

در مورد اثبات‌های گنگ بودن $\sqrt{2}$

سید محمد امین خاتمی* و قاسم خاکشور

چکیده. این مقاله به مرور بعضی از معروف‌ترین اثبات‌های گویا نبودن ریشه دوم عدد ۲ می‌پردازد. با توجه به ماهیت تعریف اعداد غیر گویا، خواهیم دید که بیشتر اثبات‌ها (بجز اثبات شماره ۲۳) یا به صورت مستقیم و یا به صورت غیر مستقیم با استفاده از برهان خلف انجام شده‌اند. سعی کرده‌ایم مواردی که قابلیت تعمیم به یک اثبات برای گنگ بودن ریشه دوم و یا ریشه بالاتر سایر اعداد دارد، را نیز متذکر شویم. برخی از اثبات‌ها را کمی تغییر داده‌ایم که گفتار مناسب متن حاصل آید. بعلاوه برخی نتایج جدید نیز در بعضی موارد بدست آمده است.

۱. مقدمه

خوارزمی در کتاب بسیار مشهور «جمع و تفریق با عددهای هندی» عدد را اینگونه تعریف می‌کند: «و تئیکه که می‌خواهم بدانم مردم از یک محاسبه چه چیزی می‌خواهند، می‌بینم که جواب همیشه یک عدد است»^۱. با تفصیل بیشتر، اولین چیزی که برای شمردن، محاسبه، و یا مشخص کردن کمیت‌ها به کار می‌رود عدد است. اعداد در فرهنگ لغات نیز بی‌تاثیر نبوده‌اند. واژه‌هایی مثل «دوچرخه»، «هزارپا»، «چهارپایه»، «چهارسو»، «دهه»، «چهلچراغ» و واژه‌های بسیار دیگری وجود دارند که در آن‌ها از اعداد استفاده شده است.

در نمایش اعدادی که به منظور مشخص کردن مقدار کمیت‌ها به کار می‌روند، بعد از ترجمه کتاب «جمع و تفریق با عددهای هندی» به زبان لاتین، کم‌کم همه دنیا سیستم عددنویسی هندی-عربی (یا به اختصار سیستم عددنویسی عربی) را برای نمایش اعداد به شکل دهدهی انتخاب کردند. در قرن شانزدهم میلادی، سیستم عددنویسی عربی برای نمایش اعداد به صورت اعشاری نیز توسعه یافت. فارغ از انواع مختلف سیستم‌های عددنویسی، و فقط با در نظر گرفتن سیستم عددنویسی عربی در مبنای ۱۰ که در حال حاضر مورد قبول همگان است، انواع مختلفی از اعداد را بشر در طول تاریخ برای شمردن، محاسبه، مشخص کردن کمیت‌ها و یا حتی مباحث دینی و فلسفی و زیبایی شناختی مورد استفاده قرار داده است. اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots$ شاید قدمتی به اندازه تاریخ بشریت داشته باشند. مورچه‌ها و برخی پرندگان البته شاید قبل از انسان‌ها نیز از این اعداد استفاده می‌کردند. اعداد اول، یعنی اعداد طبیعی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از ۱ نوشت نیز جزو دسته اعدادی بودند که در مطالعات زیادی ظهور داشتند.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوریایولی

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۲۸

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2019.119712.1345>

^۱ این جمله ترجمه‌ای با چند واسطه از آن چیزی که خوارزمی گفته است می‌باشد. ابتدا کتاب خوارزمی از عربی به لاتین و با عنوان «Algoritmi Numero Indorum» ترجمه شده و سپس خود این جمله (و نه تمام کتاب خوارزمی) در کتاب «The Treasury of Mathematics» به انگلیسی ترجمه شده است که جمله فوق برگردان متن انگلیسی به فارسی است.

اعداد کسری یا گویا از عهد عتیق برای انسانها معلوم بودند. وجه تمایز بزرگ اعداد گویا با اعداد طبیعی در این است که بین هر دو عدد گویا، یک عدد گویای دیگر وجود دارد و شاید به همین خاطر بود که تا مدت‌ها بشر فکر می‌کرد همه کمیت‌ها را می‌توان با اعداد گویا اندازه گرفت. بخصوص فیثاغورثیان که بعد از تبیین اصول اثبات ریاضی توسط فیثاغورث، پیشرفت‌های زیادی در ریاضیات داشتند و اعداد را بنوعی موجوداتی مقدس می‌انگاشتند، اعتقاد داشتند که هر نسبتی در جهان هستی توسط اعداد گویا قابل بیان است. شاید به دلیل همین اعتقاد است که می‌گویند بعد از کشف اعداد ناگویا توسط یکی از فیثاغورثیان متاخر به نام هیپاسوس، او را به دریا می‌اندازند. بر خلاف اعداد طبیعی، اول و گویا که تا حدود بسیار زیادی^۲ شناخته شده هستند، اعداد ناگویا فقط از باب وجه سلبی و با گزاره «عددی ناگویا است که گویا نباشد» معرفی می‌شوند و هیچ تعریف ایجابی که بگوید اعداد ناگویا چه خواص مشخصی دارند تا کنون ارائه نشده است و به همین دلیل است که اعداد ناگویا را اعداد گنگ نیز می‌نامند.

توسعه جبر توسط خوارزمی در قرن نهم میلادی و لزوم وجود جواب برای معادله‌هایی مثل $2x + 5 = 1$ موجب تعریف مجموعه دیگری از اعداد به نام اعداد صحیح شد. در همین زمان اعداد گویا و ناگویای منفی نیز مورد استفاده قرار گرفتند. دانشمندان عرب زبان همچنین مفهوم عدد را با مقدار (اندازه) در هم آمیختند که حاصل آن تعریف مجموعه اعداد حقیقی شد. مجموعه اعداد حقیقی متشکل است از همه اعداد گویا و ناگویا. تقسیم‌بندی دیگری برای مجموعه اعداد حقیقی به اعداد جبری و غیر جبری نیز در قرن هجدهم کشف شد.

در این مقاله، ۲۴ اثبات برای ناگویا بودن ریشه دوم عدد ۲ ارائه شده است. سعی شده که اثبات‌ها از منابع معتبر و البته با تغییراتی در خور متن ارائه گردند. اثبات‌ها از حوزه‌های مختلف ریاضیات مانند آنالیز، جبر، جبرخطی، هندسه، و منطق انتخاب شده‌اند تا بحث دربرگیرنده بیشتر حوزه‌های ریاضی باشد.

۲. اثبات ۱ و ۲: منسوب به یونانیان باستان

یکی از بزرگترین دستاوردهای ریاضیات یونان باستان، اثبات وجود اعداد ناگویا است. رویدادهای زیادی در ریاضیات یونان باستان نیست که قابل مقایسه با اثبات وجود اعداد ناگویا باشد. البته موضوع انتساب این حقیقت به یونانیان باستان محل مناقشاتی در تاریخ ریاضیات است و هیچ جواب متقاعد کننده‌ای برای تاریخ کشف اعداد ناگویا و یا شخصی که این موضوع را ثبت کرده است وجود ندارد. همه منابع باستانی که این موضوع در آنها درج شده است، حداقل ۷۰۰ سال بعد از کشف این موضوع، به آن اشاره کرده‌اند و تقریباً همه آنها، منشاء آن را مدرسه فیثاغورث دانسته‌اند. به نظر می‌رسد فیثاغورثیان اولین افرادی بودند که متوجه وجود اعداد ناگویا شدند. در تفسیر کتاب دهم اصول اقلیدس، پاپوس اسکندرانی کشف این موضوع را به هیپاسوس نسبت می‌دهد که ظاهراً دلیل این کشف به دریا انداخته می‌شود. حدس زده می‌شود که هیپاسوس موقع مطالعه ۱۲ وجهی منتظم که وجوه آن ۵ ضلعی‌های منتظم می‌باشد به وجود اعداد ناگویا پی برده باشد [۱، ۲]. البته برخی معتقدند که هیپاسوس ناگویا بودن ریشه دوم عدد ۲ را نیز فهمیده بود [۲]. هیچ کدام از متون در مورد چگونگی اثبات این موضوع چیزی نگفته‌اند. در عین حال با توجه به آثار ثبت شده از ارسطو و افلاطون در این مورد و نیز با توجه به توضیحات اقلیدس در پیوست کتاب دهم اصول، دو اثبات احتمالی گنگ بودن ریشه دوم عدد ۲ توسط یونانیان باستان مبتنی بر حساب و هندسه می‌باشد.

اثبات اول که از روی کتاب شهیر ارسطو در مورد استدلال پیشینی (استدلال عقلانی) [۳، صفحه ۳۷] به ذهن متبادر می‌شود مبتنی بر حساب است. مفهوم دو نسبت متوافق در یونان باستان به این صورت تعریف می‌شده است که a و b را متوافق گویند هرگاه a/b عددی گویا باشد. مثلاً ۱ و ۷ متوافق‌اند و نیز $2\sqrt{3}$ و $5\sqrt{3}$ متوافق‌اند ولی ۲ و $\sqrt{5}$ متوافق

^۲ بر اساس قضیه ناتمامیت گودل، اگر مجموعه‌ای از گزاره‌ها مثل T را به عنوان خواص اعداد طبیعی مشخص کنیم، می‌توان گزاره‌ای یافت که در اعداد طبیعی درست است ولی در مجموعه T نیست و بعلاوه از گزاره‌های T نیز نمی‌توان آن را نتیجه گرفت. به عبارت دیگر اعداد طبیعی که بنوعی ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین نوع اعداد هستند، به لحاظ خواص هیچ‌گاه بطور کامل و بدون نقص قابل مشخص کردن نمی‌باشند.

