http://math-sci.iranjournals.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۴، شماره ۳ (۱۳۹۸)، صص. ۸-۱

http://www.ui.ac.ir

نزدیکترین دوتایی در مشبکه‌های کامل ددکیند

علی‌اصغر سروری، حمید مظاهری * و حمیدرضا خادم‌زاده

چکیده. در این مقاله به بررسی مسئله نزدیکترین دوتایی می‌پردازیم. این مسئله پیش از این در فضاهای متری مطرح گردیده و مطالعه شده است و در این مقاله به بررسی آن در فضاهای مشبکه پرداخته می‌شود و از منظر ترتیبی مورد بررسی قرار می دهیم. این مسئله در فضای مشبکه های کامل ددکیند مورد بحث قرار می‌گیرد.

۱. مقدمه

مسأله نزدیکترین دوتایی که در واقع تعمیمی از مسأله نقطه ثابت است، توجه زیادی را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. این مسأله به‌طور گسترده‌ای در بخش‌های مختلف ریاضی از جمله مسائل بهینه‌سازی، عددی و حتی برنامه‌نویسی به‌کار برده می‌شود و توسط ریاضی‌دانان زیادی در فضاهای متریک بررسی شده است. به‌عنوان مثال الدرد[1] و ویرامانی[2] [۴]، مسأله وجود و یکتایی نزدیکترین دوتایی با نگاشت‌های انقباضی دوری روی فضاهای باناخ محدب یکنواخت را بررسی کرده‌اند. همچنین در منبع [۶]، این مسأله برای نگاشت‌های ناانبساطی نسبی[3] حل شده است و در مرجع [۲] نیز مطالب مفیدی عنوان شده است.

اگر E یک فضای متریک و $T : A \to B$ یک نگاشت باشد که در آن A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از E هستند، آن‌گاه $a \in A$ را نزدیکترین نقطه برای T گوییم هرگاه:

$$d(a, Ta) = \operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$$

و به (a, Ta) نزدیکترین دوتایی گفته می‌شود. مجموعه‌ی تمام بهترین نقاط تقریبی برای T را با $P_T(A, B)$ نشان می‌دهیم. یعنی:

$$P_T(A, B) = \{a \in A : d(a, Ta) = \operatorname{dist}(A, B)\}.$$

بدیهی است که اگر $A \cap B \neq \emptyset$ آن‌گاه هر جواب مسأله نزدیکترین دوتایی یک نقطه ثابت T است.

عبارات و کلمات کلیدی. مشبکه‌های کامل ددکیند، همگرای ترتیبی، همگرای یکنواخت نسبی.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۰۶
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119636.1344

[1]Eldred [2]Veeramani [3]Relatively Nonexpansive Mappings

همچنین:

$$A_\circ = \{a \in A \,:\, \exists z \in B\,, d(a,z) = \mathrm{dist}(A,B)\}$$
$$B_\circ = \{b \in B \,:\, \exists z \in A\,, d(b,z) = \mathrm{dist}(A,B)\}.$$

مسأله نزدیکترین دوتایی، به ترتیب، Tـ حل‌پذیر [۴] (Tـ حل‌پذیر یکتا) [۵] گفته می‌شود هرگاه $P_T(A,B) \neq \emptyset$ ($\mathrm{card}\, P_T(A,B) = ۱$).

باید توجه داشت که شرط لازم برای این‌که مسأله نزدیکترین دوتایی، Tـ حل‌پذیر باشد آن است که $T(A_\circ) \cap B_\circ \neq \emptyset$.

یادآوری می‌شود که فضای برداری حقیقی E را مرتب جزیی گوییم هرگاه مجهز به یک رابطه ترتیبی مانند $\leq$ باشد که به صورت زیر با ساختار جبری آن سازگار باشد:

(۱) اگر $x \leq y$ آن‌گاه به ازای هر $z \in E$، $x + z \leq y + z$.

(۲) اگر $x \leq y$ آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی $\alpha \geq \circ$، $\alpha x \leq \alpha y$.

