیر باشد به طوری که تابع

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt} dt, \quad \text{Re}(z) > 0,$$

به ناحیه $\{z : \text{Re}(z) \geq 0\}$ ادامه تحلیلی داده شود، در این صورت

$$\int_0^\infty f(t) dt,$$

وجود دارد (همگراست) و برابر با $g(0)$ است.

اثبات. برای $T > 0$ ثابت قرار دهید

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt} dt.$$

تابع g_T به ازای هر $z \in \mathbb{C}$ تحلیلی است (تام است). با توجه به قضیه موررا (Morera's theorem) می‌توان تام بودن این تابع را نتیجه گرفت. حال باید نشان دهیم

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} g_T(0) = g(0).$$

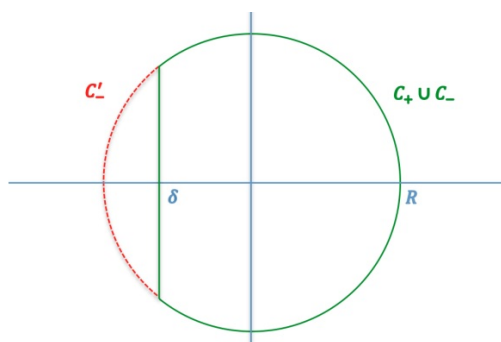
فرض کنید R عدد به اندازه کافی بزرگ و δ عدد مثبت کوچک باشد. C را مرز ناحیه زیر در نظر بگیرید

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \text{Re}(z) \geq -\delta\}.$$

در اینجا δ به اندازه کافی کوچک انتخاب می‌شود (بستگی به R) به طوری که $g(z)$ در یک همسایگی بستر C تحلیلی باشد. با توجه به این که $(g(z) - g_T(z))e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$ درون و روی مرز C تحلیلی است با توجه به فرمول انتگرال کوشی^{۱۰} داریم

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}.$$

¹⁰Cauchy's Integral Formula



برای تخمین انتگرال مرز C را به دو نیم دایره $C_+ \equiv C \cap \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ و $C_- \equiv C \cap \{\operatorname{Re}(z) < 0\}$ تقسیم می‌کنیم. قرار می‌دهیم $B = \max_{t \geq 0} |f(t)|$ ، نخست انتگرال را روی مرز C_+ تخمین می‌زنیم. برای $\operatorname{Re}(z) > 0$ داریم

$$|g(z) - g_T(z)| = \left| \int_T^\infty f(t) e^{-zt} dt \right| \leq B \int_T^\infty |e^{-zt}| dt = \frac{B e^{-\operatorname{Re}(z)T}}{\operatorname{Re}(z)},$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{1}{z} \right| &= e^{\operatorname{Re}(z)T} \left| \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} \right| \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)T} \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{z}{R^2} \right| \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)T} \frac{2|\operatorname{Re}(z)|}{R^2}. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تخمین‌های اخیر داریم

$$(8) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_+} (g(z) - g_T(z)) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_+} \frac{2B}{R^2} |dz| \leq \frac{2\pi R B}{2\pi R^2} = \frac{B}{R}.$$

برای تخمین انتگرال روی C_- ، g و g_T را به‌طور جداگانه تقریب می‌زنیم.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z}.$$

ابتدا انتگرال دوم را تخمین می‌زنیم. با توجه به این‌که g_T تابعی تام است می‌توان به جای مسیر C_- مسیر $C'_- \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Re}(z) < 0\}$ را انتخاب کرد. حال برای $\operatorname{Re}(z) < 0$ داریم

$$\begin{aligned} |g_T(z)| &= \left| \int_0^T f(t) e^{-zt} dt \right| \leq B \int_0^T |e^{-zt}| dt \leq B \int_{-\infty}^T |e^{-zt}| dt \\ &\leq B \int_{-\infty}^T e^{-\operatorname{Re}(z)t} dt = \frac{B e^{-\operatorname{Re}(z)T}}{|\operatorname{Re}(z)|}. \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{C_-} \frac{2B}{R^2} |dz| \leq \frac{2\pi R B}{2\pi R^2} = \frac{B}{R}.$$