نیستند. ارسطو اینطور ذکر می‌کند که "اندازه قطر مربع و اندازه ضلع مربع متوافق نیستند، زیرا در غیر این صورت اعداد فرد و زوج با هم مساوی خواهند شد".

به برهان خلف فرض کنید ریشه دوم ۲ گویا باشد و p و q کوچکترین اعداد طبیعی باشند که $p^2/q^2 = 2$. لذا $p^2 = 2q^2$ و این معادل این است که اگر مربع با ضلع q داشته باشیم، قطرش برابر p است (قضیه فیثاغورث نزد یونانیان معلوم بوده است). ارسطو گزاره $p^2 = 2q^2$ را تناقض می‌داند و می‌گوید "متناسب بودن قطر و ضلع مربع منجر به تساوی اعداد زوج و فرد می‌شود و این ممکن نیست". در واقع چون p و q کوچکترین اعداد طبیعی ممکن فرض شده‌اند، قطعاً یکی از آنها فرد است ولی گزاره $p^2 = 2q^2$ ایجاب می‌کند که هر دو زوج باشند (p^2 زوج است و لذا p هم زوج است. پس به ازای k طبیعی $p = 2k$ و بنابراین $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ که نتیجه می‌دهد q^2 و به طبع آن q زوج باشند). لذا ریشه دوم ۲ گویا نیست.

دومین اثباتی که حدس می‌زنند یونانیان برای گویا نبودن ریشه دوم ۲ ارائه داده‌اند هندسی می‌باشد. افلاطون در متنی که به ته‌تئوس شهرت دارد ذکر می‌کند که چگونه تئودوروس ناگویا بودن ریشه دوم اعداد غیر مربع کامل از ۳ تا ۱۷ را ثابت می‌کند، اما از ناگویا بودن ریشه دوم ۲ حرفی نمی‌زند و ظاهراً ناگویا بودن ریشه دوم عدد ۲ معلوم بوده است. در عین حال تعبیر نوشته‌های افلاطون در فصل ۲۳ و ۲۷ دومین کتاب جمهور در مورد قطر مربع را می‌شود به اثباتی برای ناگویا بودن $\sqrt{2}$ تعبیر کرد.

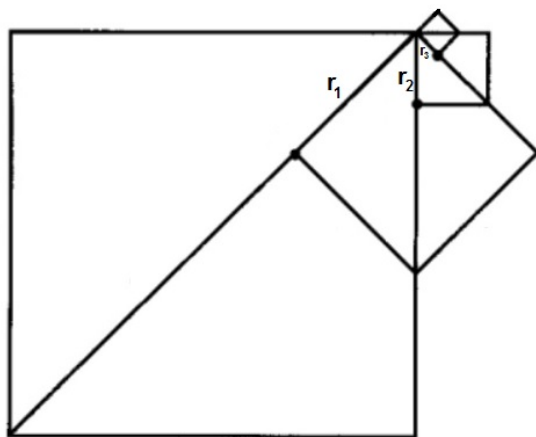
اثبات مبتنی بر یک فرایند نامتناهی هندسی است. در اثبات‌های هندسی منسوب به فیثاغورث، اقناع‌پذیری بصری لازم بوده است، در حالی که بعد از اقلیدس چنین موضعی خیلی ضروری نبوده است و خود اقلیدس متذکر می‌شود که از فرایند تفریق نامتناهی پی‌درپی می‌توان در اثبات عدم توافق دو مقدار استفاده کرد. استفاده از تفریق‌های پی‌درپی برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد طبیعی نیز در زمان افلاطون شناخته شده بود. اگر بین اعداد طبیعی a و b مقدار b کوچکتر باشد، آنگاه $a - b$ عددی طبیعی است. با ادامه همین روند با انتخاب دو مقدار کوچکتر بین a و b و $a - b$ و ... در نهایت بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b با تساوی دو مقدار نهایی حاصل می‌آید. احتمالاً افلاطون هم با استفاده از یک فرایند تفریق نامتناهی به صورت زیر، گویا نبودن ریشه دوم عدد ۲ را نتیجه گرفته است.

همانطور که بیان شد دو مقدار a و b متوافق هستند هرگاه a/b عددی گویا باشد و یا به عبارت دیگر، واحدی مثل u موجود باشد که هر دوی a و b ضربی صحیح از آن واحد باشند. لذا در صورتی که مقادیر a و b متوافق باشند، آنگاه با فرایندی شبیه یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک باید بتوان واحد مشترک u را یافت. در واقع با مفروض بودن دو اندازه a و b ، ابتدا نگاه می‌کنیم که اندازه کوچکتر (مثلاً b) چند دفعه به صورت کامل در a قرار می‌گیرد. اگر تعدادی مشخص از اندازه b بطور کامل a را بپوشاند، واضح است که خود b واحد مشترکی است که برای اندازه‌گیری a و b بکار می‌رود، اما در غیر این صورت باقیمانده‌ای مثل r وجود خواهد داشت که از هر دوی a و b کوچکتر است و بعلاوه هر واحدی که بتواند هر دوی a و b را اندازه بگیرد، می‌تواند r را نیز اندازه بگیرد (زیرا r برابر اندازه a منهای تعدادی مشخص از اندازه b است). پس فرایند را با r و b ادامه می‌دهیم که ببینیم آیا r واحدی برای اندازه گرفتن b (و لذا اندازه گرفتن a) است و یا مقدار کوچکتری از r وجود دارد که این کار را انجام می‌دهد. در صورت ادامه این فرایند در صورت متوافق بودن a و b ، واحد مشترک u که قادر به اندازه‌گیری هر دوی a و b بوده است پیدا می‌شود، و بعلاوه چنانچه با ادامه این روند واحد مشترک u پیدا نشود، آنگاه نتیجه می‌گیریم که a و b متوافق نبوده‌اند.

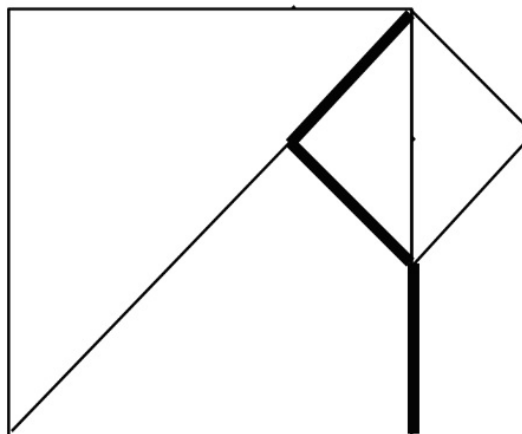
لذا برای اثبات عدم توافق قطر و ضلع مربع، یکی از استلال‌هایی که ممکن است افلاطون مد نظر داشته است می‌تواند به صورت زیر باشد.

ابتدا به اندازه ضلع مربع روی قطر آن جدا می‌کنیم. این کار یک اندازه r روی قطر ایجاد می‌کند. چنانچه از محل مشخص شده این اندازه روی قطر، عمودی بر قطر رسم کنیم تا ضلع دیگر مربع را قطع کند، اندازه این عمود و مقداری که روی ضلع مربع توسط آن جدا می‌شود نیز برابر r خواهد بود. این باقیمانده اول که سه اندازه مساوی را روی شکل ۱۱ ایجاد کرده

است، به صورت تیره مشخص کرده‌ایم. اکنون مجدداً فرایند را برای مربع کوچکی که در شکل ۱آ مشخص شده است ادامه می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که همین اتفاق برای این مربع نیز اتفاق می‌افتد (شکل ۱ب) و فرایند هیچ وقت متوقف نمی‌شود. لذا مقدار واحدی که ضلع و قطر مربع را با آن بتوان اندازه گرفت وجود ندارد. پس ضلع و قطر مربع متوافق نیستند. اما چون ۲ برابر مربع ضلع برابر مربع قطر می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که ریشه دوم ۲ ناگویا است.



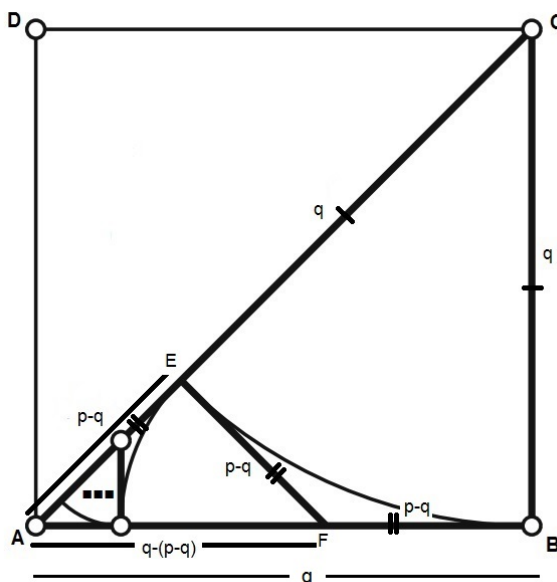
شکل ۱ب) مرحله ۳



شکل ۱آ) مرحله ۱

شکل ۱. یکی از تعبیرهای نوشته‌های افلاطون در متن تتوس

یک تعبیر دیگر نیز می‌تواند به صورت زیر باشد [۴، صفحه ۱۲۷-۱۲۶].