مجموعه‌ی $E^+ = \{x \in E \,:\, x \geq \circ\}$ را مخروط مثبت E و اعضای آن را بردارهای مثبت E می‌نامیم. اگر A یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از فضای مرتب جزیی E باشد آن‌گاه A را کران‌دار از بالا گوییم هرگاه $x_\circ \in E$ موجود باشد که برای هر $a \in A$، $a \leq x_\circ$. در این‌صورت $x_\circ$ را یک کران بالا برای A گفته و به کوچکترین کران بالای A در صورت وجود، بیشینه A گفته و با $\sup A$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌های کران‌دار از پایین به طور مشابه تعریف شده و به بزرگترین کران پایین A در صورت وجود، کمینه A گفته و با $\inf A$ نشان می‌دهیم. $A \subset E$ را کران‌دار ترتیبی گوییم هرگاه A هم کران‌دار از بالا و هم کران‌دار از پایین باشد.

فضای مرتب جزیی E را یک مشبکه (یا یک فضای ریس[۶]) گوییم هرگاه به ازای هر جفت از بردارهای $x, y \in E$، $x \vee y = \sup\{x,y\}$ و $x \wedge y = \inf\{x,y\}$ هر دو وجود داشته باشند.

در هر مشبکه قسمت مثبت، قسمت منفی و قدرمطلق بردار x به ترتیب با $x^+ = x \vee \circ$، $x^- = (-x) \vee \circ$ و $|x| = x \vee (-x)$ تعریف می‌شوند. نرم $\|\cdot\|$ روی مشبکه E را یک نرم مشبکه‌ای گوییم هرگاه از $|x| \leq |y|$ نتیجه شود که $\|x\| \leq \|y\|$ و در این‌صورت فضای E را یک مشبکه برداری نرم‌دار گوییم. اگر فضای E تحت نرم مشبکه‌ای $\|\cdot\|$ کامل باشد آن‌گاه E را یک مشبکه باناخ می‌گوییم. فرض کنید $(E, \leq)$ یک مشبکه باناخ با نرم مشبکه‌ای $\|\cdot\|$ باشد، در این‌صورت نرم مشبکه‌ای $\|\cdot\|$ را اکیداً یکنوا[۷] گوییم (یا گفته می‌شود که مشبکه باناخ E دارای ویژگی STM است) هرگاه برای هر $x, y \in E^+$ که $x \leq y$ و $\|y\| = \|x\|$ نتیجه شود که $y = x$. در این‌صورت می‌نویسیم $E \in \mathrm{STM}$.

مشبکه E را کامل ددکیند[۸] گوییم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی و کران‌دار از بالا در E، بیشینه داشته باشد (یا به‌طور معادل هر زیرمجموعه ناتهی و کران‌دار از پایین در E، دارای کمینه باشد). همچنین مشبکه E دارای ویژگی ارشمیدسی[۹] است هرگاه برای هر $u \in E^+$، $\inf_n\{n^{-۱}u\} = \circ$. در [۱، ۳، ۵] می‌توان مشاهده کرد که هر مشبکه باناخ و نیز هر مشبکه کامل ددکیند دارای ویژگی ارشمیدسی هستند.

$A \subseteq E$ را بیشینه (کمینه)ـ بسته گوییم هرگاه برای هر $D \subseteq A$ اگر $\sup D$ ($\inf D$) در E وجود داشته باشد آن‌گاه $\sup D \in A$ ($\inf D \in A$). لازم به یادآوری است که اگر دنباله‌ی $\{f_n\} \subseteq E$ نزولی و $\inf_n\{f_n\} = f$ آن‌گاه می‌نویسیم $f_n \downarrow f$. همچنین دنباله‌ی $\{u_n\}$ همگرای ترتیبی[۱۰] به u است و می‌نویسیم $u_n \xrightarrow{o} u$ هرگاه دنباله‌ی $f_n \downarrow \circ$ موجود باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|u - u_n| \leq f_n$ و دنباله‌ی $\{u_n\}$ کوشی ترتیبی[۱۱] است اگر دنباله‌ی $f_n \downarrow \circ$ وجود داشته باشد که

---

[4] T-Solvable [5] T-Uniquely Solvable [6] Riesz [7] Strictly Monotone [8] Dedekind Complete [9] Archimedean Property [10] Order convergence [11] Order Cauchy

$|u_n - u_m| \leq f_n$ برای هر ۱ $n \geq m \geq$. بدیهی است که هر دنباله‌ی همگرای ترتیبی، کوشی ترتیبی و نیز کران‌دار ترتیبی است.

