ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۴، شماره ۳ (۱۳۹۸)، صص. ۲۲-۹ © ۱۳۹۸ دانشگاه اصفهان
http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

آموزش و یادگیری هندسه: معرفی نظریه فن‌هیلی

نرگس یافتیان * و اشرف صفابخش‌چکوسری

چکیده. از میان شاخه‌های ریاضیاتِ مورد مطالعه در دوران مدرسه، هندسه با گستره وسیع‌تری از بدفهمی‌ها و مشکلات یادگیری، روبه‌روست و یادگیری آن، تنها زمانی رخ می‌دهد که با درکی عمیق آمیخته باشد. نظریه فن‌هیلی یکی از نظریه‌های در خور توجه در قلمرو هندسه است که ایده دسته‌بندی سطوح درک و تفکر هندسی را مطرح ساخته، چارچوبی برای سنجش سطح تفکر هندسی فرد به دست می‌دهد. هدف مقاله حاضر، که به صورت مروری و به روش کتابخانه‌ای انجام شده است، تلاشی در جهت آگاه‌سازی بیشتر جامعه معلمان و آموزشگران ریاضی از وجود این نظریه می‌باشد. آشنایی با این نظریه و به خصوص آگاهی از این امر که این نظریه، رساله دکترای دو معلم هندسه بوده است که در کلاس‌های هندسه خود، با مشکلاتی مواجه بوده‌اند که بسیار شبیه مشکلاتی است که معلمان ریاضی کشور ما در کلاس خود با آن روبه‌رو بوده و هستند، الهام‌بخشِ گزینشِ این نظریه بوده است. این نظریه اگر پاسخ همه پرسش‌های معلمان علاقمندی را که به آموزش ریاضیات و هندسه مشغول هستند، ندهد، دست کم به طیف گسترده‌ای از «چراها» و «چگونه‌ها»ی آموزش و یادگیری هندسه، پاسخ می‌دهد. گواه این مطلب، شمار بسیارِ پژوهش‌های جهانیِ صورت گرفته درباره این نظریه است که خود می‌تواند به نوعی، مؤید در خور توجه بودن و ارزشمندی این نظریه باشد. از این‌رو، نظریه فن‌هیلی شایستگی پژوهش و بررسی بیشتر را داراست.

۱. مقدمه

خاستگاه دانش هندسه به مردمانی در زمان‌هایی بسیار دیرین بازمی‌گردد و بنا به نظر جونز[۱] [۱۶] هندسه شاید حتی، کهن‌ترین شاخه ریاضیات باشد. هرودوت[۲]، مورخ یونانی (سده‌ی پنجم قبل از میلاد)، پیدایش دانش هندسه را به مساحان مصری نسبت می‌دهد ولی یافته‌های باستانشناسی حاکی از آن است که تمدن‌هایی همچون بابل، هند و چین نیز، در شکوفایی دانش هندسه نقش بسزایی داشته‌اند[۳] [۵]. در کنار اینان، باید از یونان باستان نیز نام برد که نمی‌توان نقش بی‌بدیل آن را در پیشرفت دانش هندسه، به هیچ روی، نادیده گرفت. با این حال با استناد به گرینبرگ، پیش از تالس، بنیان هندسه باستان، بیش از هر چیز بر آزمایش، حدس‌ها، بررسی شباهت‌ها و شهود بوده است و کوتاه سخن آن که، هندسه باستان دانشی بود تجربی. حوزه‌هایی از هندسه که در دوران باستان بیشتر مورد کاربرد و توجه قرار داشتند، مربوط به روابط میان طول‌ها، سطوح و حجم اشکال فیزیکی می‌باشند. در این دوره‌های زمانی، هندسه ابزاری بوده است برای اندازه‌گیری زمین (همان که ما امروز نقشه‌برداری[۴] می‌نامیم) و همچنین ساخت بناهای آیینی و فرهنگی [۱۶].

عبارات و کلمات کلیدی. هندسه، نظریه فن‌هیلی، سطوح تفکر فن‌هیلی .
دبیرتخصصی رابط: مسعود آرین‌نژاد
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۰۶
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329

[1]Jones [2]Herodotus [3]Greenberg [4]Surveying

به لطف لوح‌های گِلی یافت شده در بابل و پاپیروس‌های مصری، تا اندازه‌ای از پیشرفت این دو قوم در دانش هندسه آگاهیم. آنچه از الواح بابلی برمی‌آید چنان است که این مردم در ۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰ سال پیش از میلاد مسیح، با قواعد کلی محاسبه مساحت اشکال هندسی مسطح، حجم منشور قائم، محیط و مساحت تقریبی دایره و حتی رابطه فیثاغورس، آشنا بوده‌اند. مصریان نیز اگر چه بر پایه شواهد، هرگز در ریاضیات به سطحی که بابلیان رسیده بودند، دست نیافتند، ولی از مهارت مهندسی در سطح بالایی برخوردار بوده‌اند چنان که در ساخت هرم بزرگ گیزه[5] در حدود ۲۹۰۰ سال پیش از میلاد مسیح، خطای نسبی در قاعده مربع شکل، کمتر از ۱/۱۴۰۰۰ و در زاویه‌های قائمه گوشه‌ها کمتر از ۱/۲۷۰۰۰ گزارش شده است. با این حال، هندسه مصری را، بیش از آنکه بتوان به معنی واقعی کلمه علم نامید، می‌توان انبانی از قواعد محاسبه، بی هیچ موجبی یا توجیهی دانست [۲، ۵].

نخستین هندسه منطقی، یعنی هندسه‌ای که احکام آن از راه استدلال قیاسی ثابت می‌شدند و نه از راه آزمایش و خطا، در یونان به دست تالس بنیاد نهاده شد. در واقع می‌توان استخراج منظم قضایا را از راه اثبات، مشخصه بارز ریاضیات یونانی برشمرد. فیثاغورس و شاگردانش نیز، به مدت دو سده، در پیروی از تالس، روش او را در نظم‌بخشی ادامه دادند. «انجمن برادری» که فیثاغورس آن را به همراه پیروان خود تشکیل داده بود، بنیان‌گذار آیینی بود که در آن یگانگی با خدا از راه مطالعه موسیقی و ریاضی میسر می‌گردید. اینان در ریاضیات، ویژگی‌های شگفت‌انگیز بسیاری درباره اعداد کشف کردند ولی با کشف طول‌های گنگ، یکه خوردند و حتی گفته می‌شود نخستین کسی از آنان که این راز را آشکار ساخت، به طرز مشکوکی غرق گردید. از آنجا که فیثاغورسیان، $\sqrt{۲}$ را عدد نمی‌شمردند، جبر خود را به صورت هندسی درآوردند تا بتوانند $\sqrt{۲}$ و طول‌های گنگ نظیر آن را، به وسیله پاره‌خط‌هایی با طول گویا، نمایش دهند. همچنین، روش سقراطیِ محاوره، روش اثباتی نامستقیم است که به کمک آن نشان داده می‌شود که حکم، زمانی که به تناقضی بینجامد، نادرست است. افلاطون که شاگرد سقراط بود، بارها اثبات گنگ بودنِ طول قطر مربعی به ضلع واحد را به عنوان مثالی برای یک روش اثبات نامستقیم آورد. این گنگ بودنِ طول، هرگز نمی‌توانست از راه اندازه‌گیری‌های عینی که همیشه آمیخته با اندکی خطای تجربی است، کشف شود [۵].

در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح، اقلیدس، شاهکار خود یعنی کتاب ۱۳ جلدی «اصول[6]» را منتشر کرد که در آن همه تجارب و کارهای مهم پیشنیان خود را نیز گرد آورده بود (همان منبع). در این اثر که دربردارنده ده اصل[7] بنیادین است، چندصد قضیه به وسیله منطق استنتاجی، اثبات شده‌اند [۱۶]. روشی بُنداشتی[8] که اقلیدس به کار برد، الگویی برای ریاضیاتی است که امروزه ریاضیات محض نامیده می‌شود و در آن برای اثبات احکام، هیچ تجربه عینی‌ای نیاز نیست و آنچه مهم است درستی استدلال به کار رفته در اثبات قضایاست [۵]. به نظر می‌رسد پس از دو کتاب مقدس مسیحیان و مسلمانان، هیچ کتاب دیگری به این گستردگی مورد کاربرد، ویرایش یا مطالعه قرار نگرفته باشد و شاید بتوان گفت هیچ اثری به اندازه این کتاب بر تفکر علمی تأثیرگذار نبوده است [۱۶].

