http://math-sci.iranjournals.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۴، شماره ۲ (۱۳۹۸)، صص. ۸۱-۶۷

http://www.ui.ac.ir

رتبه‌بندی تیم‌های ورزشی

عفت گلپر رابوکی * و طاهره ندایی

چکیده. رتبه یک رابطه ترتیبی کلی است، رابطه‌ای بین عناصر یک مجموعه به‌طوری‌که برای هر دو عنصر دلخواه یکی رتبه بیشتر و دیگری رتبه کمتر دارد. رتبه‌بندی تعیین ترتیبی از امتیازها است به‌طوریکه اولین عنصر دارای بالاترین امتیاز و آخرین عنصر کمترین امتیاز را دارد. یک سیستم امتیازدهی ورزشی سیستمی است که نتایج حاصل از رقابت‌های ورزشی را به منظور ارائه امتیازها برای هر تیم یا بازیکن تجزیه و تحلیل می‌کند. روش‌های مختلف رتبه‌بندی ارایه شده‌اند که عملکرد آنها بر اساس امتیازی است که تیم‌های در بازهای مختلف کسب می‌کنند. برخی از این روش‌ها فقط بر اساس تعداد برد و باخت رتبه‌بندی را انجام می‌دهند اما در بعضی روش‌های رتبه‌بندی، علاوه بر تعداد برد و باخت وضعیت تیم رقیب نیز در امتیاز دهی در نظر گرفته می‌شود. در این روش‌ها برد و باخت مقابل تیم‌های ضعیف و قوی به يك اندازه ارزش‌گذاری نمی‌شود. اگر بردهای یک تیم فقط مقابل تیم‌های ضعیف باشد نمی‌توان با اطمینان گفت این تیم يك تیم قوی است و لزوماً بر حسب تعداد برد نمی‌توان برتری یک تیم را نشان داد. روش‌های محتلفی برای رتبه‌بندی وجود دارد که از آمار، نظریه گراف و جبرخطی استفاده می‌کنند. در این مقاله برخی روش‌های رتبه‌بندی که بیشتر از مفاهیم جبرخطی استفاده می‌کنند را بیان می‌کنیم. در این راستا، روش‌های درصد برد، شاخص درصد درجه‌بندی، ماسی، کالی، کینر، دفاع_حمله و روش صفحه_رتبه را مورد بررسی قرار می‌دهیم و با یک مثال نتایج حاصل از رتبه‌بندی با این روش‌ها را نشان می‌دهیم.

۱. مقدمه

اگر چه رتبه‌بندی تاریخچه طولانی دارد اما امروزه باگسترش و اهمیت پردازش داده‌ها، شیوه‌های رتبه‌بندی بیش از هر زمان دیگر دارای اهمیت شده‌اند و از آن‌ها در زمینه‌های مختلف مثل جست و جوهای اینترنتی، بازرگانی، تجارت، تحصیل، سرمایه گذاری و البته ورزش استفاده می‌شود. ورزش یکی از بزرگترین کسب و کارها محسوب می‌شود، به عنوان مثال، در فوتبال، بازیکنان و مربیان میلیون‌ها یورو در هر سال درآمد دارند. توسعه‌ی روش‌های رتبه‌بندی در ورزش موازی با رشد روز افزون رشته‌ها، تیم‌ها، باشگاه‌ها و افراد اتفاق افتاده است. از رتبه‌بندی برای تعیین بهترین بازیکن، بهترین تیم و بهترین سرمایه گذارگرفته تا بهترین تماشاگر، بهترین باشگاه، بهترین مربی، مدیر و ..... استفاده می‌شود. در بین ورزش‌های مختلف، شاید فوتبال به دلیل این‌که به سادگی و با هیجانی خارق العاده بیشترین تماشاگر را به خود اختصاص داده؛ اهمیت ویژه‌ای در رتبه‌بندی دارد.

عبارات و کلمات کلیدی. رتبه بندی، مقدارویژه، بردارویژه، ماتریس نامنفی، گراف، ماتریس غیر قابل کاهش.
دبیرتخصصی رابط: محمد صال مصلحیان
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۱۸

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

رتبه‌بندی عبارتست از، به اشتراک گذاشتن مجموعه‌ای از خصوصیات چند شیء ودرجه‌بندی آن‌ها از با ارزش‌ترین تا کم‌اهمیت‌ترین، به‌طوری‌که شیء که بالاترین امتیاز را به‌دست بیآورد، رتبه‌ی ۱ و به همین ترتیب رتبه‌های بعدی تعیین می‌شوند. بنابراین، رتبه یک شیء عبارتست از اهمیت نسبی آن در یک مجموعه متناهی. یک روش رتبه‌بندی روشی است که به هر عضو از یک مجموعه n عضوی عددی بین ۱ تا n اختصاص می‌دهد. یکی از کاربردهای رتبه‌بندی پیش‌بینی نتایج تیم‌ها است. به‌طور کلی سیستم‌های رتبه‌بندی در ورزش در دو دسته، رتبه‌بندی بر اساس پیش‌گویی[۱] و رتبه بندی براساس کسب امتیاز[۲] قرار دارند.

روش‌های مختلفی برای رتبه‌بندی وجود دارد که از آمار، نظریه گراف و جبرخطی استفاده می‌کنند. از مهم‌ترین روش‌های رتیه‌بندی مبتنی بر جبرخطی می‌توان به رروش کالی (۲۰۰۲) که منجر به حل یك دستگاه می‌شود، روش ماسی (۱۹۹۷) که با استفاده از روش کمترین مربعات رتبه را محاسبه می‌کند و روش‌های کینر (۱۹۹۳)، صفحه_رتبه(۱۹۹۸)[۳] و دفاع_حمله (۲۰۰۹) که براساس بردار ویژه نظیر مقدار ویژه غالب ماتریس امتیاز، رتبه تیم‌ها را تعیین می‌کند، اشاره کرد. در این روش‌ها ابتدا یك ماتریس امتیاز ساخته می‌شود که حاوی اطلاعات برد و باخت یا امتیاز تیم‌ها در بازی‌های انجام شده می‌باشد. شیوه‌های متداول برای تشکیل ماتریس امتیاز عبارتست از:

۱ ـ برای هر بازی یك سطر و برای هر تیم یك ستون در نظر گرفته می‌شود. برای هر بازی و تیم‌های شرکت کننده، امتیاز تیم‌ها یا تعداد گل‌های زده شده یا به‌طور ساده برای تیم برنده عدد ۱ و بازنده ۱ − اختصاص می‌یابد.