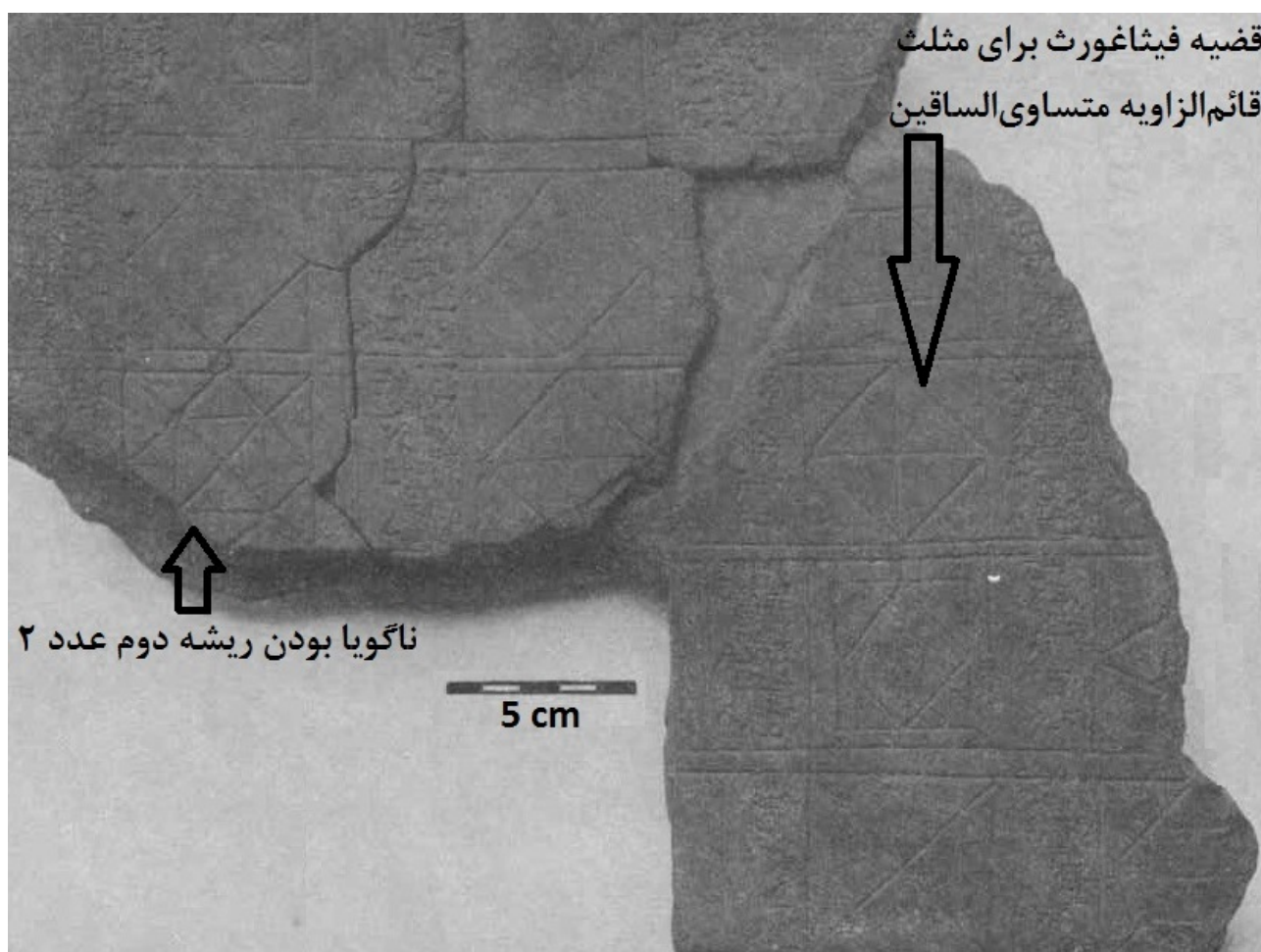
با توجه به قضیه فیثاغورث، قطر مربع به ضلع ۱ برابر $\sqrt{2}$ است. اگر به برهان خلف $\sqrt{2} = p/q$ گویا باشد و $\sqrt{2} = p/q$ ، آنگاه در مربع با ضلع q ، قطر برابر p خواهد بود و همه اضلاع مثلث ABC اعداد صحیح هستند. اکنون چنانچه کمانی به اندازه q روی قطر AC بزنیم و محل تقاطع کمان روی AC را E بنامیم و سپس از نقطه E خطی بر AC عمود کنیم و محل تقاطع آن با AB را F بنامیم، براحتی می‌توان دید مثلث AEF نیز یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است که همه اضلاع آن اعدادی صحیح می‌باشند و این فرایند نامتناهی بار قابل تکرار است و هر بار یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین جدید با اضلاع صحیح حاصل می‌شود که ممکن نیست. پس فرض خلف غلط بوده و $\sqrt{2}$ گویا نیست.

شکل ۲. تعبیر دیگری از نوشته‌های متن تتوس

از همین استدلال برای گویا نبودن همه اعداد به صورت $\sqrt{n^2 - 1}$ و $\sqrt{n^2 + 1}$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 1$ می‌توان استفاده کرد. برای ناگویا بودن $\sqrt{n^2 + 1}$ ، مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع n و ۱ و وتر $\sqrt{n^2 + 1}$ ، و برای ناگویا بودن $\sqrt{n^2 - 1}$ مثلث قائم‌الزاویه با وتر n و یک ضلع ۱ را در نظر بگیرید [۵].

۳. اثبات ۳: با توجه به لوحه‌های باقیمانده از بابلیان باستان (شبه اثبات ۱)

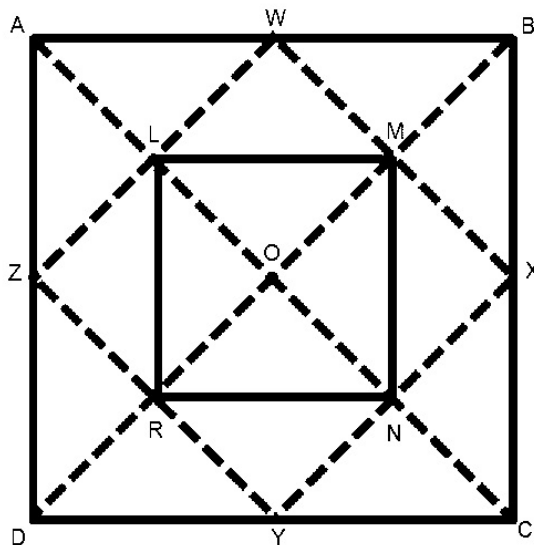
علی‌رغم اینکه کشف اعداد غیر گویا یکی از بزرگترین دستاوردهای ریاضیات یونانیان باستان است و کسی آن را به اقوام باستانی دیگری مثل مصریان و یا بابلیان نسبت نمی‌دهد، اما می‌توان نشان داد لوحه‌های باقیمانده از بابلیان باستان نیز اثباتی از گویا نبودن ریشه دوم ۲ را نتیجه می‌دهند. در زیر تصویر لوحه BM ۱۵۲۸۵ بابلیان باستان نشان می‌دهد که هم حالت خاصی از قضیه فیثاغورث و هم گویا نبودن ریشه دوم عدد ۲ توسط بابلیان باستان قابل نتیجه‌گیری بوده است. در عین حال علی‌رغم تسلط بابلیان بر ریاضیات و نجوم، با توجه به نوشته‌های ثبت شده و نیز متون لوحه‌های یافت شده تا این لحظه، توافق آراء بر این است که بابلیان باستان مفهوم اعداد ناگویا را نمی‌دانستند و بخصوص هیچ عدد ناگویایی را نمی‌شناختند و فقط تخمین‌هایی گویا برای مقادیر $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و π داشتند [۶، صفحه ۳۵] و [۷، صفحه ۱۴۰].



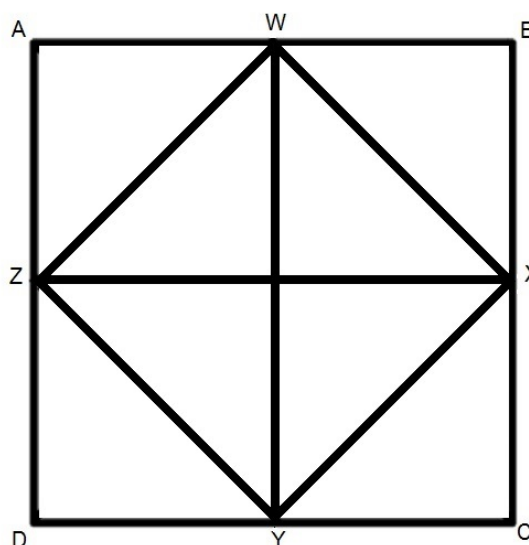
شکل ۳. قسمتی از لوحه BM ۱۵۲۸۵ بابلیان باستان

مسئله ۱۲ روی لوحه BM ۱۵۲۸۵ به این صورت است: "ضلع مربع ۶۰ است. داخل آن ۱۶ مثلث کشیده‌ام. مساحت هر کدام از آنها چقدر است؟". پاسخ این مسئله ربطی به قضیه فیثاغورث و یا ناگویا بودن ریشه دوم ۲ ندارد و ب راحتی با ضرب و تقسیم بدست می‌آید. اما تاملی کوچک روی تصویرهای درج شده روی این لوحه، علاوه بر اینکه حالت خاصی از قضیه فیثاغورث را نتیجه می‌دهد، ناگویا بودن ریشه دوم ۲ را نیز نتیجه می‌دهد.

برای اثبات حالت خاص قضیه فیثاغورث، اگر در شکل ۴ مساحت مثلث‌های کوچک را S بگیریم، آنگاه مساحت مربع $WXYZ$ برابر S برابر $(WX)^2 = (XY)^2 = 4S$ است و از طرفی مساحت مربع $ABCD$ برابر $(WY)^2 = 8S$ می‌باشد. لذا $(WX)^2 + (XY)^2 = (WY)^2$ که در واقع قضیه فیثاغورث برای مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین WXY می‌باشد.