قرن نوزدهم شاهد تحولاتی چشمگیر در همه شاخه‌های دانش، از جمله هندسه بود و از آن زمان بر محتوای هندسه و گوناگونی آن افزوده شده است [۱۶]. امروزه دانش هندسه، خود به بیش از ۵۰ نوع هندسه دسته‌بندی می‌شود (مالکویچ[9]، ۱۹۹۱؛ نقل شده در [۱۶]).

۲. مشکلات یادگیری و درک هندسه

سِر کریستوفز زیمَن[10] (۲۰۰۱)، ریاضیدان سرشناس بریتانیایی، هندسه را چنین تعریف کرده است: «هندسه شامل همه شاخه‌هایی از ریاضیات می‌گردد که شهود دیداری[11] را (که چیره‌ترینِ حواس ماست) برای یادآوری قضایا، درک

[5] Giza [6] Elements [7] Ten Axioms and Postulates [8] Axiomatic Method [9] Malkevitch [10] Sir Christopher Zeeman [11] Visual Intuition

اثبات، گمانه‌زنی[۱۲]، دریافت واقعیت و بخشیدن بینش کلی، به کار می‌گیرد» (نقل شده در [۱۶]، ص۱۲۴) اُلدنو[۱۳] [۲۱] در پیشگفتار گزارشی که با عنوان آموزش و یادگیری هندسه ۱۱-۱۹[۱۴]، منتشر شده است، در مقایسه هندسه و جبر می‌گوید:

> در سطح مدرسه، جبر کاملاً انتزاعی و ذهنی[۱۵] به نظر می‌رسد. در مطالعاتی که فیتزجرالد[۱۶] برای انجمن کاک‌کرافت[۱۷] انجام داد[۱۸]، اغلب، جبر به عنوان بخشی از ریاضیات ذکر شده است که بزرگسالان از آن به عنوان نقطه‌ای که ارتباطشان با ریاضیات قطع گردید، یاد کرده‌اند. از سوی دیگر، در هندسه پیوندهای آشکاری به جهان حواس و تجارب ما یافت می‌شود. برای مثال، ما به راحتی درک می‌کنیم که اشیا چه وقت موازی یا عمود بر هم و یا متقارن هستند، مانند دریافت این مطلب که تابلویی که آویخته شده، به تنظیمی جزئی نیاز دارد (ص vii).

از این گفتارها چنین برمی‌آید که مهارت دیداری در حوزه دانش هندسه، نقشی اساسی دارد. حتی در خارج از حوزه ریاضیات نیز، به طور معمول کتاب‌هایی که برای کودکان نوشته می‌شوند، از تصاویر گوناگون برای جذب کودکان بهره می‌گیرند. بنابراین شاید به جرأت بتوان گفت قابل لمس بودنِ بسیاری از مفاهیم پایه‌ای هندسه و دیداری بودنِ آنها، پتانسیلی است نیرومند که می‌تواند از همان سال‌های نخستین تحصیل، به منظور علاقمند ساختن کودکان به هندسه، به کار رود. با اینحال آنچه در عمل در مورد درس هندسه اتفاق می‌افتد، به‌طور معمول، جز این است. اُلدنو [۲۱] پس از آنکه «تاریخچه طولانی کاربرد هندسه» و «ظرفیت تجسمی بالای هندسه» را به طور تلویحی به‌عنوان دو ویژگی ارزشمند هندسه برمی‌شمارد، بیان می‌کند: «به ظاهر چنین می‌نماید که هندسه باید یکی از ساده‌ترین شاخه‌های ریاضیات در آموزش باشد. ولی اینگونه نیست ــ نه در انگلستان و نه در بیشترِ [کشورهای] توسعه‌یافته[۱۹] »(ص vii).

در اینجا، پرسشی که به طور طبیعی به ذهن متبادر می‌شود، آن است که چرا چنین رُخ می‌دهد؟ چرا با وجود آن که هندسه از چنین قابلیت‌هایی برای جذب یادگیرنده برخوردار است، در عمل با گزارش‌هایی نه چندان رضایت‌بخش درباره عملکرد دانش‌آموزان در شاخه هندسه روبه‌رو هستیم؟ در پاسخ به این پرسش‌ها، تحلیلی از فن‌هیلی [۲۵] ارائه می‌شود که در کنار ژرف بودن، با زبانی ساده بیان شده است:

هنر تدریس در آن است که سه عنصرِ معلم، دانش‌آموز و محتوای آموزشی[۲۰] در کنار هم قرار می‌گیرند. از آنجا که توجه همیشگی و همزمان به هر سه عنصر، بسیار دشوار است، بسیار رایج است که گاهی یکی از این عناصر نادیده گرفته شود. اگر عنصر دانش‌آموز یا محتوای آموزشی نادیده گرفته شوند، این مشکل پدید می‌آید که دریافت دانش‌آموز از محتوای آموزشی، چیزی کاملاً متفاوت از ساختاری خواهد بود که در ذهن معلم است.

اگر منظور ما از آموزش این است که دانش‌آموز باید چگونگی اثبات قضایا را بداند، بسیار نامحتمل است که این هدف همان چیزی باشد که در ذهن دانش‌آموز وجود دارد. نامحتمل است از آن رو که، دانش‌آموز نخواهد توانست ایده اثبات یک قضیه را به صورت درونی درک کند. در واقع، اگر او چنین دیدگاهی داشت، نیازی به فراگیری اثبات نداشت. درک ریاضیات یعنی: دانستن رابطه میان دو قضیه. به محض آنکه معنای این قضایا درک شود، فرد ارتباط میان آنها را نیز درک خواهد کرد. اگر ریاضیات تا این اندازه دشوار است، به آن دلیل است که معلم این روابط را می‌داند ولی شناخت او از این روابط، متفاوت از شناخت دانش‌آموز است. به عنوان مثال، معلمی را در نظر بگیرید که می‌خواهد تقارن محوری در صفحه را به دانش‌آموزانی که با آن آشنا نیستند، آموزش دهد. او به دانش‌آموزان می‌آموزد که نقطه‌های روی هر محور در تقارن نسبت به آن محور، ثابت می‌مانند؛ پاره‌خط‌های متقارن دارای طولی یکسان‌اند؛ و خط‌های متقارن، در یک نقطه

[۱۸] گزارش کاک‌کرافت (۱۹۸۲) که گزارشی درباره آموزش ریاضیات در مدرسه‌های انگلستان بوده است.

[۱۹] در متن اصلی، ترکیب واژه‌ای World Developed به‌کار رفته است.

[12] Inspire Conjecture [13] Oldknow [14] Teaching and Learning Geometry 11-19 [15] cerebral [16] Fitzgerald [17] Cockcroft [20] Subject Matter

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329

روی محور تقارن، به هم می‌رسند. سپس برای آنکه ببیند دانش‌آموزان مطلب را درک کرده‌اند، این مسأله را بیان می‌کند: «فرض کنید ABC مثلثی باشد که در یک طرفِ خط داده شده‌ی L قرار دارد. قرینه این مثلث را نسبت به خط L رسم کنید». روش حلی که در ذهن معلم است، این است: «کافی است قرینه هر یک از نقاط A، B و C را نسبت به خط L بیابیم و مسأله حل می‌شود».

هنگامی که معلم استدلال می‌کند، همه چیزهایی که به ذهن او خطور می‌کند، استدلال معلمی است که همه روابط را می‌داند و دانش‌آموز نمی‌تواند فرایندی مشابه آن را، بدون کمک معلم، بپروراند. در مثالی که بیان شد، معلم از این حقیقت که طول پاره‌خط‌های قرینه با هم برابر است، استفاده کرده است. این ترفند برای دانش‌آموزان معنایی ندارد زیرا آنها هنوز مثالی ندیده‌اند که خلاف آن را نشان دهد؛ آنها تبدیلی نمی‌شناسند که طول پاره‌خط را تغییر دهد. از این گذشته، حل مسأله‌ای که بیان گردید، نیازمند آن است که دانش‌آموز به کمک سیستمی استدلال کند که متشکل از روابط میانِ مفاهیمی است که او آنها را نمی‌شناسد. مفاهیمی همچون «نقطه»، «محور تقارن»، «پاره‌خط»، «تلاقی»، «ثابت»، «تغییر طول»، «مثلث» و «امتداد». بی‌تردید، معلم همه این مفاهیم و اصطلاحات را پیش از این شرح داده است. او ممکن است حتی، برای نشان دادن نادرستی رابطه‌ای، مثال‌های نقضی هم نشان داده باشد. ولی باید توجه داشت این، معلم بوده است که مثالی نقض ارائه کرده است و نه دانش‌آموز. دانش‌آموز نمی‌تواند، چون برای ارائه یک مثال نقض، باید سیستمی از روابط در دسترس باشد، و او هنوز چنین سیستمی در اختیار ندارد.