۲ ـ برای هر تیم یك سطر و یك ستون در نظر گرفته می‌شود و سپس تفاضل گل مثبت (تعداد گل‌های تیم برنده منهای تعداد گل‌های تیم بازنده) برای تیم برنده در نظر گرفته می‌شود.

۲. پیشنیازها

در این بخش برخی تعاریف و قضایا که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم [۶].

تعریف ۱.۲. *ماتریس تصادفی*[۴]: *یک بردار تصادفی نامیده می‌شود اگر همه‌ی درایه‌هایش نامنفی بوده و مجموع درایه‌ها برابر یک باشد. ماتریس تصادفی سطری ماتریسی است که سطرهای آن بردارهای تصادفی و ماتریس تصادفی ستونی ماتریسی است که ستون‌های آن بردارهای تصادفی باشند.*

تعریف ۲.۲. *مقدار ویژه*[۵] ***و بردار ویژه***[۶]: *فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ را یک مقدار ویژه ماتریس A گویند هر گاه بردار مخالف صفر $x \in \mathbb{C}^n$ موجود باشد به طوری که $Ax=\lambda x$, در این صورت x را بردار ویژه‌ی نظیر مقدار ویژه‌ی λ گویند.*

مجموعه‌ی تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را طیف A می‌گویند و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند. شعاع طیفی ماتریس A را با $\rho(A)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

هر ماتریس تصادفی یک مقدار ویژه‌ی یک دارد.

[1]Prediction [2]Earned Ranking [3] PageRank [4] Stochastic Matrix [5]Eigenvalue [6]Eigenvector

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

تعریف ۳.۲. ***ماتریس قابل کاهش***[۷]*: ماتریس* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*،* $n \geq ۲$ *را قابل کاهش گویند هرگاه ماتریس جایگشت* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *و عدد صحیح* r *که* $۱ \leq r \leq n-۱$ *موجود باشد بطوری‌که:*

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$$

که در آن $B \in \mathbb{R}^{r\times r}$*،* $C \in \mathbb{R}^{r\times n-r}$*،* $O \in \mathbb{R}^{n-r\times r}$*،* $D \in \mathbb{R}^{n-r\times n-r}$*. یک ماتریس را غیر قابل کاهش*[۸] *گویند هرگاه قابل کاهش نباشد.*

قضیه ۴.۲. *پرون–فروبنیوس*[۹]*: فرض کنید* A *یک ماتریس مثبت یا نامنفی غیرقابل کاهش باشد. آنگاه* $\rho(A)$ *یک مقدار ویژه مثبت ساده* A *است و یک بردار ویژه نظیر* $\rho(A)$ *وجود دارد که همه‌ی عناصر آن مثبت است.*

این قضیه کاربردهای مهمی در نظریه‌ی آمار، سیستم‌های دینامیکی، اقتصاد، موتورهای جستجو و حتی رتبه‌بندی تیم‌های ورزشی دارد.

تعریف ۵.۲. *یک گراف* G *زوج مرتبی مانند* (V, E) *است که در آن* V *مجموعه‌ای متناهی و ناتهی و* E *زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی* V *می‌باشد. اعضای* V *را رأس‌ها یا گره‌های* G *و اعضای* E *را یال‌های* G *می‌نامند.*

تعریف ۶.۲. *در گراف* $G = (V, E)$ *اگر ترتیب قرار گرفتن رأس‌ها در مجموعه‌ی* E *دارای اهمیت باشد آن گراف جهت‌دار، و در غیر این‌صورت گراف را بدون جهت می‌نامند.*

تعریف ۷.۲. *مسیر*[۱۰] *در گراف دنباله‌ای از رأس‌ها می‌باشد، به طوری‌که از هر رأس مانند* u *به رأس دیگر مانند* v *در این دنباله یالی وجود داشته باشد.*

تعریف ۸.۲. *ماتریس مجاورت یک گراف متناهی* G *(جهت‌دار یا غیرجهت‌دار) با* n *رأس، یک ماتریس* $n \times n$ *می‌باشد که درایه‌های* a_{ij} *آن برابر با تعداد یال‌هایی است که رأس* v_i *را به* v_j *متصل می‌کند.*

تعریف ۹.۲. *یک گراف جهت‌دار* $G = (V, E)$ *را قویاً همبند می‌نامند اگر و تنها اگر برای هر جفت گره‌ی* $u, v \in V$ *یک مسیر جهت‌دار از* u *به* v *یا از* v *به* u *وجود داشته باشد. ماتریس مجاورت یک گراف قویاً همبند یک ماتریس غیرقابل کاهش است.*

۳. روش‌های رتبه‌بندی ورزشی

در این بخش برخی روش‌های متداول در رتبه‌بندی تیم‌های ورزشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌منظور درک بهتر این روش‌ها نتایج حاصل از رقابت بین ۶ تیم را در مثال زیر بیان می‌کنیم و پس از بیان هر روش نتیجه حاصل از رتبه‌بندی روش

[7] Reducible [8] Irreducible [9] Perron Frobenius [10] Path

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

را برای این مسابقات ارایه می‌کنیم. فرض کنید جدول زیرنتایج حاصل از رقابت بین شش تیم را نشان دهد.