زیرمجموعه‌ی A را در مشبکه نرم‌دار E، بسته ترتیبی[12] گوییم هرگاه برای هر دنباله‌ی $A \supseteq \{x_n\}$ که $x_n \xrightarrow{o} x$ نتیجه شود که $x \in A$.

توجه: اگر A و B دو زیرمجموعه ناتهی از مشبکه کامل ددکیند E باشند که بیشینه‌ـ بسته و کمینه‌ـ بسته هستند آنگاه A و B بسته ترتیبی هستند. چون اگر $\{x_n\} \subseteq A$ و $x_n \xrightarrow{o} x$ آنگاه دنباله‌ی $\{x_n\}$ کران‌دار ترتیبی است و بنابر قضیه ۱۰٫۱٫۱ از [۵]، $x = \inf_n\{\sup_{k\geq n} x_k\} = \sup_n\{\inf_{k\geq n} x_k\}$ پس $x \in A$. چنانچه E یک مشبکه باناخ نیز باشد در این‌صورت A و B نرم بسته خواهند بود؛ چون در مشبکه‌های باناخ هر مجموعه بسته ترتیبی، نرم بسته است.

فرض کنید که $0 < u \in E$ در این‌صورت دنباله‌ی $E \supseteq \{f_n\}$ را همگرای uـ یکنواخت به f گوییم هرگاه برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$، اندیس $n(\varepsilon)$ موجود باشد که برای هر $n \geq n(\varepsilon)$ داشته باشیم $|f - f_n| \leq \varepsilon u$ (یا به‌طور معادل می‌توان گفت که دنباله اعداد $\varepsilon_n \downarrow 0$ موجود باشد که برای هر n، $|f - f_n| \leq \varepsilon_n u$). باید توجه داشت که اگر فضای E ارشمیدسی نباشد آنگاه f می‌تواند منحصربه‌فرد نباشد. به‌طور مشابه دنباله‌ی $E \supseteq \{f_n\}$ را کوشی uـ یکنواخت گوییم هرگاه برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$، اندیس $n(\varepsilon)$ موجود باشد که برای هر $m, n \geq n(\varepsilon)$ داشته باشیم $|f_m - f_n| \leq \varepsilon u$. بدیهی است که هر دنباله‌ی همگرای uـ یکنواخت، کوشی uـ یکنواخت است. دنباله‌ی $E \supseteq \{f_n\}$ همگرای یکنواخت نسبی[13] به f است هرگاه $0 < v \in E$ موجود باشد که $\{f_n\}$ به‌طور vـ یکنواخت همگرا به f باشد و در این‌صورت می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{un} f$.

واضح است که در هر فضای ارشمیدسی اگر $f_n \xrightarrow{un} f$ آنگاه $f_n \xrightarrow{o} f$. فضای ارشمیدسی E را کامل یکنواخت[14] گوییم هرگاه برای هر $0 < v \in E$ هر دنباله‌ی کوشی vـ یکنواخت دارای حد باشد.

توجه: بنابر قضیه ۸٫۱٫۱ از [۵] هر مشبکه باناخ و نیز هر مشبکه کامل ددکیند، کامل یکنواخت است.

در ادامه این مقاله همواره فرض بر این است که E یک مشبکه کامل ددکیند و A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از E هستند که بیشینه‌ـ بسته و کمینه‌ـ بسته می‌باشند.

۲. نتایج اصلی

در این بخش به بیان تعاریفی جدید در مشبکه E می‌پردازیم.

فرض کنید E یک مشبکه کامل ددکیند، A و B دو زیرمجموعه ناتهی از E که بیشنه‌ـ بسته و کمینه‌ـ بسته هستند و $A \geq B$ و یا $B \geq A$. با توجه به این‌که $|A - B| = \{|a - b| : a \in A, b \in B\}$ پس اگر $A \geq B$ (یعنی $x \geq y$ برای هر $(x, y) \in A \times B$) آنگاه

$$|A - B| = A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

و در این‌صورت با توجه به این‌که

$$\inf(A - B) = \inf A + \inf(-B) = \inf A - \sup B$$

پس $d(A, B) = \bigwedge |A - B| = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}$ در $A - B$ وجود دارد. یعنی وجود دارد $a_0 \in A$ و $b_0 \in B$ به قسمی که $d(A, B) = a_0 - b_0$ و درنتیجه $\mathring{A}$ و $\mathring{B}$ ناتهی هستند که در آن