بنابراین، مشکل از آنجا پدیدار می‌شود که معلم، تدریس را به کمک سیستمی از روابط آغاز می‌کند که تنها به خود او تعلق دارند. او روابطی ریاضی را توضیح می‌دهد که در پایان توسط دانش‌آموز به خاطر سپرده می‌شوند. او یاد می‌گیرد که با روابطی که درک نکرده و منشا آنها را نمی‌داند، طوطی‌وار کار کند. البته تا اینجا شاید به نظر برسد همه چیز همانطور پیش رفته است که انتظار می‌رفت و دانش‌آموز هم در پایان، به همان سیستم روابطی که معلم در اختیار داشت، دست یافته است. آیا این همان هدف آموزشی‌ای نیست که قرار بود به آن برسیم؟ در پاسخ باید گفت که (۱) چنین سیستمی از روابط، بر پایه تجربه‌های حسی[۲۱] دانش‌آموز شکل نگرفته است و بنابراین دارای این پتانسیل است که در کوتاه زمانی فراموش شود. (۲) از آنجا که این سیستم روابط، ساختاری مستقل از تجارب دیگر فرد است، فرد تنها می‌تواند در همان موقعیتی (مسأله‌ای) که این روابط در آن استفاده شده‌اند، درست عمل کند. اگر مسأله تغییر کند، او قادر به اِعمال این سیستم روابط، در موقعیت تازه نخواهد بود. (۳) از آنجا که این سیستم روابط، به صورت آماده در اختیار دانش‌آموز قرار گرفته است، او نخواهد توانست در حوزه‌های ساختارنیافته دیگر، خودش چنین سیستمی از روابط را بسازد. آموزش مطلوب ریاضی، زمانی انجام شده است که دانش‌آموزان در حوزه‌های تازه، بتوانند به تنهایی، سیستم روابط استنتاجی خودشان را بنا کنند.

آنچه توسط فن‌هیلی [۲۵] بیان گردید، توضیح فرایندی بود که فن‌هیلی آن را ریشه عدم یادگیری می‌داند. فرایندی ارتباطی میان دانش‌آموز و معلم که در آن، این دو به زبانی بسیار متفاوت از یکدیگر صحبت می‌کنند. می‌توان این مسأله را به این صورت بیان کرد که آنها در سطوح متفاوتی می‌اندیشند و این، همان ایده‌ای است که به آفرینش نظریه فن‌هیلی انجامید.

۳. نظریه فن‌هیلی

پیره ماری فن‌هیلی[۲۲] (۱۹۰۹–۲۰۱۰) و دینا فن‌هیلی گلداف[۲۳] (۱۹۱۱–۱۹۵۸)، دو معلم ریاضی مدارس مونته‌سوری در هلند بودند که رویارویی با چالشِ تقریباً همیشگیِ ضعف دانش‌آموزان در هندسه، آن دو را به جستجوی ریشه‌های این مشکل برانگیخت. آنها بر این باور بودند که هندسه دبیرستان، نیازمند «سطحی» نسبتاً بالا از تفکر است، در حالی که

[21] Sensory Experiences [22] Pierre Marie Van Hiele [23] Dina Van Hiele-Geldof

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329

دانش‌آموزان، تجربه کافیِ تفکر در «سطوحِ» پیشنیاز پایین‌تر را نداشتند [۱۳]. اَدِل[۲۴] [۸] به نقل از پیره فن‌هیلی آورده است: خیلی زود پس از آن که شغلم را به عنوان معلم ریاضی آغاز کردم، دریافتم که این حرفه، حرفه سختی است. مباحثی بود که من می‌توانستم بارها و بارها توضیح دهم در حالی که دانش‌آموزان همچنان این مباحث را درک نمی‌کردند. در طول سال‌های پس از آن، توضیحاتم را بارها و بارها عوض کردم ولی آن مشکلات، همچنان باقی ماندند. همواره اینگونه بود که گویی من به زبان دیگری صحبت می‌کردم و همین ایده بود که سبب کشف راه حل شد: سطوح متفاوت تفکر (ساختار و بینش[۲۵]، صفحه ۳۹).

مطالعه این زوج، به آفرینش دو رساله دکترای جداگانه ولی همزمان انجامید که هر رساله به جنبه‌هایی متفاوت از نظریه‌ای پرداخته بود که امروزه به نام نظریه فن‌هیلی شناخته می‌شود. حوزه کاری دینا فن‌هیلی، گردآوری فعالیت‌هایی آموزشی[۲۶] به منظور ارتقای سطح تفکر دانش‌آموزان بود، در حالی که پیره فن‌هیلی به تدوین ساختار سطوح تفکر و اصولی که به دانش‌آموزان در کسب بینش هندسی کمک کند، پرداخت [۱۳]. از اوایل دهه‌ی ۸۰ میلادی، این نظریه در جهت توضیح این امر که چرا دانش‌آموزان در هندسه دبیرستانی و به طور ویژه در فرایندهای شناختیِ سطح بالا، با مشکل روبه‌رو هستند، به کار آمده است (نایت[۲۷]،[۱۷]. یوسسکین[۲۸] [۲۴] سه جنبه متفاوت از نظریه فن‌هیلی را برمی‌شمارد:

۱. این نظریه، مدعی وجود سطوح متفاوت تفکر است (سطوح تفکر فن‌هیلی).

۲. این سطوح دارای ویژگی‌هایی مشترک‌اند (ویژگی‌های سطوح).

۳. با آموزش به شیوه‌ای خاص می‌توان گذر از یک سطح به سطحی دیگر را شتاب بخشید (فازهای یادگیری).

در ادامه به این سه جنبه نظریه فن‌هیلی پرداخته خواهد شد.

۱.۳. سطوح فن‌هیلی. پیش از بیان سطوح و توصیف ویژگی‌های هر سطح، لازم به توضیح است که شماره‌گذاری این سطوح در برخی متون و مقاله‌ها، از صفر تا ۴ (به طور مثال، [۱۰، ۱۲، ۱۳]) و در برخی دیگر از ۱ تا ۵ (به طور مثال [۱۹، ۱۵]) می‌باشد و در مقاله حاضر، از سیستم شماره‌گذاری اخیر استفاده شده است. نکته دیگر این که، برخی سطوح در متون مختلف با دو یا سه نام متفاوت آمده‌اند که در اینجا، یکی از این نامگذاری‌ها که توسط مری کراولی [۱۲] مورد استفاده قرار گرفته، به کار رفته است. در معرفی سطوح به بقیه نام‌ها در داخل پرانتز، اشاره خواهد شد. به جز تفاوت در شماره‌گذاری و نام‌گذاری سطوح، در مشخصه‌های کلی هر سطح، بین متون مختلف تفاوت چندانی دیده نشد.

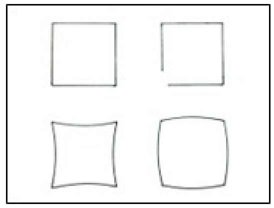
۲.۳. سطح اول: تجسم[۲۹] (شناسایی[۳۰]). در این سطح، به مفاهیم هندسی به عنوان ماهیت‌هایی کلی نگریسته می‌شود و نه به عنوان مفاهیمی که دربردارنده اجزایی هستند. برای نمونه، اشکال هندسی با ریختِ کلی خود شناخته می‌شوند که به معنی ظاهر فیزیکی آنهاست و نه اجزا و ویژگی‌هایشان [۱۲]. بنابراین تمرکز اصلی دانش‌آموزی که عملکرد او در سطح اول است، روی ظاهر اشکال است. وقتی که او شکلی را مربع می‌داند، در واقع به کلیت آن واکنش نشان می‌دهد، نه به زاویه‌های قائمه و اضلاع هم‌اندازه‌اش [۱۴].

اگر از او پرسیده شود که چرا فکر می‌کند این چهارضلعی مشخص، مربع است، به طور معمول پاسخ می‌دهد: «چون مانند یک مربع است» و یا ممکن است در توصیف آن، از اشیای پیرامون خود و یا نمونه‌های آشنا کمک بگیرد [۱۹، ۲۲]. به طور مثال، برای توجیه مربع بودن یک شکل، ممکن است از شباهت آن به یک جعبه، استفاده کند.