امتیاز	تیم	امتیاز	تیم
۱۳	$T_۴$	۱۶	$T_۱$
۱۷	$T_۵$	۳۸	$T_۲$
۲۳	$T_۶$	۲۸	$T_۲$
۲۱	$T_۱$	۳۴	$T_۳$
۱۰	$T_۴$	۲۳	$T_۳$
۶	$T_۱$	۳۱	$T_۴$
۲۵	$T_۶$	۳۳	$T_۵$
۲۳	$T_۴$	۳۸	$T_۵$
۶	$T_۲$	۲۷	$T_۶$
۱۲	$T_۵$	۲۰	$T_۶$

۱.۳. درصد برد. تیم های ورزشی غالبا با روش درصد برد (WP) [۱۱] رتبه‌بندی می‌شوند. این روش آسان‌ترین روش برای درجه‌بندی و ارزیابی هر تیم است که بر اساس درصد بازی‌هایی که در آن‌ها تیم برنده شده می‌باشد [۲]. درصد برد عبارتست از نسبت برد به تعداد بازی تیم‌ها. فرض کنید n_i تعداد بازی‌ها و w_i تعداد بردهای تیم i باشد. در این‌صورت امتیاز تیم iام از رابطه $r_i = \frac{w_i}{n_i}$ حساب می‌شود. در نهایت رتبه تیم بر اساس درصد برد آن مشخص می‌شود. برای مسابقات مثال ۳ امتیاز تیم‌ها بر اساس روش درصد برد عبارتست از:

$$r = (۱/۳, ۲/۳, ۱, ۱/۴, ۱/۲, ۱/۲)$$

و رتبه تیم‌ها در این مسابقات به شرح زیر می‌باشد:

۶	۵	۴	۳	۲	۱	رتبه
$T_۴$	$T_۱$	$T_۶$	$T_۵$	$T_۲$	$T_۳$	رتبه

در روش درصد برد می‌توان علاوه بر برد، تعداد بازی‌هایی که در آن تساوی به‌دست آمده است را نیز محاسبه کرد. در این‌حالت امتیاز تیم iام از رابطه $r_i = \frac{w_i + ۰/۵ t_i}{n_i}$ محاسبه می‌شود، که در آن t_i تعداد تساوی‌های تیم iام است.

۲.۳. شاخص درصد درجه بندی: روش شاخص درصد درجه‌بندی (RPI) [۱۲] برای مشخص کردن امتیاز تیم، به امتیاز تیم‌های حریف نیز توجه می‌کند و یک میانگین وزن‌دار درصد برد تیم و درصد برد تیم حریف را در نظر می‌گیرد. این روش در رتبه‌بندی مسابقات بسکتبال استفاده می‌شود. فرض کنید WP، OWP و $OOWP$ به‌ترتیب در صد برد تیم، در صد برد تیم‌های حریف و در صد برد حریف حریف تیم‌ها باشد. در این صورت

$$RPI = ۰/۲۵ * WP + ۰/۵ * OWP + ۰/۲۵ * OOWP. \quad (۱)$$

از سال ۲۰۰۴ برای محاسبه WP، امتیاز برای بردهای خانگی و برد در زمین دیگر متفاوت در نظر گرفته می‌شود. یک برد در خانه امتیاز ۰/۶ و برد در غیر خانه ۱/۴ ، تساوی برای هر دو تیم امتیاز ۱ ، باخت در خانه با ضریب ۱/۴ و باخت در

[11] Winning percentage(WP) [12] Rating Percentage Index (RPI)

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

غیر خانه برابر ۰/۶، در نظر گرفته می‌شود. OWP با استفاده از میانگین WP تیم‌های حریف و $OOWP$ نیز با استفاده از میانگین OWP تیم‌های حریف محاسبه می‌شود. فرض کنید جدول مسابقات به‌صورت زیر است:

خانه	امتیاز	غیرخانه	امتیاز
A	۶۴	B	۵۷
A	۸۲	C	۶۸
D	۷۱	A	۷۲
B	۶۹	A	۶۲
C	۸۱	D	۷۰
D	۵۲	B	۶۲

مقادیر WP، OWP و $OOWP$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{llll} WP(A) = ۰/۸۱۲۵ & WP(B) = ۰/۷۶۹۲ & WP(C) = ۰/۵ & WP(D) = ۰ \\ OWP(A) = ۰/۷۵ & OWP(B) = ۰/۶۶۶۷ & OWP(C) = ۰/۳۳۳ & OWP(D) = ۰/۳۸۸۹ \\ OOWP(A) = ۰/۵۱۳۹ & OOWP(B) = ۰/۶۲۹۶ & OOWP(C) = ۰/۵۶۹۴ & OOWP(D) = ۰/۵۸۳۳ \end{array}$$

در این‌صورت شاخص درصد درجه بندی طبق فرمول (۱) عبارتست از

$$RPI(A) = ۰/۷۰۶۶,\ RPI(B) = ۰/۶۸۳۰,\ RPI(C) = ۰/۴۳۴۰,\ RPI(D) = ۰/۳۴۰۳,$$

بنابراین، تیم‌های D, C, B, A به‌ترتیب رتبه‌های اول تا چهارم را کسب کرده‌اند.

۴. روش‌های ماسی، کالی و کینز

در این بخش به بررسی روش‌های ماسی، کالی و کینز برای رتبه‌بندی می‌پردازیم.

۱.۴. الگوریتم کمترین مربعات ماسی. کنت ماسی[13] در ۱۹۹۷ [۹] یك روش رتبه‌بندی جدید بر اساس حل مساله کمترین مربعات ارایه کرد. در این روش رابطه میان رتبه تیم‌ها و احتمال پیروزی از طریق سیستم معادلات خطی بیان و دستگاه حاصل با روش کمترین مربعات حل می‌شود. فرض اولیه ارائه شده توسط ماسی این است که احتمال پیروزی مورد انتظار یك بازی رابطه مستقیم با تفاضل امتیاز تیم‌های شرکت کننده دارد. فرض کنید n تعداد تیم‌ها و m تعداد بازی‌ها باشد. فرض کنید در بازی k ام تیم T_i و T_j شرکت دارند و به ترتیب امتیازهای s_{ki} و s_{kj} را بدست آورده‌اند. ابتدا یک ماتریس X از مرتبه $m \times n$ شامل اطلاعات برد و باخت تیمهای شرکت کننده در بازیها تشکیل می‌شود. هر سطر ماتریس مربوط به دو تیمی است که در آن بازی داشته‌اند. درایه‌های ماتریس X به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$X_{ki} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر تیم } T_i \text{ بازی } k \text{ ام را ببرد} \\ -۱ & \text{گر تیم } T_i \text{ بازی } k \text{ ام را ببازد} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سپس، بردارm تایی y که شامل تفاصل مثبت امتیاز تیم‌ها در هر بازی می‌باشد نیز تشکیل می‌شود.