$$\mathring{A} = \{x \in A : \exists z \in B, |x - z| = d(A, B)\}$$

[12] Order Closed [13] Relatively Uniform convergence [14] Uniformly Complete

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119636.1344

و

$$\overset{\circ}{B} = \{y \in B : \exists z \in A, |y - z| = d(A, B)\}.$$

اگر $T : A \to B$ یک نگاشت باشد آن‌گاه (x, Tx) نزدیکترین دوتایی مخروطی[۱۵] است هرگاه

$$|x - Tx| = d(A, B)$$

و در این‌صورت $x \in A$، نزدیکترین نقطه مخروطی برای نگاشت T است.

مجموعه‌ی همه‌ی بهترین نقاط تقریبی مخروطی برای T را با $P_T^c(A, B)$ نشان می‌دهیم یعنی:

$$P_T^c(A, B) = \{x \in A : |x - Tx| = d(A, B)\}.$$

مسأله نزدیکترین دوتایی مخروطی را به ترتیب Tـ حلپذیر (Tـ حل پذیر یکتا) گوییم هرگاه $P_T^c(A, B) \neq \emptyset$ ($\text{card } P_T^c(A, B) = ۱$).

باید توجه داشت که شرط لازم برای این‌که مسأله نزدیکترین دوتایی مخروطی Tـ حل‌پذیر باشد آن است که $T(\overset{\circ}{A}) \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$. واضح است که در هر مشبکه باناخ، $\overset{\circ}{A} \subseteq A_\circ$ و $\overset{\circ}{B} \subseteq B_\circ$ و $P_T^c(A, B) \subseteq P_T(A, B)$.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید E یک مشبکه کامل ددکیند و A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از E هستند که بیشینه‌ـ بسته و کمینه‌ـ بسته هستند و $B \geq A$ و یا $A \geq B$. در این‌صورت اگر $T : A \to B$ یک نگاشت دلخواه باشد آن‌گاه $\text{card } P_T^c(A, B) \leq ۱$.*

اثبات. فرض کنید $A \geq B$ (اثبات در حالت دیگر مشابه است). اگر $x - Tx = y - Ty = d(A, B)$ آن‌گاه $d(A, B) = x - Tx \leq (x \wedge y) - Tx$ و $d(A, B) = y - Ty \leq (x \wedge y) - Ty$. درنتیجه $x \leq x \wedge y$ و $y \leq x \wedge y$ و این یعنی $x = y$. بنابراین $\text{card } P_T^c(A, B) \leq ۱$. □

قضیه ۲.۲. *فرض کنید E یک مشبکه کامل ددکیند و A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از E هستند که بیشینه‌ـ بسته و کمینه‌ـ بسته هستند و $B \geq A$ و یا $A \geq B$ در این‌صورت مسأله نزدیکترین دوتایی مخروطی، Tـ حل‌پذیر یکتاست اگر و تنها اگر $T(\overset{\circ}{A}) \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$.*

اثبات. با توجه به این‌که شرط لازم برای Tـ حل‌پذیر بودن مسأله نزدیکترین دوتایی مخروطی این است که $T(\overset{\circ}{A}) \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$. پس اثبات از یک طرف بدیهی است. حال فرض کنید که $T(\overset{\circ}{A}) \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$. ابتدا نشان می‌دهیم که $\overset{\circ}{A}$ و $\overset{\circ}{B}$ تک نقطه‌ای هستند. اگر $a_\circ, a_۱ \in \overset{\circ}{A}$ آن‌گاه $z_\circ, z_۱ \in B$ موجودند که $a_۱ - z_۱ = a_\circ - z_\circ = d(A, B)$ و داریم:

$$d(A, B) = a_۱ - z_۱ \leq (a_\circ \wedge a_۱) - z_۱$$

و

$$d(A, B) = a_\circ - z_\circ \leq (a_\circ \wedge a_۱) - z_\circ.$$

بنابراین $a_\circ \leq a_\circ \wedge a_۱$ و $a_۱ \leq a_\circ \wedge a_۱$ یعنی $a_۱ = a_\circ$. به‌طور مشابه اگر $b_\circ, b_۱ \in \overset{\circ}{B}$ آن‌گاه $z_\circ, z_۱ \in A$ موجودند که