پیوزی [۲۲] در وصف ویژگی‌های رفتاری این سطح، چنین بیان میکند که فردی که در این سطح استدلال می‌کند، ممکن است اشکالی را که شبیه مربع به نظر می‌رسند نیز، مربع بداند. در تصویر۱، یک مربع در کنار سه شکل دیگر که می‌توانند از سوی فردی با تفکر سطح اول، به عنوان مربع شناسایی شوند، رسم گردیده است.

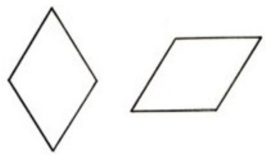
[24]Adele [25]Structure and Insight [26]Didactic Experiment [27]Knight [28]Usiskin [29]Visualization [30]Recognition

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329



تصویر ۱

افراد در این سطح، ویژگی‌های نادرست، مبهم یا بی‌ربط را برای توصیف یک شکل به کار می‌برند (مانند جهت یک شکل) و در همان حال، ویژگی‌های مناسب و اصلی را نادیده می‌گیرند [۱۱]. به طور مثال، دانش‌آموز با دیدن تصویر۲، شکل سمت چپ را یک لوزی می‌داند و ممکن است شکل سمت راست این تصویر (که دوران یافته شکل سمت چپ است)، از نظر او یک لوزی نباشد و یا درک او از این شکل، به عنوان «یک لوزیِ چرخانده شده» باشد.



تصویر ۲

کسی که عملکردی در سطح اول دارد، می‌تواند واژه‌های هندسی را یاد بگیرد، شکلی معین را بشناسد و شکل دیگری نظیر آن بسازد یا رسم کند [۱۲]. بنا بر فن‌هیلی [۲۵]، وقتی که به یک کودک شش ساله نشان داده شود که یک لوزی چیست، یک مستطیل، یک مربع یا یک متوازی‌الاضلاع چه اشکالی هستند، او می‌تواند این شکل‌ها را به کمک تابلوی هندسی[۳۱] بسازد (هر چند این کار برای او سخت باشد)؛ ولی او نمی‌تواند در تصویری که از یک لوزی به او داده شده، یک متوازی‌الاضلاع ببیند. در این سطح، لوزی، یک متوازی‌الاضلاع نیست بلکه به نظر او چیزی است کاملاً متفاوت با متوازی‌الاضلاع. یوسسکین [۲۴] نیز از فن‌هیلی نقل می‌کند اگر به کودکی که در این سطح قرار دارد گفته شود که «هر چهارضلعی که چهار ضلع هم‌اندازه دارد، لوزی نامیده می‌شود»، این استدلال، او را برای پذیرش این که مربع نیز یک لوزی است، قانع نخواهد کرد. به نظر میسون [۱۹]، دانش‌آموز در این سطح، نه از روی استدلال که بر اساس دریافت‌هایش تصمیم‌گیری می‌کند. در واقع آن چیزی هم که در این سطح، استدلال نامیده می‌شود، ارتباط چندانی با استدلال ریاضی ندارد.

۳.۳. سطح ۲: تجزیه و تحلیل[۳۲]. این سطح، آغاز تحلیل مفاهیم هندسی است [۱۲]. در این سطح، دانش‌آموز، اشکال را به کمک ویژگی‌هایشان شناخته و توصیف می‌کند [۱۱]. به نظر او، یک مستطیل یعنی شکلی که چهار زاویه راست و دو قطر هم‌اندازه دارد و همچنین اندازه ضلعهای روبه‌روی هم آن با هم برابرند. اگر کسی به دانش‌آموز بگوید که چهارضلعی کشیده شده روی تخته، چهار زاویه راست دارد، از نظر او این شکل یک مستطیل (یا مربع) خواهد بود حتی اگر تصویر خیلی خوبی از آن، رسم نشده باشد [۲۵].

در این سطح، دانش‌آموزان ویژگی‌ها و قواعد اشکال را به صورت تجربی، مثلا با مشاهده، اندازه‌گیری، رسم، تا کردن، استفاده از صفحه‌های شطرنجی و نمودارها و ... کشف می‌کنند [۱۱، ۱۳]. هم‌چنین درمی‌یابند که برخی از این ویژگی‌ها در کنار هم به رده‌ای از اشکال اشاره می‌کنند و برخی دیگر نه، و به باور کلمنتس [۱۱] اینجاست که بذر مفاهیم هندسی کاشته می‌شود. به طور مثال، دانش‌آموزان با تا کردن مربعهای کاغذی مختلف از روی قطرهایشان و از طریق

[31] Geoboard [32] Analysis

تجربه (استدلال استقرایی) این واقعیت را که در مربع‌ها، دو قطر بر هم عمودند درمی‌یابند. در واقع در این سطح، بیشتر ویژگی‌ها، بر اساس تعمیم بخشیدن نتیجه‌ای که از راه تجربه بر روی تعداد معدودی مثال به دست آمده، کشف، درک و پذیرفته می‌شوند.

باید توجه داشت اگرچه در این سطح از تفکر، به ویژگی‌های اشکال بیشتر از ظاهر فیزیکی آنها توجه می‌شود، ولی هنوز روابط بین ویژگی‌های یک شکل و همچنین روابط بین اشکال، دیده نمی‌شوند [۱۲]. به عنوان مثال دانش‌آموز می‌گوید «مثلثِ متساوی‌الاضلاع، مثلثی است که سه ضلع برابر و سه زاویه برابر دارد» و درک نمی‌کند که برابری سه ضلع یا برابری سه زاویه، هر یک به تنهایی برای متساوی‌الاضلاع بودن یک مثلث کافی است. میسون [۱۹] چنین بیان می‌کند که شخص ممکن است در توصیف یک شکل، همه ویژگی‌هایی را که درباره آن شکل می‌داند فهرست کند بی‌آنکه بتواند تعیین کند کدام ویژگی‌ها لازم و کدام‌ها برای توصیف شکل، کافی‌اند. در کنار این مشخصه، از آنجا که روابط بین اشکال هم به طور معمول درک نمی‌شوند، دسته‌بندی‌های اشکال معمولاً با هم تداخل یا اشتراک ندارند. به عنوان نمونه، دانش‌آموز با اینکه ویژگی‌های مربع و مستطیل را می‌داند، ولی هنوز نمی‌پذیرد که مربع یک مستطیل است. او ممکن است مستطیل را به این دلیل که دو ضلع آن از دو ضلع دیگر بلندترند [۱۰]، کاملاً متمایز از مربع بداند. کلمنتس [۱۱] مدعی است بیشتر دانش‌آموزان، تا پیش از دوره راهنمایی و یا حتی دبیرستان، به سطح دوم نمی‌رسند[۳۳].

۴.۳. سطح ۳: استنتاج غیررسمی[۳۴] (انتزاع[۳۵] یا ترتیب[۳۶]). در این سطح، روابط میان ویژگی‌های یک شکل، و نیز روابط میان اشکال، درک می‌شود. به طور مثال در چهارضلعی‌ها، موازی بودنِ ضلع‌های روبه‌رو، ایجاب می‌کند که زاویه‌های روبه‌رو نیز برابر باشند (ارتباط میان ویژگی‌های یک شکل)؛ همچنین، مربع، یک مستطیل است چون همه ویژگی‌های یک مستطیل را داراست (ارتباط میان اشکال). به بیان دیگر، دانش‌آموز می‌تواند ویژگی‌های یک شکل را استنتاج کند و رده‌های اشکال را تشخیص دهد. تعاریف درک می‌شوند و استنتاج‌های غیررسمی می‌توانند فهمیده شوند [۱۲]. به باور کلمنتس [۱۱]، از آنجا که یک ویژگی می‌تواند به ویژگی‌های دیگری اشاره کند، بنابراین تعریف‌ها نه تنها به عنوان توصیفِ یک مفهوم، بلکه به عنوان روشی برای سازماندهی منطقی ویژگی‌ها خواهند بود. او می‌تواند استدلال‌های منطقی را درک کند و گاه حتی خود نیز چنین استدلال‌هایی بیاورد ولی استنتاج‌های او در این مرحله، غیررسمی‌اند. مثلا درباره مجموع زاویه‌های یک چهارضلعی ممکن است گفته شود که چون هر چهارضلعی را می‌توان به دومثلث افراز کرد و مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، پس مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی، ۳۶۰ درجه است [۱۱] ولی شاید دانش‌آموز نتواند این اثبات را با روابط و نمادهای ریاضی بنویسد.