(ب) ناگویا بودن $\sqrt{2}$



(آ) قضیه فیثاغورث

شکل ۴. دو تصویر مبسوط از لوحه BM ۱۵۲۸۵

برای گویا نبودن ریشه دوم ۲، در تصویر ۴ ب سه مربع داریم. با توجه به اینکه ۱۶ مثلث کوچک مساحت مساوی دارند، مساحت $ABCD$ دو برابر مساحت $WXYZ$ است و مشابهاً مساحت $WXYZ$ دو برابر مساحت $LMNR$ است. لذا اگر اضلاع این سه مربع را از بزرگ به کوچک a و b و c بنامیم داریم $a^2 = 2b^2$ و $b^2 = 2c^2$. اکنون چنانچه به برهان خلف ریشه دوم ۲ گویا باشد، میتوان a و b را کوچک‌ترین اعداد صحیح مثبتی اختیار کرد که $\sqrt{2} = a/b$ و با توجه به اینکه $\sqrt{2} = b/c$ ، نتیجه می‌شود c عدد صحیحی نیست. اما چون $a^2 = 2b^2$ لذا a^2 زوج است و بنابراین a نیز زوج است. حالا چون a زوج است، پس a^2 بر ۴ بخش پذیر است. از طرفی داریم $a^2 = 2(2c^2) = 4c^2$ و چون a^2 بر ۴ بخش پذیر است، نتیجه می‌شود c^2 عددی صحیح است که با صحیح نبودن c در تناقض است.

۴. اثبات ۴: توجه به رقم پایانی

به برهان خلف فرض کنید ریشه دوم ۲ گویا باشد $\sqrt{2} = a/b$ که a و b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول هستند. لذا $a^2 = 2b^2$. اکنون با توجه به رقم یکان b ، رقم یکان b^2 می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۹ باشد. لذا رقم یکان $a^2 = 2b^2$ یا ۰ یا ۲ یا ۸ خواهد بود.

از طرفی با توجه به رقم یکان a ، رقم یکان a^2 فقط می‌تواند یکی از ارقام ۰ یا ۱ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۹ باشد که در کنار نتیجه مذکور در پاراگراف قبل نتیجه می‌دهد رقم یکان a^2 باید ۰ باشد.

حالا چون رقم یکان a^2 برابر ۰ است از $a^2 = 2b^2$ نتیجه می‌گیریم رقم یکان b^2 یا ۰ یا ۵ است. چون رقم یکان a^2 برابر ۰ و رقم یکان b^2 برابر ۰ یا ۵ است، لذا رقم یکان a برابر ۰ و رقم یکان b برابر ۰ یا ۵ است و این موضوع با اینکه a و b نسبت به هم اول هستند در تناقض است. بنابراین ریشه دوم ۲ ناگویا است. از این روش برای اثبات ناگویا بودن ریشه دوم همه اعدادی که به ۲، ۳، ۷ و ۸ ختم می‌شوند می‌توان استفاده کرد [۸].

۵. اثبات ۵: عامل اول مشترک

به برهان خلف فرض کنید $\sqrt{2}$ گویا باشد و $\sqrt{2} = a/b$ که a و b دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول هستند و $b > 1$. لذا $a^2 = 2b^2$ و بنابراین $a^2 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. چون $b > 1$ فرض کنید p عامل اولی از b باشد. پس $p|b^2$ و لذا $p|(a-b)(a+b)$ و بنابراین یا $p|a-b$ یا $p|a+b$ و یا $p|a+b$. از طرفی چون $p|b$ هر کدام از $p|a-b$ یا $p|a+b$ منجر به این نتیجه خواهند شد که $p|a$. اما فرض کرده بودیم که a و b نسبت به هم اول هستند و این با اینکه p شمارنده هر دوی a و b باشد در تناقض است. پس فرض خلف درست نیست و $\sqrt{2}$ ناگویا است. نکته جالب اثبات حاضر این است که می‌توان از آن برای اثبات ناگویا بودن ریشه دوم همه اعداد طبیعی که مربع کامل نیستند استفاده کرد (یعنی ریشه دوم هر عدد طبیعی، یا عددی طبیعی است و یا ناگویا است). بعلاوه می‌توان آن را به اثباتی برای ناگویا بودن ریشه‌های بالاتر نیز تعمیم داد [۹].

۶. اثبات ۶: تجزیه به عوامل اول

به برهان خلف فرض کنید $\sqrt{2}$ گویا باشد و $\sqrt{2} = a/b$ که a و b دو عدد طبیعی هستند و $b > 1$. چون $\sqrt{2} > 1$ پس $a > 1$. با توجه به قضیه اساسی حساب هر عدد طبیعی بیشتر از ۱ دارای تجزیه‌ای به عوامل اول هست. فرض کنید به ازای $n, m \geq 1$ $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ و $b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_m^{\beta_m}$ که در آن p_i ها متمایز از هم و همچنین q_j ها متمایز از هم می‌باشند. چون $a^2 = 2b^2$ پس

$$p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_n^{2\alpha_n} = 2 q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \dots q_m^{2\beta_m}$$

اکنون توان عدد ۲ در سمت راست عبارت فوق فرد است در حالی که در سمت چپ توان ۲ زوج است و این ممکن نیست. پس فرض خلف غلط بوده و $\sqrt{2}$ گویا نیست. مشابه اثبات ۵، از این روش نیز می‌توان برای اثبات ناگویا بودن هر عدد طبیعی که مربع کامل نیست و همچنین ناگویا بودن ریشه‌های بالاتر استفاده کرد. [۱۰].

۷. اثبات ۷ و ۸: استفاده از کمینگی

اثباتهایی به شکل اثبات ۱، ۳، ۴ و ۵ را اثبات مبتنی بر کمینگی نیز مینامند. در این نوع اثبات که معمولاً مبتنی بر برهان خلف است، با پیدا کردن شی A با کمترین مقدار ممکن و سپس استفاده از مفروضات، شی B با مقادیر کمتر از شی A پیدا می‌شود و در نهایت تناقض حاصل می‌آید. در هر چهار اثبات ۱، ۳، ۴ و ۵ عدد $\sqrt{2}$ را برابر کسر a/b فرض کرده‌ایم که a و b کوچکترین اعداد طبیعی ممکن هستند و سپس به تناقض رسیده‌ایم.

در اثبات هفتم نیز از همین تکنیک استفاده می‌شود و یک محاسبه ساده جبری منجر به تناقض می‌شود. پس به برهان خلف فرض کنید $\sqrt{2}$ گویا باشد و a و b کوچکترین اعداد طبیعی باشند که $\sqrt{2} = a/b$. پس $a^2 = 2b^2$ و لذا $a^2 - ab = 2b^2 - ab$. به عبارت دیگر $a(a-b) = b(2b-a)$. پس $a(a-b)/(a-b) = \sqrt{2} = a/b$. از آنجایی که $1 < \sqrt{2} < 2$ پس $1 < a/b < 2$ و لذا $b < a < 2b$ که نتیجه می‌دهد هم $a-b$ و هم $2b-a$ اعدادی طبیعی هستند و این موضوع با اینکه a و b کوچکترین اعداد طبیعی هستند که $\sqrt{2} = a/b$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل بوده و $\sqrt{2}$ گویا نیست [۱۱، صفحه ۵] و [۱۲].

برای اثبات هشتم مجدد فرض کنید $\sqrt{2}$ گویا باشد و a و b کوچکترین اعداد طبیعی باشند که $\sqrt{2} = a/b$. چون $\sqrt{2} > 1$ پس $a > b$ و لذا عدد طبیعی m ای موجود است که $a = m + b$. بنابراین $a^2 = m^2 + 2mb + b^2$ و چون $a^2 = 2b^2$ پس $2b^2 = m^2 + 2mb + b^2$ لذا $b(b - 2m) = m^2$ که نتیجه می‌دهد $b > m$. مجدداً عدد طبیعی n را می‌توان یافت که $b = n + m$ و با توجه به اینکه $a = m + b$ خواهیم داشت $a = m + (n + m) = 2m + n$. اکنون چون $a^2 = 2b^2$ پس $(2m + n)^2 = 2(m + n)^2$ که پس از ساده شدن به $2m^2 = n^2$ می‌رسیم. اما n و m کمتر از a و b هستند و این با اینکه a و b کوچکترین اعداد طبیعی هستند که $a^2 = 2b^2$ در تناقض است [۱۳].

این روش اثبات نیز قابلیت (تغییر) و تعمیم به اثبات (هایی) برای ناگویا بودن ریشه دوم اعداد طبیعی که مربع کامل نیستند را دارد. (همانطور که دیدید، برای گویا نبودن ریشه دوم خود ۲، دو اثبات ارائه شد).

۸. اثبات ۹ و ۱۰: خواص چندجمله‌ای‌ها

قضیه ریشه گویا برای یک چند جمله‌ای بیان می‌کند که اگر $r = a/b$ (که a و b نسبت به هم اول هستند) یک ریشه چندجمله‌ای $0 = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ باشد، آنگاه a یک شمارنده a_0 و b یک شمارنده a_n خواهد بود. اثبات این موضوع البته مسئله خیلی دشواری نیست. چون فرض بر این است که a/b ریشه چند جمله‌ای $0 = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ است، لذا

$$(1) \quad a_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + \dots + a_1 \frac{a}{b} + a_0 = 0.$$

پس $a(a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} b + \dots + a_1 b^{n-1}) = -a_0 b^n$. اکنون چون a و b نسبت به هم اول هستند، پس a و b^n نیز نسبت به هم اول هستند و لذا $a | a_0$. مجدداً با بردن اولین جمله سمت چپ معادله ۱ به سمت راست، داریم $b(a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} b + \dots + a_0 b^{n-1}) = -a_n a^n$. اکنون برای اثبات ناگویا بودن ریشه دوم ۲، چنانچه به برهان خلف $x = a/b$ یک جواب گویای معادله $x^2 - 2 = 0$ باشد که در آن a و b نسبت به هم اول می‌باشند، آنگاه با توجه به "قضیه ریشه گویا" باید $2 | a$ و $1 | b$ که به تناقض $b = 1$ می‌انجامد.