$$z_\circ - b_\circ = z_۱ - b_۱ = d(A, B)$$

[15] Conic Best Proximity Pair

بنابراین:

$$d(A,B)=z_1-b_1\leq z_1-(b_0\vee b_1)$$

و

$$d(A,B)=z_0-b_0\leq z_0-(b_0\vee b_1)$$

و درنتیجه $b_1=b_0$. با توجه به این‌که $\mathring{A}$ و $\mathring{B}$ ناتهی هستند پس $\mathring{A}$و $\mathring{B}$ تک نقطه‌ای هستند و داریم $\mathring{A}=\{a_0\}$ و $\mathring{B}=\{b_0\}$.
از طرفی $T(\mathring{A})\cap\mathring{B}\neq\emptyset$ پس $T(a_0)=b_0$ و درنتیجه

$$a_0-Ta_0=a_0-b_0=d(A,B).$$

یعنی $\operatorname{card}P_T^c(A,B)=1$. □

قضیه ۳.۲. *هرگاه $E\in\mathrm{STM}$ یک مشبکه کامل ددکیند و A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از E باشند که بیشینه– بسته و کمینه– بسته هستند و $B\geq A$ و یا $A\geq B$. در این‌صورت مسأله نزدیکترین دوتایی T– حل‌پذیر یکتاست اگر و تنها اگر $T(A_0)\cap B_0\neq\emptyset$.*

اثبات. اثبات از یک طرف بدیهی است. فرض کنید $T(A_0)\cap B_0\neq\emptyset$. با توجه به این‌که $\mathring{A}$ و $\mathring{B}$ ناتهی هستند. پس A_0 و B_0 ناتهی هستند. نشان می‌دهیم که A_0 و B_0 تک نقطه‌ای هستند. فرض کنید $a_0,a_1\in A_0$ پس وجود دارند $z_0,z_1\in B$ به قسمی که

$$\|a_0-z_0\|=\|a_1-z_1\|=\operatorname{dist}(A,B).$$

با توجه به این‌که $a_0\wedge a_1\in A$ پس: $0\leq(a_0\wedge a_1)-z_0\leq a_0-z_0$ و درنتیجه

$$\|(a_0\wedge a_1)-z_0\|=\|a_0-z_0\|=\operatorname{dist}(A,B).$$

اکنون با توجه به ویژگی STM مشبکه E داریم: $(a_0\wedge a_1)-z_0=a_0-z_0$ و در نتیجه $a_0\leq a_1$ و به‌طور مشابه داریم $a_1\leq a_0$ و درنتیجه $a_1=a_0$. بنابراین A_0 تک نقطه‌ای است و به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که B_0 تک نقطه‌ای است. درنتیجه $\mathring{A}=A_0$ و $\mathring{B}=B_0$. بنابراین $\operatorname{card}P_T(A,B)=1$. □

یادآوری می‌شود که بردار $e>0$ را در مشبکه E، یکه ترتیبی قوی[16] گوییم هرگاه برای هر $x\in E$ عدد حقیقی $\lambda>0$ موجود باشد که $|x|\leq\lambda e$. به عبارت دیگر $E=\bigcup\{n[-e,e]:n\in\mathbb{N}\}$ که در آن $[a,b]=\{z\in E:a\leq z\leq b\}$.
در هر مشبکه باناخ E، $e\in E^+$ یکه ترتیبی قوی است اگر و تنها اگر e یک نقطه درونی E^+ (نسبت به توپولوژی نرم) باشد [1]. مثلاً $e=(a_n)_1^\infty\in\ell_\infty$ یکه ترتیبی قوی است (در ℓ_∞) اگر و تنها اگر $\inf\{a_n:n\in\mathbb{N}\}>0$.
واضح است که اگر E یک فضای ارشمیدسی با یکه ترتیبی قوی u باشد آن‌گاه E کامل یکنواخت است هرگاه هر دنباله‌ی کوشی u– یکنواخت دارای حد باشد. نگاشت $T:A\cup B\to A\cup B$ را یک نگاشت انقباضی دوری مخروطی[17] گوییم هرگاه T دوری باشد (یعنی $T(A)\subseteq B$ و $T(B)\subseteq A$) و $k\in(0,1)$ موجود باشد که برای هر $(x,y)\in A\times B$ داشته باشیم:

$$|Tx-Ty|\leq k|x-y|+(1-k)d(A,B).$$

[16] Strong Order Unit [17] Conic Cyclic Contraction Map

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119636.1344

قضیه ۴.۲. *فرض کنید E یک مشبکه کامل ددکیند و A و B دو زیرمجموعه‌ی ناتهی از E هستند که بیشینه‌ـ بسته و کمینه‌ـ بسته هستند و $A \geq B$ و یا $B \geq A$. اگر $T : A\cup B \to A \cup B$ یک نگاشت انقباضی دوری مخروطی باشد و $x_۰ \in A$ موجود باشد که $u = |Tx_۰ - x_۰| - d(A, B)$ یکه ترتیبی قوی باشد آن‌گاه مسأله نزدیکترین دوتایی مخروطی به‌طور یکتا حل‌پذیر است.*

اثبات. بنابر قضیه ۱.۲، $\operatorname{card} P^c_T(A, B) \leq ۱$. برای $x \in A$ تعریف می‌کنیم

$$x_{n+۱} = Tx_n = T^{n+۱}x_۰ \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots).$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned}|x_{n+۱} - x_n| &= |Tx_n - Tx_{n-۱}| \leq k|x_n - x_{n-۱}| + (۱ - k)d(A, B)\\ &\leq k^۲|x_{n-۱} - x_{n-۲}| + (۱ - k^۲)d(A, B)\end{aligned}$$

با استقراء داریم:

$$|x_{n+۱} - x_n| \leq k^n|x_۱ - x_۰| + (۱ - k^n)d(A, B)$$

یعنی

$$۰ \leq |x_{n+۱} - x_n| - d(A, B) \leq k^n u$$

که در آن $u = |Tx_۰ - x_۰| - d(A, B)$، پس $|Tx_n - x_n|$ همگرای uـ یکنواخت به $d(A, B)$ است. قرار می‌دهیم $y_n = x_{۲n}$ ، $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و نشان می‌دهیم که $\{y_n\} \subseteq A$ همگرای uـ یکنواخت است که در آن u یکه ترتیبی قوی است. کافی است که نشان دهیم دنباله $\{y_n\}$ کوشی uـ یکنواخت است. فرض کنید عدد حقیقی $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد. با توجه به این‌که $x_n - Tx_n$ همگرای uـ یکنواخت به $d(A, B)$ است. پس اندیس $n(\varepsilon)$ موجود است که برای هر $n \geq n(\varepsilon)$، $(y_n - Ty_n) - d(A, B) \leq \varepsilon u$. از طرفی برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $y_m \wedge y_n \in A$. پس برای هر $m, n \geq n(\varepsilon)$ می‌توان نوشت:

$$۰ \leq (y_m \wedge y_n) - Ty_n - d(A, B) \leq y_n - Ty_n - d(A, B) \leq \varepsilon u$$

و

$$۰ \leq (y_m \wedge y_n) - Ty_m - d(A, B) \leq y_m - Ty_m - d(A, B) \leq \varepsilon u.$$

با توجه به این‌که

$$y_n - (y_m \wedge y_n) = (y_n - Ty_n - d(A, B)) - ((y_m \wedge y_n) - Ty_n - d(A, B))$$

پس

$$۰ \leq y_n - (y_m \wedge y_n) \leq \varepsilon u.$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$۰ \leq y_m - (y_m \wedge y_n) \leq \varepsilon u.$$

بنابراین:

$$|y_m - y_n| \leq |y_m - (y_m \wedge y_n)| + |y_n - (y_m \wedge y_n)| \leq ۲\varepsilon u$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119636.1344

و درنتیجه دنباله $\{y_n\}$ کوشی uـ یکنواخت و بنابراین همگرای uـ یکنواخت است. پس $x \in A$ موجود است که دنباله‌ی $\{y_n\}$ همگرای uـ یکنواخت به x است (با توجه به اینکه A بسته ترتیبی است و هر دنباله‌ی همگرای uـ یکنواخت، همگرای ترتیبی نیز می‌باشد). یعنی برای هر $\varepsilon > ۰$ اندیس $n(\varepsilon)$ موجود است که برای هر $n \geq n(\varepsilon)$، $|x_{۲n} - x| \leq \varepsilon u$ و نیز $x_{۲n} - Tx_{۲n} - d(A,B) \leq \varepsilon u$. بنابراین:

$$۰ \leq x - Tx_{۲n} - d(A,B) \leq |x - x_{۲n}| + |x_{۲n} - Tx_{۲n}| - d(A,B) \leq ۲\varepsilon u.$$