اگرچه نظم‌بخشیِ منطقی به ایده‌ها، نخستین جلوه آشکارِ استنتاج حقیقی است [۱۱]، با اینحال در این سطح، هنوز نقش و اهمیت استنتاج رسمی و اصول موضوع درک نمی‌شود [۱۲]. دانش‌آموزی که در این سطح قرار دارد، در مواجهه با دسته‌ای از اشکال، یک شکل را مربع می‌داند چون همه خواص یک لوزی و یک مستطیل را داراست [۱۱]. به عبارتی یک مربع، مستطیل است چون در این سطح، تعاریفِ اشکال به میان آمده‌اند و هنوز معانی حقیقی استنتاج درک نمی‌شود [۲۵]. کراولی [۱۲] بیان کرده است که دانش‌آموز در این سطح، گاه حتی نتایجی را که به طور تجربی به دست آمده‌اند، آمیخته با تکنیک‌های استنتاجی به‌کار می‌برد. او اضافه می‌کند با این که اثبات‌های رسمی ممکن است درک شوند، ولی فرد هنوز درک نمی‌کند چگونه می‌توان ترتیب منطقیِ اثبات را تغییر داد و یا چگونه از فرض‌هایی متفاوت یا ناآشنا، اقدام به اثبات نمود. به گفته فن‌هیلی، افرادی که در این سطح قرار دارند، نمی‌توانند خود، اثباتی را ارائه دهند مگر آنکه گام‌های

---

[۳۳] برخی ادعاهای پژوهشگران خارجی با آن که در زمانی متفاوت از امروز و با توجه به شرایط کشورهای دیگری به جز کشورمان بیان شده‌اند، ولی به طور تجربی میتواند در مورد وضعیت کنونی در کشور ما نیز مصداق پیدا کند. متاسفانه در مقایسه با بسیاری از کشورهای توسعه یافته، شواهد علمی و پژوهش‌ها و داده‌های آماری قابل استناد بسیار اندکی در این باره، در کشور ما موجود است.

[34]Informal Deduction [35]Abstraction [36]Order

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329

اثبات بسیار اندک باشند. او ادعا می‌کند اگر اثباتی در سطوح پایین‌تر از سطح سوم ارائه شود، صرفاً اثباتی خواهد بود که به خاطر سپرده شده و نمی‌تواند توسط فرد تولید شده باشد [۲۲].

۵.۳. سطح ۴: استنتاج[۳۷]. در این سطح، تفکر با مفهوم استنتاج، عکس یک قضیه، اصول موضوع و شرایط لازم و کافی، درآمیخته است [۲۵]. در سطح چهارم، اهمیت استنتاج به عنوان روشی برای پایه‌گذاری نظریه‌های هندسی در یک سیستم اصل موضوعی درک می‌شود و نقش اصطلاح‌های تعریف نشده، اصول موضوع، تعریف‌ها، قضیه‌ها، اثبات و همبستگی میان این مفاهیم، دیده می‌شود [۱۲]، و نیز فرد تفاوت میان آنها را تشخیص می‌دهد [۱۱]. همچنین شخصی که در این سطح از تفکر قرار دارد، از عهده درک شرایط لازم و کافی و اثر متقابل آنها بر هم برمی‌آید و تمایز میان یک حکم[۳۸] و عکس آن را تشخیص می‌دهد؛ روش‌های گوناگون اثبات پذیرفتنی است و اثبات‌ها تنها به خاطر سپرده نمی‌شوند، بلکه می‌توانند تولید شوند [۱۲]. این بدان معناست که فرد می‌تواند دنباله‌ای از گزاره‌ها را ارائه کند که نتیجه‌ای را به طور منطقی و به عنوان پیامدی از «فرض‌ها»، توجیه می‌کنند [۱۱]. میسون [۱۸، ۱۹] خاطرنشان می‌سازد کسی که در این سطح از تفکر هندسی قرار دارد، به طور معمول از پس اثبات‌هایی که در کتاب‌های هندسه دبیرستانی آورده می‌شوند، برمی‌آید.

۶.۳. سطح ۵: دقت موشکافانه[۳۹]. در این سطح، قضیه‌ها در سیستم‌های اصل موضوعیِ گوناگون مطرح می‌شوند و شخص قادر است این سیستم‌های متفاوت را تجزیه، تحلیل و مقایسه کند [۱۲، ۱۳]. این بدان معناست که هندسه‌های نااقلیدسی می‌توانند مطالعه شوند [۱۲]. هندسه در این سطح می‌تواند بدون وجود مدل‌های عینی درک شود [۱۰] و به بیانی دیگر، در این سطح، هندسه به شدت انتزاعی است. اصول موضوع که در سطح پیشین به عنوان اجزای تغییر ناپذیر هندسی درک می‌شدند، می‌توانند به طور اساسی تغییر کنند. برای مثال، هندسه‌های نااُقلیدسی می‌توانند درک شوند [۲۴]. مطالعه هندسه در سطح پنجم به شدت مجرد است. جدول۱، سطوح فن‌هیلی را به طور خلاصه و به همراه توانایی‌های مورد انتظار در هر سطح، نمایش می‌دهد.

جدول ۱: سطوح فن‌هیلی

سطح	نام سطح	توانایی دانش‌آموز
۱	تجسم	اشکال را بر اساس ظاهرشان توصیف می‌کند.
۲	تجزیه و تحلیل	اشکال را بر اساس ویژگی‌هایشان توصیف می‌کند.
۳	استنتاج غیررسمی	اهمیت ویژگی‌ها را درک کرده و به روابط میان آنها پی می‌برد. از اینرو، می‌تواند ویژگی‌های شکل‌ها را به طور منطقی مرتب کند.
۴	استنتاج	توانایی استدلال منطقی دارد و قضیه‌ها را به صورت استنتاجی اثبات می‌کند.
۵	دقت موشکافانه	قضایا را در سیستم‌های اصل موضوعی متفاوت پایه‌گذاری و تحلیل می‌کند.

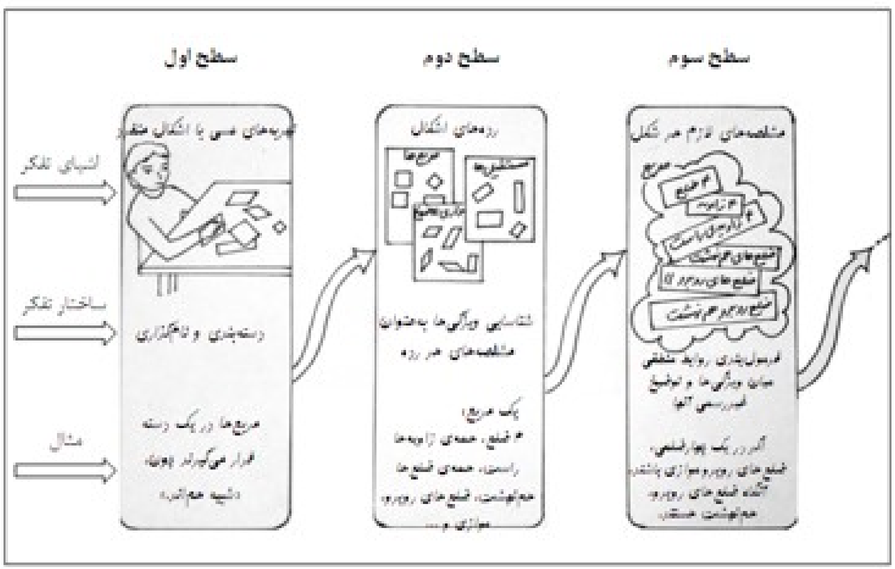
۴. ویژگی‌های سطوح فن‌هیلی

افزون بر مشخصه‌هایی که برای هر یک از سطوح تفکر فن‌هیلی بیان گردید، این سطوح تفکر، دارای مشخصه‌هایی کلی‌اند که آنها با عنوان ویژگی‌های مدل فن‌هیلی یاد می‌شود.