[13] Kenneth Massey

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

روش ماسی بردار رتبه r را از حل مساله کمترین مربعات

$$\min_{r\in\mathbb{R}^n} ||Xr-y||_{۲} \tag{۲}$$

محاسبه می‌کند. حل مساله (۲) منجر به حل دستگاه معادلات نرمال

$$X^TXr = X^Ty \tag{۳}$$

می‌شود، هدف محاسبه بردار r است به طوری که خطا کمینه شود. با توجه به اینکه مجموع سطرهای X برابر صفر است، X دارای رتبه کامل نیست. اما، از آنجا که هر تیم حداقل یک بار بازی می‌کند، X دارای ستون صفر نیست. به علاوه، گراف جهت دار با n گره نظیر تیم‌ها و m یال نظیر بازی‌ها قویاً همبند است. این تضمین می‌کند که $dim(N(X)) = ۱$ و در نتیجه جواب دستگاه معادلات (۳) یکتا نیست. برای محاسبه یك جواب یکتا، ماسی چند تغییر را در سیستم $X^TXr = X^Ty$ پیشنهاد کرد. به‌عنوان مثال شرطی را برای جواب r مانند $\sum\limits_{j=۱}^{n} r_j = c,$ در نظر گرفت (معمولاً $c = ۰$ در نظر گرفته می‌شود). در این حالت یك سطر ۱ به ماتریس X و یك مقدار c به بردار y اضافه می‌شود. دستگاه معادلات جدید به‌صورت:

$$\left[(X^T\ e^T)\begin{pmatrix} X \\ e \end{pmatrix}\right] r = (X^T\ e^T)\begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix}$$

$$\left[X^TX + e^Te\right] r = X^Ty + ce^T.$$

است، که دارای جواب یکتا می‌باشد.

برای محاسبه رتبه تیم‌ها در مثال ۳ با استفاده از روش ماسی ماتریس X و بردار y را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$X = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۱ \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۲۱ \\ ۵ \\ ۱۳ \\ ۱۳ \\ ۲۵ \\ ۸ \\ ۱۵ \\ ۲۱ \\ ۸ \end{pmatrix}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

بنابراین

$$X^TX = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & -۱ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۰ & -۱ & -۲ \\ -۱ & ۰ & -۲ & -۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۱ & ۴ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & -۱ & ۴ & -۲ \\ ۰ & -۲ & ۰ & ۰ & -۲ & ۴ \end{pmatrix}, \quad X^Ty = \begin{pmatrix} -۳۵ \\ ۵ \\ ۲۶ \\ -۶ \\ -۶ \\ ۱۶ \end{pmatrix}$$

برای محاسبه جواب یکتا، بردار رتبه r را از دستگاه $(X^TX + e^Te)r = X^Ty$ به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\mathbf{r} \approx (-۱۷/۷۰۸۴\ ۱۰/۶۷۵۱\ ۰/۶۶۰۹\ -۹/۱۷۲۷\ ۴/۵۰۵۵\ ۱۱/۴۸۰۲)^T$$

و رتبه تیم‌ها طبق روش ماسی به شرح زیر می‌باشد:

رتبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تیم	$T_۶$	$T_۲$	$T_۵$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۱$

۲.۴. الگوریتم کالی: وسلی کالی[14] روش کالی را در ۲۰۰۲ برای محاسبه رتبه تیم‌های ورزشی ارایه کرد .[۱] این روش یکی از ساده‌ترین روش‌های رتبه‌بندی است که از تعداد بازی‌ها و برد و باخت تیم‌ها، با این فرض که هیچ نتیجه مساوی وجود نداشته باشد، استفاده می‌کند. اساس روش کالی فرمول‌بندی و حل یک دستگاه معادلات خطی است. هر معادله در این دستگاه نظیر یک تیم و جواب دستگاه تعیین کننده رتبه تیم‌ها می‌باشد. بر اساس قانون توالی لاپلاس[15] طراحی شده است، بدین ترتیب که:

فرض کنید n تیم داریم و تیم T_i از مجموع n_i بازی که انجام داده است تعداد w_i بازی، مستقل از یکدیگر و با احتمال i/n، را برده است. احتمال برد این تیم در بازی $(n_i + ۱)$ ام برابر $\frac{w_i+۱}{n_i+۲}$ است.

فرض کنید n تیم $T_۱, \dots, T_n$ در مسابقات شرکت کرده‌اند، تعداد بازی‌های تیم T_i برابر n_i و n_{ji} تعداد دفعاتی است که تیم T_i با تیم T_j بازی کرده است. در روش کالی، ابتدا ماتریس کالی به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

$$C_{ji} = \begin{cases} -n_{ji} & i \neq j \text{ اگر } \\ ۲ + n_i & i = j \text{ اگر } \end{cases}$$

سپس بردار

$$b_i = ۱ + (w_i - l_i)/۲ \qquad (۴)$$

که در آن w_i و l_i به ترتیب تعداد برد و باخت تیم i می‌باشد، محاسبه می‌شود. دستگاه

$$Cr = b \qquad (۵)$$

دارای یك جواب منحصر بفرد نامنفی r می‌باشد. بردار r شامل امتیاز تیم‌ها بر اساس روش کالی است که رتبه تیم‌ها را مشخص می‌کند.