اما برای قسمت دیگر انتگرال برای هر $z \in C_-$ داریم

$$\frac{g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)}{z} \rightarrow 0 \text{ for } (T \rightarrow \infty),$$

در واقع، تابع انتگرالده حاصلضرب دو تابع $g(z) \frac{\left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)}{z}$ ، که مستقل از T است و e^{zT} است که در هر زیر مجموعه فشرده از C_- به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} = 0.$$

حال با توجه به کران‌های به دست آمده برای انتگرال روی مسیر C_+ و C_- داریم

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} |g(\circ) - g_T(\circ)| \leq \frac{2B}{R},$$

چون R دلخواه است، بنابراین با فرض $R \rightarrow \infty$ داریم

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(\circ) = g(\circ).$$

در حد بالا، ذکر این نکته الزامی است که ما از این حقیقت که B وابسته به R نیست استفاده کردیم، و این اهمیت کرانداری f را در فرض مساله می‌رساند و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

۴. تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوام جناب آقای دکتر مهدی حسنی تشکر و قدردانی کنم؛ چرا که این نوشته از محضر کلاس درس ایشان است. همچنین از نظرات اصلاحی و پیشنهادی داوران محترم و از سردبیر محترم مجله جناب آقای دکتر محمدرضا پوریای ولی مراتب تشکر و قدردانی را دارم.

مراجع

- [1] P. Bateman and H. Diamond, A hundred years of prime numbers, *Amer. Math. Monthly*, 103 (1996) 729–741.
- [2] R. Chapman, Evaluating $\zeta(2)$, <http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/rjchapma/etc/zeta2.pdf>, (2003).
- [3] R. E. Greene and S. G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, Graduate Studies in Mathematics, 40, American Mathematical Society, 2006.
- [4] M. Hata, A new irrationality measure for $\zeta(2)$, *Acta Arith.*, 92 (2000) 47–57.
- [5] G. J. O. Jameson, *The Prime Number Theorem*, Cambridge University Press, 2003.
- [6] S. J. Kifowit and T. A. Stamps, The harmonic series diverges again and again, *The AMATYC Review*, 27 (2006) 31–43.
- [7] R. Marcovecchio, The irrationality measures of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ revisited, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, 3 (2013) 145–168.

- [8] H. Montgomery, A. Nikeghbali and M. Th. Rassias, *Exploring the Riemann Zeta Function: 190 years from Riemann's Birth*, Springer, 2017.
- [9] D. J. Newman, Simple analytic proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly*, 87 (1980) 693–696.
- [10] C. Reid, *From zero to infinity: what makes numbers interesting*, 5 ed, A K Peters, Ltd, 2006.
- [11] S. Siklos, A method of evaluating $\zeta(2)$ and $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$, *Math. Gaz.*, 102 (2018) 114–121.
- [12] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd ed., Oxford Univ. Press., (1986).
- [13] D. Zagier, Newman's short proof of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly*, 104 (1997) 705–708.
- [۱۴] غ. مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، ۱، انتشار کتابفروشی دهخدا، ۱۳۵۳.
- [۱۵] غ. مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، ۲، انتشارات سروش، ۱۳۵۸.

محمدرضا اسفندیاری

زنجان، بلوار دانشگاه، دانشگاه زنجان، دانشکده علوم، گروه ریاضی
m.esfandiari@znu.ac.ir

محمدرضا اسفندیاری متولد اسفندماه ۱۳۶۴ در کرمان (رابر) است. وی در سال ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه فرهنگیان مشهد و در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی در دانشگاه فردوسی مشهد شد. وی در سال ۱۳۹۳ دوره دکتری ریاضی خود را در گرایش نظریه تحلیلی اعداد تحت راهنمایی آقای دکتر مهدی حسینی در دانشگاه زنجان شروع کرد و هم اکنون در ترم آخر دوره دکتری می باشد.