همچنین

$$\begin{aligned} ۰ &\leq |x_{۲n+۲} - Tx| - d(A,B) = |Tx_{۲n+۱} - Tx| - d(A,B) \\ &\leq |x_{۲n+۱} - x| - d(A,B) = |Tx_{۲n} - x| - d(A,B) \\ &= x - Tx_{۲n} - d(A,B) \leq ۲\varepsilon u. \end{aligned}$$

و بالاخره داریم:

$$۰ \leq x - Tx - d(A,B) \leq |x - x_{۲n}| + |x_{۲n} - Tx| - d(A,B) \leq ۳\varepsilon u.$$

و این یعنی $x - Tx = d(A,B)$. بنابراین

$$\text{card } P_T^c(A,B) = ۱.$$

□

توجه: اگر در قضیه ۴.۲ مشبکه E دارای ویژگی STM نیز باشد آن‌گاه بنابر آن‌چه در اثبات قضیه ۳.۲ انجام شد، $A_۰$ و $B_۰$ تک نقطه‌ای هستند و درنتیجه $\text{card } P_T(A,B) = ۱$.

۳. تشکر وقدردانی

نویسندگان از داوران مقاله بجهت دقت و نظرات مفید آنها تشکر می‌کنند. همچنین از زحمات دکتر حسین خورشیدی در آزمایشگاه هندسه کامپیوتری و سیستمهای دینامیکی بخاطر اینکه محیطی آرام را برای پژوهش آماده کرده اند کمال تشکر را دارند.

مراجع

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive operators*, Springer, Dordrecht, 2006.
[2] J. Anuradha and P. Veeramani, Proximal pointwise contraction, *Topology Appl.*, **156** (2009) 2942–2948.
[3] G. Birkhoff, Lattice theory, *American Mathematical Society*, Providence, R.I, 1979.
[4] A. A. Eldred and P. Veeramani, Existence and convergence of best proximity points, *J. Math. Anal. Appl.*, **323** (2006) 1001–1006.
[5] P. M. Nieberg, *Banach lattices*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[6] V. S. Raj and P. Veeramani, Best proximity pair theorems for relatively nonexpansive mappings, *Appl. Gen. Topol*, **10** (2009) 21–28.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119636.1344

علی اصغر سروری
یزد، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، آزمایشگاه هندسه کامپیوتری و سیستمهای دینامیکی
sarvari_math@yahoo.com

علی اصغر سروری متولد تیر ماه سال ۱۳۵۴ در گناباد است. وی در سال ۱۳۷۲ وارد مقطع کارشناسی در رشته دبیری ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی در دانشگاه بیرجند شد. او در سال ۱۳۹۲ وارد مقطع دکتری ریاضی محض گرایش آنالیز شد که تحت نظر دکتر حمید مظاهری قرار گرفت و هم اکنون آماده دفاع از پایان نامه خود است.

حمید مظاهری تهرانی
یزد، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی
hmazaheri@yazd.ac.ir

حمید مظاهری تهرانی متولد ۱۳۴۹ در اصفهان است. او عضو هیات علمی دانشگاه یزد با درجه دانشیاری است که کلیه مقاطع لیسانس، فوق لیسانس و دکتری خود را در دانشگاه شهید باهنر کرمان گذرانده است وی از سال ۱۳۷۹ عضو هیات علمی دانشگاه یزد شده است.

حمید رضا خادم زاده
یزد، دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، آزمایشگاه هندسه کامپیوتری و سیستمهای دینامیکی
hrkhademzadeh@gmail.com

حمید رضا خادم زاده متولد آذر ماه ۱۳۵۹ در شهر یزد است. وی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه پیام نور تفت و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه یزد شد. او در ادامه در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع دکتری ریاضی محض گرایش آنالیز دانشگاه یزد شد و زیر نظر دکتر مظاهری در سال ۱۳۹۳ از پایان نامه خود دفاع کرد و هم اکنون در دانشگاه فنی و حرفه ای دانشکده فنی شهید صدوقی یزد مشغول به کار است.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.119636.1344