[14] Wesley Colley [15] Laplace's Rule of Succession

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

فرض کنید الگوریتم کالی را برای مثال ۳ به‌کار می‌بریم. ماتریس کالی و بردار b عبارتست از:

$$C=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 2\\ 0\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار امتیازات تیم‌ها از حل دستگاه (۵) محاسبه می‌شود و عبارتست از:

$$r=(0/3597, 0/616, 0/6687, 0/3149, 0/5015, 0/5392)^T \qquad (6)$$

امتیازها در (۶) نشان می‌دهد که تیم‌های سوم و چهارم به ترتیب بیشترین و کمترین امتیاز را کسب کرده‌اند. رتبه تیم‌ها بر اساس امتیاز آنها در (۶) به‌ترتیب زیر می‌باشد:

رتبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تیم	T_3	T_2	T_6	T_5	T_1	T_4

۳.۴. روش کینر. جیمز پی. کینر[16] یك روش رتبه‌بندی بر اساس نظریه ماتریس های نامنفی در ۱۹۹۳ ارائه کرد [۴]. در این روش ابتدا یك ماتریس امتیاز K بر اساس برد و باخت یا امتیاز تیم‌ها تشکیل می‌شود که ماتریس کینر نامیده می‌شود. فرض کنید n تیم $T_1,\dots,T_n$ در مسابقات شرکت کرده‌اند، n_i تعداد بازی‌های تیم T_i و S_{ij} امتیازی است که تیم T_i در بازی مقابل تیم T_j کسب کرده است. در این روش یک ماتریس امتیاز K به نام ماتریس کینر ساخته می‌شود. روش‌های مختلفی برای ساخت ماتریس امتیاز معرفی شده است که در ادامه به چهار روش اشاره می‌کنیم. فرض کنید $K=(K_{ij})$ که K_{ij} درایه (i,j) ماتریس K است.

۱ ــ در روش اول، $K_{ij}=S_{ij}$، در نظر گرفته می‌شود. اشکال این روش این است که اگر تیمی با یک امتیاز بالا تیم دیگر را ببرد این امتیاز در رتبه‌بندی تاثیر زیادی دارد در صورتی که ممکن است تیم برنده واقعاً تیم قدرتمندی نباشد.

۲ ــ در روش دوم، $K_{ij}=\frac{S_{ij}}{S_{ij}+S_{ji}}$ انتخاب می‌شود که اشکال روش قبل را تا حدی بهبود می‌بخشد.

۳ ــ در روش سوم، درایه‌های ماتریس کینر را به‌صورت $K_{ij}=\frac{S_{ij}+1}{S_{ij}+S_{ji}+2}$ محاسبه می‌کند و تضمین می‌کند اگر یک تیم امتیاز ۰ به دست آورد تیم دیگر کل اعتبار را کسب نمی کند. این روش را می توان به عنوان احتمال برد تیم T_i در رویارویی بعدی با تیم T_j تعبیر کرد. از آنجا که کینر از امتیازات بازی برای محاسبه رتبه تیم‌ها استفاده می‌کند، تیم‌ها می‌توانند با بالا بردن امتیازات بر روی رتبه‌بندی تأثیر بگذارند. برای کم کردن احتمال این تاثیر، کینر توابعی برای «هموارسازی» ماتریس امتیازها پیشنهاد کرد. یك تابع هموارسازی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارتست از:

$$h(x)=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})sgn(x-\frac{1}{2})\sqrt{|2x-1|}.$$

[16] Keener

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

و ماتریس کینر به صورت تعریف می‌شود:

$$K_{ij} = \begin{cases} h(\frac{S_{ij}+۱}{S_{ij}+S_{ji}+۲}) & \text{اگر } T_i \text{ و } T_j \text{ با هم بازی کنند} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۷)$$

ماتریس K در رابطه (۷) نامنفی و غیر قابل کاهش است. در نتیجه، طبق قضیه پرون‌ـفروبنیوس یک بردار ویژه مثبت منحصربفرد نظیر بزرگترین مقدارویژه دارد که بردار پرون نامیده می‌شود. بردار پرون رتبه تیم‌ها را نشان می‌دهد.

پس از تشکیل ماتریس کینر، بردار رتبه r از حل

$$Kr = \lambda r \qquad (۸)$$

هنگامی که λ شعاع طیفی K است، به‌دست می‌آید.

توجه: اگر تیم‌ها بیش از یک بار با هم دیگر بازی کنند برای هرتیم يك امتیاز تراکمی محاسبه می‌شود که برابر مجموع امتیازهای به‌دست آمده از بازی‌هایی است که بین دو تیم انجام شده است. در مثال ۳ ، تیم‌های $T_۲$ و $T_۶$ دو بار بازی کرده‌اند که تیم $T_۲$ با امتیاز ۲۳ − ۲۸ و تیم $T_۶$ با امتیاز ۶ − ۲۷ برنده شده‌اند. بنابراین امتیاز تراکمی بین $T_۲$ و $T_۶$ برابر ۳۴ − ۶۰ است که برد تیم $T_۶$ را نشان می‌دهد. این ساده‌ترین روش محاسبه امتیاز برای حالتی است که دو تیم چند بازی انجام داده‌اند.

ماتریس کینر برای مثال ۳ به‌صورت زیر است:

$$K \approx \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰/۲۶۱۲ & ۰/۲۱۵۶ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰/۸۰۳۵ & ۰/۲۸۴۳ \\ ۰/۷۳۸۸ & ۰ & ۰ & ۰/۸۰۴۷ & ۰ & ۰ \\ ۰/۷۸۴۴ & ۰ & ۰/۱۹۵۳ & ۰ & ۰/۲۵۶ & ۰ \\ ۰ & ۰/۱۹۶۵ & ۰ & ۰/۷۴۴ & ۰ & ۰/۵ \\ ۰ & ۰/۷۱۵۷ & ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰ \end{pmatrix}$$

شعاع طیفی ماتریس K برابر $\lambda = ۱/۱۰۰۸$ و بردار رتبه‌ی r از حل دستگاه $Kr = \lambda r$ عبارتست از:

$$r \approx (۰/۱۰۴۴ \quad ۰/۵۲۵۲ \quad ۰/۲۴۳۷ \quad ۰/۲۳۷۵ \quad ۰/۵۱۵۸ \quad ۰/۵۷۵۷)^T$$

بنابراین تیم‌ها به ترتیب رتبه عبارتند از:

رتبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تیم	$T_۶$	$T_۲$	$T_۵$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۱$