[37] Deduction [38] Statement [39] Rigor

۱.۴. سلسله‌مراتبی [۴۰] بودنِ سطوح (توالی ثابت[۴۱]). این ویژگی اگر چه به وسیله خود فن‌هیلی [۲۵] در فهرست ویژگی‌ها نیامده است ولی در منابع [۲۴، ۱۲] به عنوان نخستین ویژگی سطوح تفکر فن‌هیلی فهرست شده است. یوسسکین [۲۴] آن را ویژگی‌ای می‌داند که در بطن سطوح فن‌هیلی وجود دارد و شاید دلیل آن که فن‌هیلی، خود، این ویژگی را در فهرست ویژگی‌های سطوح ذکر نکرده است، همین باشد. این ویژگی بیان می‌کند که دانش‌آموز نمی‌تواند به سطح nاُم دست یابد، مگر آن که پیش از آن، سطح $(n-1)$اُم را گذرانده باشد.

۲.۴. ماهیت درونی[۴۲] و بیرونی [۴۳] اشیای مورد مطالعه. فن‌هیلی [۲۵] بیان می‌کند که آنچه سطوح را از یکدیگر متمایز می‌سازد، تفاوت اشیای تفکر[۴۴] در هر سطح است. برای مثال در سطح نخست، اشیای تفکر را اشکال هندسی تشکیل می‌دهند. در سطح دوم، با اشیایی مشخص به نام رده‌های اشکال (که دستاورد سطح نخست‌اند) کار می‌کند و ویژگی‌های این رده‌ها را کشف می‌کند. در سطح سوم این ویژگی‌ها، به همان اشیایی بدل می‌گردند که دانش‌آموز با به‌کارگیری‌شان، ترتیبی منطقی از آنها استخراج می‌کند [۱۳] و این فرایند به همین صورت ادامه می‌یابد (تصویر۳). کراولی [۱۲] این ویژگی را به این صورت بیان می‌کند که اشیای ذاتی[۴۵] یک سطح، اشیای مورد مطالعه در سطح بعدی خواهند بود.



تصویر ۳. اشیای تفکر در سطوح فن‌هیلی (برگرفته از [۱۳]، ص ۶)

البته باید خاطرنشان ساخت که حتی در سطح اول نیز، شکل‌ها در حقیقت به کمک ویژگی‌هایشان تشخیص داده می‌شوند ولی کسی که در این سطح می‌اندیشد، از این ویژگی‌ها آگاه نیست [۲۵]. به طور مثال، در سطح نخست، تنها فرم کلی یک شکل دریافت می‌شود. با این‌حال، مسلما این شکل به کمک ویژگی‌هایش تشخیص داده می‌شود، ولی تا سطح دوم که سطح تحلیل اشکال است، اجزا و ویژگی‌های آن کشف نمی‌گردند [۱۲]. کودکی را در نظر بگیرید که سطح تفکر هندسی او در سطح اول فن‌هیلی است. این کودک در تشخیص مربع بودنِ یک شکل، ممکن است از شباهت آن به اشیای پیرامون خود کمک بگیرد، با این حال برابری چهار ضلع و راست بودن گوشه‌ها در درک مربع بودنِ شکل نقش دارند. البته کودک به صورت آگاهانه به این ویژگی‌ها توجه نمی‌کند چون آنها در کلیت مربع حل شده‌اند (ذاتی بودن

[40]Sequential [41]Fixed Sequence [42]Intrinsic [43]Extrinsic [44]Objects of Thought [45]Inherent

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329

ویژگی‌ها). در سطح دوم، همین ویژگی‌ها به عنوان معیاری برای تشخیص مربع بودن یک شکل به‌کار می‌روند. یعنی فرد، پیش از مربع دانستنِ یک شکل، به هم‌اندازه بودن ضلع‌ها و راست بودن زاویه‌ها به صورت مستقل از کلیت شکل، توجه می‌کند و تنها در صورتی که این روابط برقرار باشند، مربع بودن شکل تأیید می‌گردد (بیرونی شدن ویژگی‌ها).

۳.۴. ویژگی‌های زبانشناختی[46] هر سطح. هر سطح، دارای نمادهای زبانشناختی مخصوص به خود و نیز شبکه روابطی که این نمادها را به هم پیوند می‌دهند، می‌باشد [۲۴، ۲۵]. رابطه‌ای که در یک سطح درست است، ممکن است در سطح دیگر، نادرست باشد [۲۵] و یا اصلاح گردد [۱۲]. برای تبیین این ویژگی، مثالی ارائه می‌گردد. دانش‌آموزی که در سطح دوم فن‌هیلی است، مربع، لوزی، مستطیل و متوازی‌الاضلاع را چهار رده متفاوت از چهارضلعی‌ها می‌داند. در این مرحله، وجود بیش از یک نام برای یک شکل مشخص، پذیرفتنی نیست و تداخل رده‌ها درک نمی‌شود. با این حال، هنگامی که این دانش‌آموز به سطح سوم تفکر دست می‌یابد، درمی‌یابد که مربع، یک مستطیل (یک لوزی و همچنین یک متوازی‌الاضلاع) است. این رابطه که در سطح دوم نمی‌توانست درک شود، اکنون در سطح سوم، رابطه‌ای است بنیادین [۱۲].

فن‌هیلی [۲۵] بیان کرده است که نمادهای زبانشناختی بسیاری، در دو سطح متوالی ظاهر می‌گردند و سبب ایجاد همبستگی میان سطوح مختلف می‌گردند و تلقی پیوستگی این حوزه‌های گسسته[47] را سبب می‌گردند. ولی باید توجه داشت که معانی این نمادها در سطوح مختلف، متفاوت است. مفهوم هر نماد به کمک ارتباط آن با دیگر نمادها، نمودار می‌گردد. برای مثال، در سطح اول، واژه مربع، معنایی متفاوت از معنای آن، در سطح دوم یا سوم دارد.

۴.۴. عدم یادگیری در صورت ناهمسانی[48] سطوح. دو فرد که در دو سطح متفاوت استدلال می‌کنند، نمی‌توانند یکدیگر را درک کنند [۲۵]. به گفته فن‌هیلی، این همان چیزی است که اغلب در کلاس درس، میان معلم و دانش‌آموز اتفاق می‌افتد. در اینجا با بهره‌گیری از توضیح فن‌هیلی، به توصیف وضعیتی در کلاس درس پرداخته می‌شود که در اثر عدم تطابق سطوح معلم و دانش‌آموز، رخ می‌دهد. وقتی که معلم در سطحی فراتر از سطح دانش‌آموز، آموزش می‌دهد، هیچ یک از این دو نمی‌تواند تفکر دیگری را دنبال کند. هنگامی که معلم آموزشی در سطح تفکر خود ارائه می‌دهد، ممکن است در طول روند آموزش، پرسش‌هایی هم بپرسد و البته از دانش‌آموز انتظار دارد که به آنها پاسخ دهد، ولی از آنجا که دانش‌آموز در سطحی پایین‌تر از سطح معلم می‌اندیشد، موضوع را آنگونه که معلم انتظار دارد درک نخواهد کرد و بنابراین اگر پاسخی بدهد، پاسخی نه در سطح تفکر معلم، که منطبق با سطح تفکر خودش خواهد داد. روشن است که چنین پاسخی از سوی معلم، نابجا یا نامعقول جلوه خواهد کرد، بنابراین گفتگوی میان معلم و دانش‌آموز بیشتر یک تک‌گویی است تا یک گفتگوی دوطرفه. البته این اختلاف سطح، تنها به اختلاف سطوح آموزشگر و یادگیرنده مربوط نمی‌شود. هرگاه سطح واژه‌ها، محتوا و مواد آموزشی و ... بالاتر از سطح یادگیرنده باشد، دانش‌آموز قادر به پیروی از فرایند تفکر به‌کار رفته، نخواهد بود [۱۲].

۵.۴. پیشرفت[49]. پیشرفت یا عدم پیشرفت از سطحی به سطح دیگر، بیش از آنکه به سن یادگیرنده یا بلوغ زیستی بستگی داشته باشد، به نوع آموزشی که او دریافت می‌کند، وابسته است [۱۲، ۱۳]. هیچ شیوه آموزشی نمی‌تواند سبب گردد که دانش‌آموز از سطحی جهش کند؛ با این‌حال، ممکن است برخی شیوه‌های آموزشی به پیشرفت کمک کنند در حالی که برخی دیگر، روند پیشروی در سطوح را کند کرده یا از آن جلوگیری نمایند [۱۲]. فن‌هیلی اشاره کرده است که می‌توان به یک دانش‌آموز ماهر، توانایی‌هایی را در سطحی فراتر از سطح حقیقی فرد آموزش داد؛ مانند وقتی که کودکی حساب کردن با کسرها را یاد می‌گیرد بی‌آنکه درباره مفهوم کسر به او چیزی گفته شده باشد (فرودنتال، ۱۹۷۳؛ نقل

[47] فن‌هیلی (۱۹۵۹) سطوح تفکر را گسسته می‌داند، در حالی که پژوهش‌های افرادی مانند [۱۰]، بیانگر آن بوده‌اند که ماهیت این سطوح بیش از آنکه گسسته باشد، پیوسته است.