اثبات دهم با استفاده از محك تحویل‌ناپذیری آیزنشتاین برای چندجمله‌ای‌ها انجام می‌شود. محك تحویل‌ناپذیری آیزنشتاین می‌گوید اگر $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و $n \geq 1$ و عدد اولی مثل p موجود باشد که $p | a_n, \dots, p | a_1, p \nmid a_0$ و بعلاوه $p \nmid a_n$ و $p^2 \nmid a_0$ ، آنگاه Q روی اعداد گویا تحویل‌ناپذیر خواهد بود. اکنون اگر چندجمله‌ای $Q(x) = x^2 - 2$ را در نظر بگیریم، با توجه به محك تحویل‌ناپذیری آیزنشتاین فوراً نتیجه می‌شود Q روی اعداد گویا تحویل‌ناپذیر است در حالی که اگر $\sqrt{2}$ گویا باشد آنگاه Q روی اعداد گویا تحویل‌پذیر خواهد بود.

این دو روش را نیز می‌توان برای اثبات غیرگویا بودن هر عدد طبیعی که مربع کامل نیست و همچنین اثبات غیرگویا بودن ریشه‌های بالاتر اعداد طبیعی به کار برد.

۹. اثبات ۱۱: روش ددکیند (مبتنی بر کمینه‌گی)

تحلیل زیر در ابتدای کتاب مشهور ددکیند در مورد اعداد، برای ناگویا بودن ریشه‌های دوم آمده است [۱۴]، صفحه ۱۵-۱۳. فرض کنید D عددی طبیعی باشد که مربع کامل نیست و عدد صحیح λ طوری باشد که

$$(2) \quad \lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

اکنون اگر عدد گویایی مثل a/b موجود باشد که تا حد امکان ساده شده باشد و مربع آن D باشد، خواهیم داشت

$$a^2 - Db^2 = 0.$$

لذا با توجه به ۲ داریم $\lambda b < a < (\lambda + 1)b$. بنابراین $b' = a - \lambda b < b$. از طرفی

$$Db - \lambda a = \frac{a^2}{b^2}b - \lambda a = \frac{a^2 - \lambda ab}{b} = \frac{a(a - \lambda b)}{b} > 0.$$

اکنون چنانچه قرار دهیم $a' = Db - \lambda a$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a'^2 - Db'^2 &= (Db - \lambda a)^2 - D(a - \lambda b)^2 \\ &= D^2b^2 + \lambda^2a^2 - 2Db\lambda a - Da^2 - D\lambda^2b^2 + 2Db\lambda a \\ &= \lambda^2(a^2 - Db^2) - D(a^2 - Db^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

که با این فرض که a و b کوچکترین اعداد طبیعی هستند که $a^2 - Db^2 = 0$ در تناقض است. لذا مربع هیچ عدد گویایی برابر D نیست. توجه کنید که اثبات ۷ حالت خاصی از اثبات حاضر برای $D = 2$ و $\lambda = 1$ می‌باشد.

۱۰. اثبات ۱۲: استفاده از خواص جزء صحیح (یک اثبات دیگر مبتنی بر کمینه‌گی)

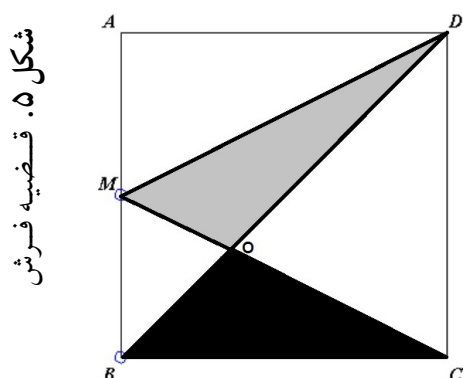
شبه اثبات ۱۱ به ازای هر عدد طبیعی k که مربع کامل نیست، نشان می‌دهیم $\sqrt{k}$ ناگویا است. به برهان خلف فرض کنید $x = \sqrt{k}$ صحیح نباشد و گویا باشد. b را کوچکترین عدد طبیعی در نظر بگیرید که bx صحیح باشد. فرض کنید $a = b(x - [x])$ که $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است. چون $0 \leq x - [x] < 1$ پس $0 \leq a < b$ و بعلاوه از آنجا که bx عددی صحیح است، لذا $a = bx - b[x]$ نیز عددی صحیح می‌باشد. از طرفی

$$ax = (bx - b[x])x = bx^2 - (bx)[x] = bk - (bx)[x]$$

نیز عددی صحیح است و لذا با توجه به می‌نی‌مال انتخاب شدن b و اینکه $a < b$ و ax عدد صحیحی است، بایستی a صفر باشد. اما در این صورت $x = [x]$ که با فرض صحیح نبودن x در تضاد است. پس فرض خلف باطل است. یعنی چنانچه عدد طبیعی k مربع کامل نباشد، $x = \sqrt{k}$ ناگویا است.

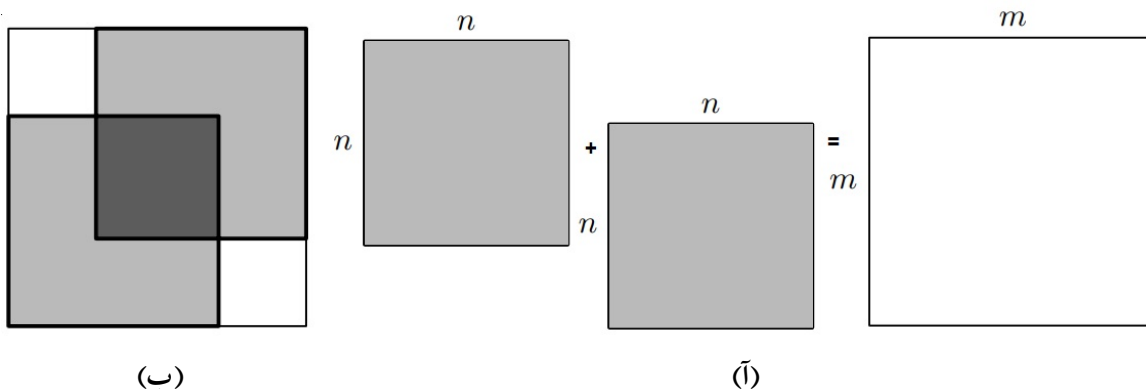
۱۱. اثبات ۱۳ و ۱۴: دو اثبات هندسی دیگر

تعبیر نوشته‌های منسوب به افلاطون در مورد عدم توافق قطر و ضلع مربع به صورت‌های گوناگونی بوده است. دو تا از این تعبیر را در اثبات ۲ آوردیم. در اینجا تعبیر هندسی دیگری برای تفریق نامتناهی و عدم توافق ضلع و قطر مربع می‌آوریم. اثبات اول به کمک قضیه‌ای موسوم به فرش انجام شده است. این قضیه می‌گوید اگر قسمتی از دو فرش هم مساحت روی هم قرار بگیرد، مساحت قسمت‌های باقیمانده با هم برابر است. اثبات کاملاً بدیهی است ولی قضیه کاربردهای زیادی دارد.



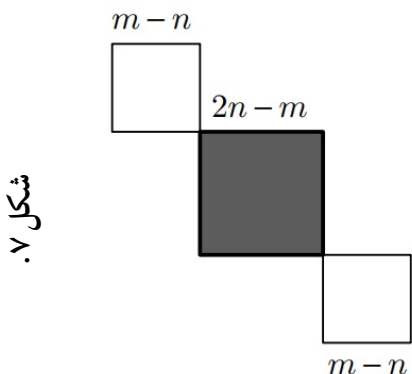
مثلاً با توجه به این مطلب چون در شکل ۵ مساحت دو مثلث DMC و BCD برابر است، لذا پس از کسر قسمت روی هم قرار گرفته (مثلث DCO) نتیجه می‌شود مساحت دو مثلث BCO و MDO نیز با هم برابر است.

برای اثبات عدم توافق ضلع و قطر مربع، به برهان خلف فرض کنید دو مربع با ضلع‌های به اندازه m و n که عدد طبیعی هستند وجود داشته باشد که مساحت مربع بزرگتر (مربع به ضلع m) دو برابر مساحت مربع کوچکتر باشد (شکل ۶آ). لذا $m^2 = 2n^2$. سپس دو مربع کوچکتر را به صورت شکل ۶ب داخل مربع بزرگتر قرار دهید.



شکل ۶. مربعی با ضلع صحیح که مساحت آن برابر ۲ برابر مساحت مربع دیگر با ضلع صحیح است.