۵. روش دفاع‌ـحمله

روش حمله‌ـدفاع (ODM)[۱۷] بر اساس توانایی تیم‌ها در حمله و دفاع، آنها را رتبه‌بندی می‌کند [۳]. فرض کنید n تیم داریم و A_{ij} امتیاز تیم j در مقابل تیم i و اگر دو تیم مقابل هم بازی نداشته باشند A_{ij} صفر در نظر گرفته می‌شود. گوییم تیم j، خوب حمله می‌کند هرگاه از تیم حریف به خوبی امتیاز کسب کند. رتبه حمله تیم j را با o_j نشان می‌دهیم و بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$o_j = A_{۱j}(۱/d_۱) + \cdots + A_{nj}(۱/d_n).$$

[17] Offense-Defense

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

به‌همین ترتیب می‌گوئیم تیم i، یك تیم دفاعی خوب است هرگاه اجازه ندهد که تیم حریف در مقابلش امتیاز کسب کند. رتبه دفاعی تیم i را با d_i نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_i = A_{i1}(1/o_1) + \cdots + A_{in}(1/o_n).$$

فرض کنید ماتریس امتیاز A از تفاضل مثبت امتیاز بازی‌ها تشکیل شده است. در اولین قدم قرار دهید:

$$d^{(0)} = e$$

که $e = (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T$. فرض کنید $1/d^{(k)}$ و $1/o^{(k)}$ از عکس درایه‌های $d^{(k)}$ و $o^{(k)}$ محاسبه می‌شود، یعنی

$$1/d^{(k)} = (1/d_1^{(k)}, \cdots, 1/d_n^{(k)}), \ 1/o^{(k)} = (1/o_1^{(k)}, \cdots, 1/o_n^{(k)}).$$

مقادیر حمله و دفاع از روند تکراری زیر محاسبه می‌شوند:

$$o^{(k)} = A^T(1/d^{(k-1)}), \ d^{(k)} = A(1/o^{(k)}). \tag{۹}$$

به منظور همگرایی دنباله‌های $d^{(k)}$ و $o^{(k)}$ ماتریس $P = A + \epsilon ee^T$، برای $0 < \epsilon < 1$، تعریف می‌شود و دنباله‌های دفاع و حمله از رابطه تکراری زیر به‌دست می‌آید:

$$o^{(k)} = P^T(1/d^{(k-1)}), \ d^{(k)} = P(1/o^{(k)}) \tag{۱۰}$$

دنباله‌های (۱۰) تا زمانی که شرایط همگرایی برقرا شود تکرار می‌شوند و بردار رتبه از $r_i = o_i/d_i$ محاسبه می‌شود. برای بررسی شرایط همگرایی دنباله‌های (۹) و (۱۰) و جزییات بیشتر به [۳] مراجعه نمایید.

ماتریس امتیاز A برای مثال ۳ به‌صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 13 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

با انتخاب $P = A + 0/01ee^T$ و $tol = 0/0001$ نتایج به‌صورت زیر است:

$$o = (1/7096, 90/7032, 5/2253, 3/8973, 24/6888, 257/6147)^T$$

$$d = (8/9135, 0/0924, 0/0109, 4/8611, 0/2735, 0/3900)^T$$

$$r = (0/1918, 981/6360, 480/1391, 0/8017, 90/2826, 660/4810)^T$$

رتبه تیم‌ها به روش حمله‌ـ دفاع عبارتست از:

رتبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تیم	T_2	T_6	T_3	T_5	T_4	T_1

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

نتایج نشان می‌دهد که تیم‌های T_6 و T_2 بیشترین امتیاز حمله و تیم‌های T_1 و T_4 بیشترین امتیاز دفاع را کسب کرده‌اند.

۶. روش‌های مارکفی تعمیم یافته

روش‌های مارکفی تعمیم یافته (GeM) [۱۸] از نظریه گراف و زنجیرهای مارکف برای محاسبه رتبه n شیء در یك مجموعه متناهی استفاده می‌کند. شروع این روش‌ها از روش صفحه‌ـرتبه مطرح شد. مدل GeM تنها مختص ورزش نیست و هر مساله‌ای که بتواند به صورت یك گراف جهتدار وزندار نمایش داده شود می‌تواند از این روش استفاده کند. همواره می‌توان یك فصل از مسابقات را به صورت یك گراف جهتدار وزندار از تیم بازنده به برنده نشان داد به طوری که گره‌ها تیم‌های شرکت کننده، یال‌های جهتدار بازی‌ها و وزن یال‌ها امتیاز تیم‌ها را نشان می‌دهند. این روش با استفاده از داده‌های تصادفی که از مسابقات بدست می‌آید یك ماتریس غیرقابل کاهش تصادفی G می‌سازد. نظریه زنجیرهای مارکف متناهی تضمین می‌کند که یك بردارویژه $r = (r_i)$ نظیر مقدارویژه ۱ برای ماتریس G وجود دارد که $\sum r_i = 1$. بردار r یك بردار توزیع احتمال است و iامین درایه آن به عنوان رتبه تیم i در نظر گرفته می‌شود. تیمی که بالاترین رتبه را کسب کرده به عنوان برترین تیم و به همین ترتیب بقیه تیمها بر حسب رتبه مرتب می‌شوند. ماتریس G به صورت

$$G = \alpha_0 S_0 + \ldots + \alpha_p S_p \tag{11}$$

تعریف می‌شود، ماتریس‌های S_i تصادفی و $0 \leq \alpha_i \leq 1$ به طوریکه $\sum \alpha_i = 1$، که نتیجه می‌شود G نیز یک ماتریس تصادفی است.