[46] Linguistics [48] Mismatch [49] Advancement

شده [۱۲])، ولی در اینجا یادگیری به معنای واقعی اتفاق نیفتاده است زیرا کودک، مفهوم کسر را درک نکرده است. به عنوان مثالی هندسی، به‌خاطر سپردن فرمول‌های محاسبه مساحت اشکال هندسی و یا روابطی از این دست که «یک مربع، یک مستطیل است» امکان‌پذیر می‌باشد، ولی آنچه در حقیقت رخ می‌دهد این است که مبحث آموزشی به سطحی پایین‌تر تنزل یافته و در واقع این روابط فهمیده نشده‌اند [۱۲].

در مسیر پیشروی در سطوح، چنان که گفته شد، آموزش می‌تواند نقش بازدارنده و یا شتاب‌دهنده داشته باشد. فن‌هیلی [۲۵] هدف هنر آموزش را رویارویی و پاسخگویی به این پرسش می‌داند: چگونه می‌توان به‌گونه‌ای تأثیرگذار به دانش‌آموز در پیشرفت از سطحی از تفکر به سطح بالاتر از آن، کمک کرد؟ بخشی از نظریه فن‌هیلی که به معرفی فازهای یادگیری[۵۰] می‌پردازد، مدعی پاسخگویی به پرسش یاد شده است. نظریه، ادعا می‌کند اجرای الگوریتم‌وارِ فازهای یادگیری که دنباله‌ای متشکل از پنج مرحله‌اند، در کلاس درس، به روند پیشرفت سطوح تفکر شتاب می‌بخشد (فن‌هیلی گلداف، ۱۹۸۴؛ نقل شده در [۱۲]).

۵. فازهای یادگیری

۱.۵. فاز ۱: جستجو[۵۱] (اطلاعات[۵۲]). در این مرحله، معلم و دانش‌آموزان در یک سطح مشخص از تفکر، پیرامون اشیای مورد مطالعه به گفتگو و فعالیت می‌پردازند؛ مشاهداتی صورت می‌گیرد، پرسش‌هایی مطرح می‌گردد و واژه‌های متعلق به این سطح معرفی می‌گردند (هافر[۵۳]، ۱۹۸۳؛ نقل شده در [۱۲]). به طور مثال در آغاز تدریس چهارضلعی‌ها، معلم از دانش‌آموزان می‌پرسد که متوازی‌الاضلاع چیست؟ چه ویژگی‌هایی دارد؟ مستطیل، لوزی و مربع چیستند؟ ویژگی‌های هر یک از این سه نوع چهارضلعی چیست؟ چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی میان این چهارضلعی‌ها وجود دارد؟ اگر بخواهند به کسی که مستطیل را نمی‌شناسد، این چهارضلعی را معرفی کنند، آن را چگونه معرفی می‌کنند؟ کراولی [۱۲] دو فایده برای این پرسش و پاسخ‌ها برمی‌شمارد: نخست این که معلم به سطح ورودی دانش‌آموزان پی می‌برد؛ دیگر آنکه، دانش‌آموزان تا اندازه‌ای با مسیر درس آشنا می‌شوند.

۲.۵. فاز ۲: جهت‌دهی هدایت شده[۵۴]. حال پس از گذراندن مرحله پیشین، هنگام آن است که دانش‌آموزان با فعالیت‌هایی روبه‌رو گردند که بنا بر کراولی [۱۲] به وسیله معلم، به دقت به دنبال هم چیده شده‌اند و قرار است دانش‌آموزان را رفته رفته به کشف ساختارهای مشخصه سطح جدید، راهنمایی کند؛ بنابراین، بیشتر این فعالیت‌ها، تکالیفی کوچک هستند که برای استخراج پاسخ‌هایی خاص طراحی شده‌اند.

فاز ۳: شفاف‌سازی[۵۵]. در این مرحله، دانش‌آموزان بر اساس فعالیت‌هایی که پیش از این انجام داده‌اند، دیدگاه تازه خود را درباره ساختارهایی که مشاهده کرده‌اند، بیان و مبادله می‌کنند. نقش معلم در این میان، به ارائه کمک در استفاده از زبان مناسب و دقیق، محدود می‌شود [۱۲، ۲۵]. برای مثال، پس از انجام فعالیت‌هایی هدایت شده درباره متوازی‌الاضلاع، دانش‌آموزان درباره ویژگی‌هایی که درباره این چهارضلعی دریافته‌اند، به گفتگو می‌پردازند و یافته‌های خود را در کلاس مطرح می‌کنند. ممکن است دانش‌آموزی در بیان ویژگی توازی ضلع‌های روبه‌رو، از جمله «ضلع‌های متوازی‌الاضلاع با هم موازی‌اند» استفاده کند. در چنین موقعیت‌هایی معلم می‌تواند در تصحیح و بیان بهترِ ویژگی کشف شده، به دانش‌آموز کمک کند.

۳.۵. فاز ۴: جهت‌گیری آزاد[۵۶]. در چهارمین مرحله یادگیری، دانش‌آموز حوزه مطالعه را کم و بیش می‌شناسد ولی هنوز نیازمند آن است که بتواند مسیر خود را در آن به سرعت پیدا کند. این امر به وسیله تکالیفی که می‌توانند به روش‌های گوناگون پاسخ داده شوند [۲۵] و تکالیف بازپاسخ [۱۲] تحقق پیدا می‌کند. کراولی [۱۲] به نقل از هافر (۱۹۸۳)

[50]Phases of Learning [51]Inquiry [52]Information [53]Hoffer [54]Directed Orientation [55]Explication [56]Free Orientation

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329

می‌نویسد: [در این فاز] دانش‌آموزان در یافتن مسیر خود و حل مسأله، تجربه می‌اندوزند و با وفق دادن خود با حوزه مورد مطالعه، بسیاری از روابط میان اشیای مورد مطالعه بر آنها آشکار می‌گردد (ص ۲۰۸).

۴.۵. فاز ۵: یکپارچه‌سازی[۵۷]. تا مرحله چهارم، دانش‌آموز فراگرفته است خود را با سطح جدید وفق دهد، ولی، اکنون نیازمند آن است که یک مرور کلی از آنچه در اختیار او قرار گرفته است، ارائه دهد. او تلاش می‌کند حوزهای را که به تفکر در آن پرداخته است، جمعبندی کند و در این میان، معلم می‌تواند با زمینه‌یابی[۵۸]های کلی، به او کمک کند [۲۵]. فن‌هیلی [۲۵] خاطرنشان می‌کند که در این زمینه‌یابی‌ها نباید هیچ مفهوم جدیدی را به دانش‌آموز معرفی کرد و جمع‌بندی می‌بایست تنها شامل همان مفاهیم و روابطی باشد که دانش‌آموز آموخته است.

در پایان مرحله پنجم، سطح جدیدی از تفکر به دست آمده است و دانش‌آموز به سیستم تازه‌ای از روابط که با کل حوزه مورد مطالعه، در ارتباط است، دست یافته است [۲۵]. اکنون، سطح جدیدی از تفکر، جایگزین سطح پیشین شده است و دانش‌آموزان آماده‌اند تا برای دستیابی به سطح بعدی نیز، همین پنج فاز یادگیری را تکرار کنند [۱۲]. البته یوسسکین [۲۴] اشاره می‌کند که نوشته‌های پیره و دینا فن‌هیلی، بیانگر این است که فرایند گذر از یک سطح به سطح بعدی، نیازمند زمانی طولانی‌تر از یک ساعت یا چند جلسه آموزشی است. او در ادامه به دینا فن‌هیلی گلداف [۲۵] استناد می‌کند که برای رساندن دانش‌آموزان ۱۲ ساله از سطح نخست به سطح دوم، ۲۰ جلسه، و برای رساندن همین دانش‌آموزان از سطح دوم به سطح سوم، ۵۰ جلسه آموزشی را گزارش کرده بود.