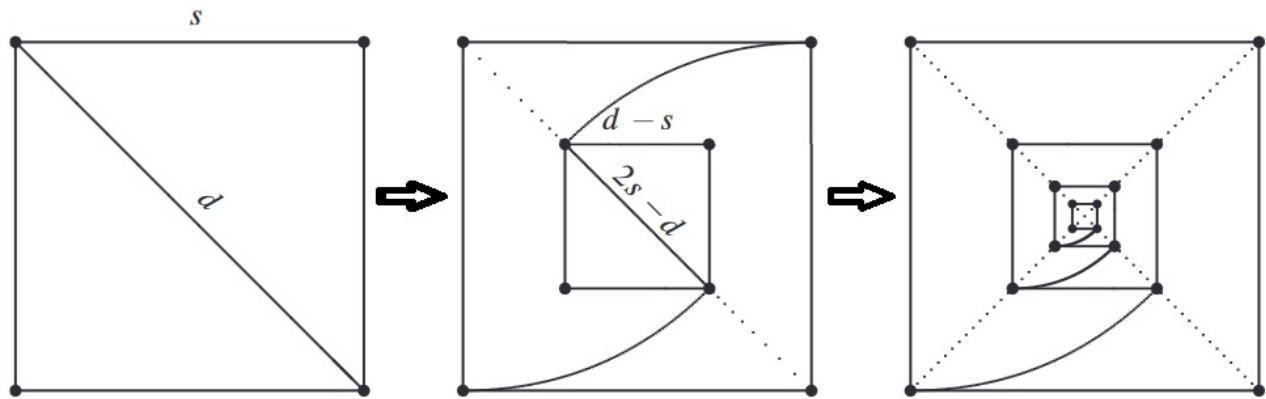
با توجه به قضیه فرش مساحت قسمت سفید شکل ۶ب برابر مساحت قسمت تیره همین شکل است (مساحت مربع بزرگ منهای قسمت پوشیده شده از آن توسط دو مربع تیره روشن = مجموع مساحت دو مربع تیره روشن منهای قسمت پوشیده شده از آنها توسط مربع بزرگ).



از طرفی همانطور که در شکل ۷ معلوم است اضلاع مربع‌های جدید نیز همگی اعداد طبیعی هستند. پس مجدداً مربعی با ضلع $2n - m$ داریم که مساحتش دو برابر مربع با ضلع $m - n$ است. اکنون با توجه به اینکه این روند را می‌توان به هر تعداد دلخواه ادامه داد به تناقض می‌رسیم [۱۵، صفحه ۳۷].

تعمیم اثبات ۱۳ را برای اثبات غیر گویا بودن $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ و $\sqrt{n(n+1)/2}$ برای n های طبیعی را می‌توانید در [۱۶] ببینید.

اثبات هندسی بعدی از تجمیع ایده بکار رفته در اثبات دوم (شکل ۲) و اثبات ۱۳ بدست آمده است. روند استدلال کاملاً از روی شکل معلوم است. چنانچه به برهان خلف ضلع و قطر مربع متوافق باشند، آنگاه مربعی با ضلع و قطر طبیعی s و d وجود دارد. اما در این صورت بی‌نهایت مربع دیگر با این خاصیت داخل این مربع یافت خواهد شد که امکان ندارد. پس ضلع و قطر مربع متوافق نیستند و لذا با توجه به قضیه فیثاغورث $\sqrt{2}$ ناگویا است [۱۷].



شکل ۸. عدم متوافق بودن ضلع و قطر مربع

اثبات‌های هندسی دیگری که شبیه دو اثبات اخیر بر اساس تشکیل دنباله‌ای نامتناهی از یک فرایند هستند ارائه شده است ولی در اینجا مجال پرداختن به آنها نیست. به عنوان مثال می‌توانید [۱۸، صفحه ۴۶-۴۴] و [۱۹] را ببینید.

۱۲. اثبات ۱۵ و ۱۶: استفاده از مفهوم حد

در اثبات‌هایی که ارائه شد، فقط اثبات ۱۲ کمی ماهیت آنالیزی داشت. اثبات ۱۵ که در ابتدای کتاب [۲۰] ارائه شده است، نیز ماهیتی آنالیزی دارد. فرض کنید $W = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. واضح است که W تحت اعمال جمع، تفریق، ضرب و توان بسته است. قرار دهید $\epsilon = \sqrt{2} - 1$. چون $0 < \epsilon < 1$ ، لذا

$$(۳) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^n = 0$$

اکنون اگر به برهان خلف $\sqrt{2} = a/b$ با توجه به بسته بودن W تحت اعمال جمع، تفریق، ضرب و توان به ازای هر n طبیعی داریم

$$\epsilon^n = c + d\sqrt{2} = c + d\frac{a}{b} = \frac{bc + ad}{b}$$

اکنون از اینکه $\epsilon^n > 0$ نتیجه می‌شود $bc + ad > 0$ و لذا برای هر n ،

$$\epsilon^n = \frac{bc + ad}{b} \geq \frac{1}{b}$$

که با معادله ۳ در تناقض است.

در صفحه ۴۵ کتاب [۲۱] روش دیگری که با استفاده از حد، ناگویا بودن یک عدد ثابت می‌شود نیز بیان شده است. در واقع اگر به ازای عدد حقیقی مثبت r ، دنباله‌ای از اعداد گویای مثبت متمایز مثل a_n/b_n (که a_n و b_n نسبت به هم اول

هستند) موجود باشد که

$$(۴) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \left| r - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$$

آنگاه r عددی ناگویا است. زیرا چنانچه به برهان خلف r گویا باشد و به صورت عدد گویای ساده شده a/b باشد، آنگاه با توجه به فرض متمایز بودن عناصر دنباله a_n/b_n ، حداکثر یک n_0 وجود دارد که $a/b = a_n/b_n$ و لذا به ازای هر $n > n_0$ خواهیم داشت

$$b_n \left| r - \frac{a_n}{b_n} \right| = b_n \left| \frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{|ab_n - ba_n|}{b} \geq \frac{1}{b}$$

که با ۴ در تناقض است.

اکنون برای ناگویا بودن $\sqrt{2}$ دنباله اعداد a_n و b_n را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_0 = b_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2b_n & n \geq 0 \\ b_{n+1} = a_n + b_n & n \geq 0 \end{cases}$$

بوضوح به ازای هر n ، $a_n \geq b_n$ و همچنین $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ بعلاوه

$$\begin{aligned} 2b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 &= 2(a_n + b_n)^2 - (2b_n + a_n)^2 \\ &= a_n^2 - 2b_n^2 \\ &= (-1)(2b_n^2 - a_n^2) = \dots = (-1)^{n+1}(2b_0^2 - a_0^2) = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

پس $2b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ که ایجاب می‌کند $2 - \frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{(-1)^n}{b_n^2}$ و لذا

$$\left| \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \right| \left| \sqrt{2} + \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{1}{b_n^2}$$

بنابراین با توجه به اینکه $a_n \geq b_n$ داریم

$$b_n \left| \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{1}{b_n \left| \sqrt{2} + \frac{a_n}{b_n} \right|} \leq \frac{1}{b_n}$$

در نهایت چون $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \left| \sqrt{2} - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$$

که با عنایت به مطلبی که گفته شد ایجاب می‌کند $\sqrt{2}$ ناگویا باشد.

توجه دارید که دنباله اعداد a_n و b_n این خاصیت را دارند که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \sqrt{2}$ و لذا اعضای دنباله $\{a_n/b_n\}$ را می‌توان برای تقریب زدن $\sqrt{2}$ به کار برد. مثلاً $99/70 = 1.4142857$ که خیلی نزدیک $\sqrt{2}$ است.

این دنباله را دنباله «ضلع و قطر» می‌نامند [۲۲]. در اثبات بعدی که صورت تغییر یافته روش تولید دنباله «ضلع و قطر» است خواهیم دید در نهایت با شروع از هر جفت عدد صحیح a_0 و b_0 (و در واقع هر جفت عددی که a_0/b_0 برابر $-\sqrt{2}$ نباشد)، دنباله‌ای مثل a_n و b_n تولید می‌شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \sqrt{2}$ و لذا a_n/b_n تقریبی برای $\sqrt{2}$ است.

۱۳. اثبات ۱۷: استفاده از بردارهای ویژه ماتریس‌ها و تقریبی از $\sqrt{2}$ با استفاده از اعداد گویا

در [۱۹] تحلیل دینامیکی جالبی در مورد گنگ بودن ریشه دوم ۲ به کمک ماتریس‌ها و این واقعیت از اثبات ۱۵ که $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^n = 0$ ارائه شده است. فرض کنید A ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد. در این صورت به ازای هر نقطه $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ای داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b - a \\ a - b \end{bmatrix}$$

پس A به عنوان یک تبدیل خطی همه نقاط شبکه تشکیل شده از اعداد صحیح را به خود این شبکه برمی‌گرداند. از طرفی اگر مقادیر ویژه A را حساب کنیم، داریم

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

و لذا $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} - 1$. بردارهای ویژه λ_i عبارتند از $u_{1,2} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. بخصوص برای $\epsilon = \lambda_1 = \sqrt{2} - 1$ داریم

$$A \begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ a \end{bmatrix} = (\sqrt{2} - 1) \begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ a \end{bmatrix}$$

که بدین معنی است که ماتریس A همه نقاط روی خط L با معادله $x = \sqrt{2}y$ را بر روی نقاط دیگری از همین خط L می‌نگارد.

از طرفی چون $0 < \epsilon < 1$ ، لذا A یک نگاشت خطی انقباضی است. پس اگر یک نقطه (a, b) دلخواه روی خط L انتخاب شود، با تاثیر نگاشت خطی A روی این نقطه به صورت پی‌درپی، تصاویر بدست آمده روی خود خط L باقی می‌مانند و به مبداء نزدیک می‌شوند.

از طرف دیگر اگر به برهان خلف $\sqrt{2}$ گویا باشد و مثلاً به ازای دو عدد طبیعی p و q داشته باشیم $\sqrt{2} = p/q$ ، آنگاه نقطه (p, q) روی خط L خواهد بود. ولی چون تاثیر A روی شبکه اعداد صحیح، داخل خود این شبکه است، هیچ وقت دنباله نقاط حاصل از تاثیر A روی (p, q) به مبداء همگرا نمی‌شود که با این واقعیت که تاثیر A روی هر نقطه از خط L منجر به تولید دنباله‌ای از نقاط همگرا به مبداء می‌شود در تناقض است. پس $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست.