در روش‌های مارکفی تعمیم‌یافته بردارویژه نظیر مقدارویژه غالب ماتریس G به عنوان بردار رتبه‌بندی در نظر گرفته می‌شود. اساس کلی این روش‌ها بر این ایده استوار است که برد و باخت مقابل تیمهای ضعیف وقوی نباید به یك اندازه ارزش‌گذاری شود. اگر بردهای تیم برنده فقط مقابل تیم‌های ضعیف باشد نمی‌توان با اطمینان گفت این تیم یك تیم قوی است و در نتیجه در رتبه بندی نباید رتبه بالایی کسب کند. در این روش‌ها رتبه‌بندی به گونه‌ای انجام می‌شود که برای برد مقابل تیم قوی امتیاز بالاتر و مقابل تیم ضعیف امتیاز پایین‌تر در نظر گرفته شود. بدین منظور رتبه تیم بازنده بین تمام تیم‌هایی که از این تیم برده‌اند، تقسیم می‌شود. در ادامه روش صفحه‌ـرتبه که یکی از معروفترین روش‌ها در این دسته می‌باشد را بیان می‌کنیم.

۱.۶. الگوریتم صفحه‌ـرتبه. روش صفحه‌ـرتبه یک روش رتبه‌دهی به صفحات وب است که توسط لاری‌پیج[۱۹] و سرگئی‌برین[۲۰] [۵] مطرح شد. در این روش تعداد لینک‌های ورودی از سایت‌های دیگر و همچنین کیفیت لینک‌ها از اهمیت فوق العاده‌ای در رتبه‌دهی صفحات برخوردارند. این الگوریتم براساس اصول زیر ساخته شده است:

۱. وجود یک پیوند از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر به طور ضمنی نشان دهنده‌ی اهمیت صفحه‌ی مقصد است بنابراین تعداد پیوند ورودی به یک صفحه نشان دهنده‌ی اهمیت و جذابیت این صفحه می‌باشد.
۲. پیوند رسیده از یک صفحه بااهمیت، ارزش بیشتری نسبت به پیوند رسیده از یک صفحه با ارزش کمتر دارد. بنابراین صفحه‌ای مهم است که از صفحات مهم دیگر پیوند گرفته باشد.

رتبه هر صفحه به تعداد و اهمیت صفحات لینک داده شده به آن بستگی دارد به‌عبارت دیگر رتبه یا اهمیت هر صفحه جمع وزندار رتبه صفحه‌هایی است که به آن اشاره می‌کنند. الگوریتم صفحه‌ـرتبه یك الگوریتم بازگشتی بوده که می توان آنرا با استفاده از زنجیر مارکف مدلسازی کرد. اساس کار الگوریتم صفحه‌ـرتبه بر قضیه پرون‌ـ فروبنیوس بنا شده است. این قضیه بیان می‌کند که شعاع طیفی هر ماتریس مثبت غیرقابل کاهش یک مقدارویژه ساده آن است که یک بردارویژه مثبت نظیر آن وجود دارد.

[18] Generalized Markov Method [19] Larry Page [20] Sergey Brin

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

روش رتبه_صفحه برای رتبه‌بندی تیم‌های ورزشی بیان می‌کند که رتبه هر تیم به رتبه تیم‌هایی بستگی دارد که در مقابل آن‌ها برنده شده است. هر چه تیم مقابل از رتبه بالاتری برخوردار باشد، امتیاز بیشتری به تیم برنده اختصاص می‌یابد. به عبارت دیگر امتیاز برد مقابل تیم‌های مختلف یکسان نیست و به امتیاز تیم بازنده بستگی دارد.

در ادامه به بررسی روش رتبه_صفحه برای رتبه‌بندی تیم‌های ورزشی می‌پردازیم. یک فصل مسابقات به‌صورت یک گراف جهتدار در نظر گرفته می‌شود که در آن تیم‌ها به عنوان گره‌های گراف و بازیها، نظیر یال‌ها در نظر گرفته می‌شوند. به ازای هر بازی بین دو تیم یک یال وزندار بین آنها ایجاد می‌کنیم، جهت یال را از تیم بازنده به تیم برنده و وزن آن را برابر تفاضل امتیاز برنده از بازنده انتخاب می‌کنیم. یک لینک ازتیم بازنده به تیم برنده سبب می‌شود که تیم بازنده بخشی از رتبه خود را به تیم برنده بدهد. اگر در طول یک فصل تیم i بیشتر از یک بار به تیم j ببازد وزن یال i به j تفاضل مثبت امتیازهایی است که در بازی بین این دوتیم به‌دست آمده است. ماتریس مجاورت نظیر گراف مسابقات به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$A_{ij}=\begin{cases} W_{ij} & \text{اگر تیم } T_j \text{ از تیم } T_i \text{ ببرد.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که W_{ij} تفاضل امتیازهایی است که دربازی‌های بین تیم T_i و T_j به‌دست آمده و T_j برنده شده است. سپس ماتریس H، که به آن ماتریس فوق لینک [21] گفته می‌شود، به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

$$H_{ij}=\begin{cases} \frac{A_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} A_{ik}} & \text{اگر تیم } T_j \text{ از تیم } T_i \text{ ببرد.} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

از آنجا که ممکن است بین بعضی تیم‌ها بازی برگزار نشده باشد پس برخی سطرهای ماتریس H تماماً صفر می‌باشد. برای تبدیل H به یک ماتریس تصادفی کافیست یک بردار تصادفی u را در سطر صفر H قرار دهیم. معمولا بردار u به صورت $u=(1/n)e$ انتخاب می‌شود. در آخر ماتریس G که ماتریس گوگل نامیده می‌شود و یک ماتریس نامنفی غیر قابل کاهش است بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G=\alpha(H+au^T)+(1-\alpha)ev^T \tag{12}$$

که $0<\alpha<1$، v و u بردارهای توزیع احتمال و a برداری است که درایه iام آن برابر ۱ است اگر سطر iام H برابر صفر و در غیر این‌صورت برابر صفر است. گراف نظیر G قویاً همبند است.

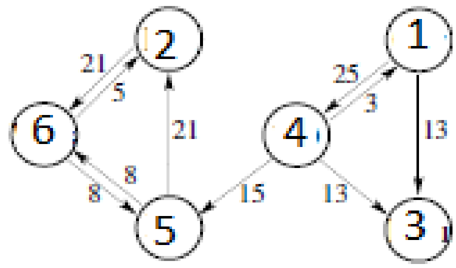
بردار رتبه r یک بردار ویژه چپ G نظیر مقدار ویژه ۱ است که از حل

$$r^T=r^TG.$$

به‌دست می‌آید و درایه‌ها r مثبت هستند [۲، ۵، ۷، ۸، ۱۰].