پژوهش‌های انجام شده در راستای این نظریه، اهمیت آن را آشکار می‌سازد (پژوهش‌هایی مانند [۱، ۳، ۴، ۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۵، ۱۷، ۲۰، ۲۳، ۲۴]) و ایده تفاوت سطوح تفکر، که برخاسته از مشکلات یادگیری هندسه در کلاس‌های هندسه بوده است، ایده‌ای است که شایسته‌ی توجه بیشتری است و می‌تواند مبنای پژوهش‌های مربوط به مشکلات و بدفهمی‌های یادگیری ریاضی و هندسه در کشورمان باشد.

۶. نتیجه‌گیری

بسیاری از ما، همواره با این واقعیت ملموس در کلاس درس روبه‌رو بوده‌ایم که دانش‌آموزان از مبحث هندسه بیش از سایر مباحث ریاضی گریزان‌اند و میزان بیشتری از بدفهمی‌ها، یادگیری‌های ناقص یا عدم یادگیری در این مبحث روی می‌دهد. به عنوان مدرسان چنین کلاس‌هایی، شاید تنها دلایلی که به ذهن رسیده بود، کم‌کاری دانش‌آموزان، بی‌علاقگی و بی‌انگیزگی آنها به ریاضیات و به ویژه هندسه، بی‌توجهی آنها در کلاس درس، و یا تدریس نامناسب مطالب بوده است. برای مثال در مبحث چهارضلعی‌ها در دوره متوسطه اول، شاید بسیاری از معلمان، هنگامی که پس از بیان «مستطیل بودنِ مربع» با عدم درک و پذیرش دانش‌آموزان روبه‌رو می‌شوند، چاره را در توضیح دوباره و گاه چندباره، ارائه مثال‌های بیشتر و تکرار و تمرین ببینند (چنان که شاید بسیاری از ما نیز چنین روش‌هایی را بارها و بارها در کلاس‌های درسمان به‌کار بسته‌ایم). نظریه فن‌هیلی دارای جنبه‌های متفاوتی است و در فهرست نظریاتی قرار می‌گیرد که نه تنها به بررسی یک مشکل آموزشی، بلکه به ارائه راهکارهایی برای بهبود آموزش و یادگیری نیز پرداخته است. آگاهی از سطحِ درک و استدلال هندسی دانش‌آموزان به کمک نظریه فن‌هیلی می‌تواند زمینه‌ساز تنظیم و تدوین مواد درسی و طراحی فعالیت‌های آموزشی متناسب با سطح توانایی دانش‌آموزان گردد. آشنایی با این نظریه و به خصوص آگاهی از این امر که ارائه‌کنندگان این نظریه، دو معلم هندسه بوده‌اند که در کلاس‌های هندسه خود، با مشکلاتی مواجه بوده‌اند که بسیار شبیه مشکلاتی است که معلمان ریاضی کشور ما در کلاس خود با آن روبه‌رو بوده و هستند، شاید بتواند باعث شود تا از دیدگاهی دیگر نیز به علل عدم موفقیت دانش‌آموزان در فراگیری و درک هندسه بنگریم و تشویق به انجام پژوهش‌های بیشتری در این زمینه گردیم. *نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش*

[57]Integration [58]Survey

مراجع

[۱] ا. امینی‌فر، ب. صالح صدق‌پور و ن. باقری، ساخت آزمون معتبر و پایای تفکر هندسی بر اساس سه سطح اول نظریه ون‌هیلی، *فصلنامه اندازه‌گیری تربیتی*، **۱** (۱۳۹۰).

[۲] اچ. دبلیو. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، **۱**، (برگردان م. ق. وحیدی اصل). تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۲.

[۳] م. حبیبی، نقش روش تدریس فعال معلمان در هندسه (با مدل فن‌هیلی) در افزایش انگیزش و یادگیری دانش‌آموزان دوره ابتدایی، فصلنامه مشاوره شغلی و سازمانی، **۵** (۱۳۹۲).

[۴] ا. ریحانی، س. م. امام جمعه، ب. صالح صدق‌پور و ا. مرادی ویس، ارزیابی دانش معلمان و دانشجویان ریاضی در درس هندسه با استفاده از نظریه ون هیلی، *نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش*، **۵** (۱۳۸۹).

[۵] ام. جی گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نا اقلیدسی (برگردان م. ه. شفیعیها). تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷.

[۶] م. ج. لیاقتدار، ن. سلیمانی و س. صدرارحامی، بررسی تأثیر روش آموزش هندسه بر مبنای نظریه ون‌هیلی بر پیشرفت تحصیلی، *اندیشه‌های نوین تربیتی*، **۸** (۱۳۹۰)..

[۷] ا. مرادی‌ویس، مطالعه جایگاه هندسه مدرسه‌ای در برنامه درسی کارشناسی دبیری ریاضی مبتنی بر نظریه ون‌هیلی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ۱۳۸۸.

[8] G. H. Adele, (1998). The van Hiele model of geometric thinking implications for teaching $k-۸$، Retrieved November 15, 2015 from http://www.webpages.uidaho.edu.

[9] R. B. Armah, P. O. Cofie, and C. A. Okpoti, Investigating the Effect of van Hiele Phase-Based Instruction on Pre-Service Teachers' Geometric Thinking, *International Journal of Research in Education and Science*, **4** (2018) 314–330.

[10] W. F. Burger and J. M. Shaughnessy, Characterizing the van Hile levels of development in geometry, *Journal for research in mathematics education*, **17** (1986) 31–48.

[11] D. H. Clements, Teaching and learning geometry, A research companion to principles and standards for school mathematics, (2003) 151–178.

[12] M. L. Crowley, The van Hiele model of the development of geometric thought, Learning and teaching geometry, $K-۱۲$, (1987) 1–16.

[13] D. Fuys, D. Geddes and R. Tischler, The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, (1988) i-196.

[14] E. Halat, In-service middle and high school mathematics teachers: Geometric reasoning stages and gender, *The Mathematics Educator*, **18** (2008) 8–14.

[15] A. Jaime and A. Gutiérrez, A model of test design to assess the van Hiele levels, In Proccedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, **3** (1994) 41–48.

[16] K. Jones, Issues in the teaching and learning of geometry, In Linda Haggarty (Ed), Aspects of Teaching Secondary Mathematics, London: Routledge Falmer, (2002) 121–139.

[17] K. C.Knight, An investigation into the change in the Van Hiele levels of understanding geometry of pre-service elementary and secondary mathematics teachers (Doctoral dissertation, The University of Maine), 2006.

[18] M. M. Mason, Geometric understanding in gifted students prior to a formal course in geometry, Paper presented at the annual meeting of the North American, 1995.

[19] M. Mason, The van Hiele levels of geometric understanding, *Coleccion Digital Eudoxus*, **1** (2009).

[20] Y. Nisawa, Applying van Hiele's Levels to Basic Research on the Difficulty Factors behind Understanding Functions, *IEJME-Mathematics Education*, **13** (2018) 61–65.

[21] A. Oldknow and et al, Teaching and Learning Geometry, (Report). London: Royal Society/JMC, (2001) 11–19.

[22] E. L. Pusey, The van Hiele model reasoning in geometry: a literature review, Unpublished master's thesis, North Carolina State University, Raleigh, NC, United States, 2003.

[23] A. B. Sánchez-Garcí a and A. B. Cabello, An instrument for measuring performance in geometry based on the van Hiele model, *Educational Research and Reviews*, **11** (2016) 1194–1201.

 DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118021.1329

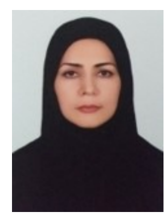
[24] Z. Usiskin, Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, CDASSG Project, (1982).

[25] P. M. Van Hiele, *The Child's Thought and Geometry*, English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, (1959) 243–252.

نرگس یافتیان
تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
yaftian@sru.ac.ir

نرگس یافتیان کارشناسی خود را در رشته دبیری ریاضی و کارشناسی ارشد را در رشته ریاضی‌کاربردی از دانشگاه خوارزمی اخذ نمود و مقطع دکترای ریاضی را در دانشگاه علم و صنعت گذراند و در حال حاضر استادیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد. علائق پژوهشی و مطالعاتی وی در زمینه آموزش ریاضی است.

اشرف صفابخش چکوسری
دبیر ریاضی مقطع متوسطه‌ی اول (استان گیلان)
ashraf.safa.۷۷@gmail.com



اشرف صفابخش چکوسری کارشناسی ریاضی محض خود از دانشگاه گیلان و کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را از دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی اخذ نمود و در حال حاضر دبیر ریاضی مقطع متوسطه اول در استان گیلان می‌باشد.