اما نتیجه شگفت‌آور دیگری که می‌توان با کمک ماتریس فوق گرفت، تقریب $\sqrt{2}$ به کمک دنباله‌های اعداد گویا است. دو مقدار ویژه بدست آمده برای ماتریس A عبارت‌اند از $\lambda_1 = \sqrt{2} - 1$ و $\lambda_2 = -\sqrt{2} - 1$. برای اینکه مقدار ویژه مثبت، بزرگتر از ۱ باشد ماتریس A^{-1} را در نظر بگیریم، مقادیر ویژه A^{-1} عبارتند از

$$\lambda_1^{-1} = 1/(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1 \text{ و } \lambda_2^{-1} = -1/(\sqrt{2} + 1) = -\sqrt{2} + 1$$

و بردار ویژه λ_i^{-1} همان بردارهای ویژه λ_i هستند. با توجه به استقلال خطی بردارهای ویژه، هر بردار در صفحه را می‌توان توسط ترکیبی خطی از بردارهای ویژه نوشت. لذا به ازای هر بردار دلخواه $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left((A^{-1})^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n (a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \mathbf{u}_1 + b \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \mathbf{u}_2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a(\lambda_1^{-1})^n \mathbf{u}_1 + b(\lambda_2^{-1})^n \mathbf{u}_2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1^{-1})^n \left(a\mathbf{u}_1 + b \left(\frac{\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1}} \right)^n \mathbf{u}_2 \right) \end{aligned}$$

اما چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1}} \right)^n = 0$ لذا اگر $a \neq 0$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{-1})^n \mathbf{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1^{-1})^n a\mathbf{u}_1$ که می‌گوید تاثیر متوالی تبدیل خطی A^{-1} روی یک بردار دلخواه $\mathbf{v}$ که هم جهت $\mathbf{u}_2$ نیست (در جهت $\mathbf{u}_2$ داریم $a = 0$)، منجر به تولید برداری با جهت خیلی نزدیک به $\mathbf{u}_1$ می‌شود. به عبارت دیگر چون جهت $\mathbf{u}_1$ برابر $\sqrt{2}$ است، برای n های بزرگ جهت $(A^{-1})^n \mathbf{v}$ تقریباً برابر $\sqrt{2}$ است و لذا می‌توان از جهت $(A^{-1})^n \mathbf{v}$ برای تقریب $\sqrt{2}$ استفاده کرد. مثلاً اگر از $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ شروع کنیم و A^{-1} را ۱۰ بار روی $\mathbf{v}$ اثر دهیم، دنباله زیر تولید خواهد شد (که در اثبات قبل نیز آن را داشتیم):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 \\ 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 99 \\ 70 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 239 \\ 169 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 577 \\ 408 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1393 \\ 985 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3363 \\ 2378 \end{bmatrix}$$

اکنون جهت آخرین عنصر تقریبی از جهت $\mathbf{u}_1$ (یعنی $\sqrt{2}$) است. لذا $3363/2378$ تقریبی برای $\sqrt{2}$ است. با عنایت به اینکه $1 + 2 \times 2378^2 = 3363^2$ ، این تقریب خیلی دقت دارد و در واقع بسط دهدهی آن عدد $\sqrt{2}$ را با دقت ۷ رقم اعشار تقریب می‌زند.

اگر از اعداد خیلی بی‌ربط نیز شروع کنیم، همگرایی خیلی زود شروع می‌شود. مثلاً با شروع از $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 13 \\ -567 \end{bmatrix}$ دنباله

زیر تولید می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 13 \\ -567 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1121 \\ -554 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2229 \\ -1675 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5579 \\ -3904 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13387 \\ -9483 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -32353 \\ -22870 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -78093 \\ -55223 \end{bmatrix}$$

که $1/4141 \approx -55223/-78093$. این روش برای تقریب ریشه دوم همه اعداد می‌تواند به کار برود. بعلاوه مولفین حدس می‌زنند با استفاده از ماتریس‌های $n \times n$ بتوان تقریباتی برای ریشه n ام اعداد نیز یافت که تحلیل موضوع خارج از حوصله متن است.

حالا که بحث تقریب زدن $\sqrt{2}$ مطرح شد، خوب است تقریبی که با روشی مثل مثلث خیام-پاسکال برای تقریب زدن $\sqrt{2}$ در دهه ۱۹۹۰ میلادی کشف شد را نیز ذکر کنیم. برد دنباله $\{a_n\} = \{\sqrt{2}^n\}$ برابر

$$\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, \dots\}$$

است. همه اعداد بجز $\sqrt{2}$ کاملاً شناخته شده هستند. به کمک ضرایب شناخته شده موجود در دنباله $\{a_n\}$ ، دنباله $\{b_n\}$ را به این صورت بسازید که $\{b_n\} = \{1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots\}$. اکنون دنباله جدید $c_{i,j}$ را به صورت زیر با روندی شبیه مثلث خیام-پاسکال (البته به شکل وارونه) از روی دنباله $\{b_n\}$ بسازید.

$c_{0,n} = b_n$	۱	۱	۲	۲	۴	۴	۸	۸
$c_{1,n} = c_{0,n} + c_{0,n+1}$		۲	۳	۴	۶	۸	۱۲	۱۶
$c_{2,n} = c_{1,n} + c_{1,n+1}$			۵	۷	۱۰	۱۴	۲۰	۲۸
$c_{3,n} = c_{2,n} + c_{2,n+1}$				۱۲	۱۷	۲۴	۳۴	۴۸
$c_{4,n} = c_{3,n} + c_{3,n+1}$					۲۹	۴۱	۵۸	۸۲
$c_{5,n} = c_{4,n} + c_{4,n+1}$						۷۰	۹۹	۱۴۰
$c_{6,n} = c_{5,n} + c_{5,n+1}$							۱۶۹	۲۳۹

نتیجه شگفت‌آوری که ظاهراً اولین بار در دهه ۱۹۹۰ میلادی به آن پی بردند این است که دنباله $\{c_{n,1}/c_{n,0}\}$ به نظر می‌آید که به $\sqrt{2}$ همگرا است. به عنوان مثال توجه دارید با توجه به اعدادی از دنباله $\{c_{i,j}\}$ که در بالا نمایش داده‌ایم،

$$\left\{\frac{c_{n,1}}{c_{n,0}}\right\} = \left\{1, 1/5, 1/4, 1/41667, 1/413793, 1/414286, 1/414201, \dots\right\}$$

اثبات این موضوع البته در سال ۱۹۹۵ و با استفاده‌ای هوشمندانه از قانون اعداد بزرگ در آمار انجام شد. جزئیات اثبات خارج از حوصله متن است. در واقع [۲۳] نشان داد که هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \alpha$ و بعلاوه دنباله $\{c_{i,j}\}$ به این صورت باشد که $c_{0,n} = b_n$ و $c_{k+1,n} = c_{k,n} + c_{k,n+1}$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n,1}}{c_{n,0}} = \alpha$.

۱۴. اثبات ۱۸: ماهیت اعداد کسری و مخلوط

شاید یکی از ساده‌ترین اثبات‌های گنگ بودن ریشه دوم اعداد طبیعی که در آن از هیچ واقعیت دیگری بجز خواص اعداد کسری استفاده نشده است، اثباتی باشد که در کتاب «اعداد» کانوی و همکارانش ارائه شده است [۲۴، صفحه ۱۸۴]. به برهان خلف فرض کنید به ازای عدد طبیعی N ریشه دوم N عددی طبیعی نباشد ولی گویا باشد و به صورت a/b باشد که a و b تا حد ممکن ساده شده‌اند. در این صورت $N = a/b \times a/b$ و لذا

$$(5) \quad N \times \frac{b}{a} = \frac{a}{b}.$$

چون a/b طبیعی نیست، پس می‌توان a/b و $(Nb)/a$ را به صورت اعداد مخلوط $c\frac{d}{b}$ و $e\frac{f}{a}$ نوشت که $d < b$ و $f < a$. اما در این صورت با توجه به تساوی مذکور در ۵ داریم $c = e$ و $d/b = f/a$. بخصوص $a/b = f/d$ که با فرض اینکه a/b کسری است که تا آخرین حد ساده شده است در تناقض است. پس $\sqrt{N}$ نه طبیعی و نه گویا است. روش جالب دیگری که اثبات را بعد از تساوی ۵ می‌توان ادامه داد به این صورت است که وقتی دو کسر با هم مساوی هستند و یکی از آنها تا حد ممکن ساده شده است، کسر دیگر از ضرب صورت و مخرج کسر اول در عدد طبیعی ثابتی مثل m بدست می‌آید. پس با توجه به تساوی ۵ عددی مثل m وجود دارد که $(Nb)/a = (ma)/(mb)$ و $a = mb$ و $Nb = ma$. لذا $a/b = m$ و $N/m = a/b$ پس $\sqrt{N} = a/b = m$ که با فرض اینکه $\sqrt{N}$ عددی طبیعی نیست در تناقض است. پس اگر $\sqrt{N}$ طبیعی نباشد، گویا هم نخواهد بود [۲۵].

۱۵. اثبات ۱۹: بسط دوجمله‌ای

اگر به برهان خلف $\sqrt{2}$ گویا باشد و مثلاً به ازای دو عدد طبیعی a و b داشته باشیم $\sqrt{2} = a/b$ ، آنگاه به ازای هر n طبیعی $b\sqrt{2}^n$ عددی طبیعی خواهد بود. زیرا

$$b\sqrt{3}^n = \begin{cases} 2^{n/2}b & n \text{ زوج باشد} \\ 2^{(n-1)/2}a & n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

لذا با توجه به بسط دوجمله‌ای به ازای هر n طبیعی

$$0 < b(\sqrt{2} - 1)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b\sqrt{2}^k (-1)^{n-k} \in \mathbb{N}$$

که خلاف این واقعیت است که $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - 1)^n = 0$. پس فرض خلف باطل است و $\sqrt{2}$ ناگویا است. بوضوح می‌توان این استدلال را برای ناگویا بودن ریشه دوم هر عدد طبیعی که مربع کامل نیست به کار برد [۲۶].