گراف مسابقات ۶ تیم مثال ۳ به‌صورت زیر است:

[21] Hyperlink



شکل ۱: گراف لیگ

ماتریس‌های مجاورت A و فوق‌لینک H به‌صورت زیر می‌باشند:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱۳ & ۲۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱۳ & ۰ & ۱۵ & ۰ \\ ۰ & ۲۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۵ & ۰ & ۰ & ۸ & ۰ \end{bmatrix}, \qquad H=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱۳/۳۸ & ۲۵/۳۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳/۳۱ & ۰ & ۱۳/۳۱ & ۰ & ۱۵/۳۱ & ۰ \\ ۰ & ۲۱/۲۹ & ۰ & ۰ & ۰ & ۸/۲۹ \\ ۰ & ۵/۱۳ & ۰ & ۰ & ۸/۱۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

از آنجا که سطر سوم ماتریس H برابر صفر است، با انتخاب $a=(۰\ ۰\ ۱\ ۰\ ۰\ ۰)$ و $u=۱/۶(۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱\ ۱)$ ماتریس تصادفی S به‌صورت زیر است:

$$H+au^T=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱۳/۳۸ & ۲۵/۳۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ \\ ۳/۳۱ & ۰ & ۱۳/۳۱ & ۰ & ۱۵/۳۱ & ۰ \\ ۰ & ۲۱/۲۹ & ۰ & ۰ & ۰ & ۸/۲۹ \\ ۰ & ۵/۱۳ & ۰ & ۰ & ۸/۱۳ & ۰ \end{bmatrix}.$$

با انتخاب $\alpha=۰/۸۵$ و $v=۱/۶e$، ماتریس G طبق (۱۲) عبارتست از:

$$G=۰/۸۵(H+au^T)+۰/۱۵(۱/۶)ee^T=$$
$$\begin{bmatrix} ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۶/۱۹ & ۱۱۱/۱۹۰ & ۱/۴۰ & ۱/۴۰ \\ ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۷/۸ \\ ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ & ۱/۶ \\ ۱۳۳/۱۲۴۰ & ۱/۴۰ & ۴۷۳/۱۲۴۰ & ۱/۴۰ & ۵۴۱/۱۲۴۰ & ۱/۴۰ \\ ۱/۴۰ & ۷۴۳/۱۱۶۰ & ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۳۰۱/۱۱۶۰ \\ ۱/۴۰ & ۱۸۳/۵۲۰ & ۱/۴۰ & ۱/۴۰ & ۵۷/۱۰۴ & ۱/۴۰ \end{bmatrix}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

بردار r که از $r^T = r^T G$ محاسبه می‌شود و رتبه تیم‌ها را مشخص می‌کند عبارتست از: رتبه تیم‌ها عبارتست از

$$r = (۰/۰۳۸,\ ۰/۲۸۲۵,\ ۰/۰۶۵۶,\ ۰/۰۵۶,\ ۰/۲۲۸۹,\ ۰/۳۲۸۱)^T$$

و ترتیب تیم‌ها بر اساس رتبه عبارتست از:

رتبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تیم	$T_۶$	$T_۲$	$T_۵$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۱$

با به‌روزرسانی ماتریس G در هر هفته می‌توان تیم‌های برنده را در هفته بعد پیشگویی کرد. هر چه در فصل جلوتر برویم دقت پیشگویی‌ها افزایش می‌یابد.

مراجع

[1] W. N. Colley, *Colley's Bias Free College Football Ranking Method*, 2002.

[2] A. Y. Govan and C. D. Meyer, Ranking National Football League Teams Using Google's PageRank, *AA Markov Anniversary Meeting*, 2006.

[3] A. Y. Govan, A. N. Langville and C. D. Meyer, Offense-defense approach to ranking team sports, *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, **5** (2009).

[4] J. P. Keener,The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams, *SIAM Review*, **35** (1993) 80–93.

[5] A. N. Langville and C. D. Meyer, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, 2006.

[6] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.

[7] A. N. Langville and C. D. Meyer, Deeper inside PageRank, *Internet Mathematics. J.*, **1** (2005) 335–380.

[8] S. Lawrence and C. L. Giles, Searching the world wide web, *Science*, **280** (1998) 98–100.

[9] K. Massey, Statistical models applied to the rating of sports teams, *Bluefield College*, 1997.

[10] History google, http://fa.wikipedia.org/wiki/

عفت گلپرابوکی

قم، دانشگاه قم، گروه ریاضی

g.raboky@qom.ac.ir

عفت گلپرابوکی سال ۱۳۶۸ وارد مقطع کارشناسی ریاضی کاربرد در کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر و در سال ۱۳۷۳ وارد مقطع کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شریف شد. در سال ۱۳۸۳ دوره دکتری ریاضی کاربردی را تحت نظر آقای دکتر نظام الدین مهدوی امیری در دانشگاه صنعتی شریف آغاز کرد. وی از سال ۱۳۷۹ هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه قم است.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334

طاهره ندایی
قم، دانشگاه قم، گروه تربیت بدنی و علوم ورزشی
t-nedaee@qom.ac.ir

طاهره ندایی سال در ۱۳۷۲ وارد مقطع کارشناسی دررشته تربیت بدنی و علوم ورزشی دانشگاه خوارزمی شد . وی سال ۱۳۷۷ مقطع کارشناسی ارشد را در دانشگاه گیلان شروع کرد.او درسال ۱۳۸۶ دوره دکتری مدیریت و برنامه ریزی در تربیت بدنی و ورزش را تحت راهنمایی و نظرآقای دکتر سید امیراحمد مظفری و در دانشگاه خوارزمی، آغاز کرد. وی از سال ۱۳۸۰ هیات علمی گروه تربیت بدنی و علوم ورزشی دانشگاه قم است.

DOI: http://dx.doi.org/10.22108/msci.2020.118609.1334