۱۶. اثبات ۲۰: استفاده از قضیه بزو

مجدداً به برهان خلف فرض کنید عدد طبیعی N مربع کامل نباشد و به ازای دو عدد طبیعی نسبت به هم اول a و b ، $\sqrt{N} = a/b$. لذا $\sqrt{N}b = a \in \mathbb{N}$ و $\sqrt{N}a = \sqrt{N}\sqrt{N}b = Nb \in \mathbb{N}$. اما چون a و b نسبت به هم اول هستند، پس با توجه به قضیه بزو اعداد صحیح r و s وجود دارند که $ra + sb = 1$. لذا

$$\sqrt{N} = \sqrt{N}(ra + sb) = r(\sqrt{N}a) + s(\sqrt{N}b) \in \mathbb{N}$$

که با این فرض که N مربع کامل نیست در تناقض است. ایده مشابه را برای ریشه سوم هر عددی که مکعب کامل نیست می‌توان به کار برد [۲۷].

۱۷. اثبات ۲۱: استفاده از کسرهای مسلسل

یکی از روش‌های نمایش اعداد حقیقی، استفاده از کسرهای مسلسل است. به نظر عده‌ای حتی کسرهای مسلسل به لحاظ ریاضی خیلی طبیعی‌تر از نمایش دهمی اعداد حقیقی هستند و بعضاً توصیف‌های مفید و منظمی از یک عدد حقیقی ارائه می‌دهند.

برای نمایش کسر مسلسل یک عدد گویا براحتی می‌توان با استفاده از الگوریتم اقلیدس برای یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (روش نردبانی)، این کار را انجام داد. مثلاً برای کسر مسلسل $95/37$ با توجه به الگوریتم اقلیدس داریم

	۲	۱	۱	۳	
۹۵	۳۷	۲۱	۱۶	۵	۱
۷۴	۲۱	۱۶	۱۵		

در واقع

$$\frac{95}{37} = 2 + \frac{21}{37}, \frac{37}{21} = 1 + \frac{16}{21}, \frac{21}{16} = 1 + \frac{5}{16}, \frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5}$$

لذا در نهایت خواهیم داشت:

$$\frac{95}{37} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}}}$$

اما در مورد $\sqrt{2}$ با توجه به اینکه $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ، با جایگذاری $1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ بجای $\sqrt{2}$ مشخص شده داریم

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

و با ادامه دادن این جایگذاری خواهیم داشت

$$(۶) \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

اکنون یک استدلال ساده (و نه خیلی دقیق) برای ناگویا بودن $\sqrt{2}$ از روی تعریف اعداد گویا می‌توان ارائه کرد. یک عدد گویا است اگر بتوان آن را به صورت ضربی از تقسیم واحد به چند قسمت کوچکتر مشخص بیان کرد (a/b برابر است با a تا $1/b$). با توجه به رابطه ۶، چون هیچ تقسیم مشخصی از واحد به قسمت‌های کوچکتر نمی‌توان یافت که $\sqrt{2}$ به کمک آن قابل بیان باشد، پس $\sqrt{2}$ ناگویا است. اثبات دقیق‌تر ناگویا بودن کسرهای مسلسل نامتناهی ساده را می‌توانید به عنوان مثال در [۲۸، صفحه ۸] ببینید.

۱۸. اثبات ۲۲: اثبات به کمک جوابهای یک معادله بازگشتی

معادله بازگشتی $x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n$ را که $n \in \mathbb{Z}$ و $n \geq 0$ در نظر بگیرید. معادله مشخصه این معادله عبارت است از $m^2 + 2m - 1 = 0$ که ریشه‌های آن عبارتند از $r_1 = -1 + \sqrt{2}$ و $r_2 = -(1 + \sqrt{2})$. لذا جواب عمومی این معادله عبارت است از

$$(۷) \quad x_n = c(-1 + \sqrt{2})^n - d(1 + \sqrt{2})^n$$

اکنون اگر به برهان خلف فرض کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد، آنگاه کوچکترین اعداد طبیعی p و q را می‌توان بطوری یافت که $p/q = -1 + \sqrt{2}$. با قرار دادن $c = q$ و $d = 0$ در ۷ داریم

$$x_0 = q, \quad x_1 = q(p/q) = p, \quad x_2 = q(p/q)^2 = p^2/q$$

اما با توجه به اینکه p و q کوچکترین اعداد ممکن انتخاب شده بودند، لذا نسبت به هم اول هستند و مشابهاً p^2 و q نیز نسبت به هم اول هستند که نشان می‌دهد x_2 یک عدد گویای ناصحیح است در حالی که با توجه به ضابطه معادله بازگشتی، و مقادیر x_0 و x_1 ، $x_2 = -2p + q$ عددی صحیح است. پس فرض خلف باطل و $\sqrt{2}$ گویا نیست. اثبات مشابه دیگر را می‌توانید در [۲۹] ببینید.

۱۹. اثبات ۲۳: یک اثبات شهودی

در همه اثبات‌های قبلی (بجز اثبات مبتنی بر استفاده از کسرهای مسلسل) بنوعی از برهان خلف استفاده شده است که در ریاضیات شهودگرایانه پذیرفته نیست. در واقع حتی در اثبات مبتنی بر کسرهای مسلسل نیز، اثبات دقیقی که به آن ارجاع شد مبتنی بر برهان خلف می‌باشد. البته شاید مهمترین دلیل این موضوع به تعریف اعداد ناگویا برمی‌گردد، که فقط به لحاظ

وجه سلبی تعریف شده‌اند (عددی ناگویا یا گنگ است که گویا نباشد) و هیچ وجه ایجابی برای تعریف آنها تابحال ارائه نشده است.

در اثبات حاضر، علی‌رغم تعریف اعداد ناگویا مبتنی بر وجه سلبی، بدون استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم $\sqrt{2}$ گویا نیست. به ازای هر عدد گویای a/b ، عدد طبیعی $2b^2$ بر توانی فرد از ۲ بخش پذیر است (اگر b زوج باشد b^2 بر توانی زوج از ۲ بخش پذیر است و لذا $2b^2$ بر توانی فرد از ۲ بخش پذیر است و اگر b فرد باشد بوضوح $2b^2$ فقط بر خود ۲ که توانی فرد از ۲ است بخش پذیر می‌باشد). از طرفی استدلال مشابه نشان می‌دهد که a^2 فقط بر توان‌های زوج ۲ بخش پذیر است. پس با توجه به صحیح بودن اعداد a و b همواره داریم $|2b^2 - a^2| \geq 1$. اکنون با توجه به اینکه $1/5 < \sqrt{2} < 1$ ، لذا به ازای هر عدد گویای $a/b < 1/5$ داریم $a/b + \sqrt{2} < 3$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{2} - \frac{a}{b} \right| &= \left| \sqrt{2} - \frac{a}{b} \right| \frac{\sqrt{2} + \frac{a}{b}}{\sqrt{2} + \frac{a}{b}} \\ &= \frac{|2b^2 - a^2|}{b^2(\sqrt{2} + \frac{a}{b})} \\ &\geq \frac{1}{b^2(\sqrt{2} + \frac{a}{b})} \\ &\geq \frac{1}{3b^2} \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد هیچ عدد گویای $a/b < 1/5$ برابر $\sqrt{2}$ نیست [۳۰].
اثبات فوق علاوه بر مشخص کردن اینکه $\sqrt{2}$ گویا نمی‌باشد، ساختار پارادکس گونه اعداد ناگویا را هم نشان می‌دهد. در واقع با توجه به اثبات فوق، اگر بخواهیم بازه اعداد حقیقی $(0, 1/5)$ را با بازه‌های

$$\left\{ \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{3b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{3b^2} \right) : \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/5) \right\}$$

پوشش دهیم، گرچه $\mathbb{Q} \cap (0, 1/5)$ در $(0, 1/5)$ چگال است و لذا تمام اعداد گویای بازه $(0, 1/5)$ توسط بازه‌های فوق پوشیده می‌شوند، ولی باز هم $\sqrt{2}$ توسط بازه‌های فوق پوشیده نمی‌شود.

۲۰. اثبات ۲۴: استفاده از مفهوم ابرضرب و قضیه واش

اثبات حاضر کمی نسبت به اثبات‌های قبلی پیچیده‌تر است و در آن از قضایایی در ریاضیات پیشرفته نظیر قانون تقابل مربعی (در نظریه اعداد) و قضیه واش (در منطق ریاضی و نظریه مدل) استفاده شده است. ما برای اینکه مجموعه اثبات‌ها به لحاظ به‌کاگیری شاخه‌های مختلف ریاضیات کامل‌تر شوند این اثبات را آورده‌ایم.

ابتدا نشان می‌دهیم معادله همنهشتی $x^2 \stackrel{p}{\equiv} 2$ برای نامتناهی عدد اول p دارای جواب نیست. برای این منظور از قانون تقابل مربعی استفاده می‌کنیم. به یاد بیاورید که به ازای عدد اول فرد p و عدد صحیح a ، نماد لژاندر در نظریه اعداد به صورت زیر تعریف می‌شد:

$$\left(\frac{a}{p} \right) = \begin{cases} 1 & \text{و معادله } x^2 \stackrel{p}{\equiv} a \text{ جواب داشته باشد} \\ -1 & \text{و معادله } x^2 \stackrel{p}{\equiv} a \text{ جواب نداشته باشد} \\ 0 & a \stackrel{p}{\equiv} 0, \end{cases}$$

و قانون تقابل مربعی برای اعداد اول متمایز p و q به این صورت بود که

$$\begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4} \\ \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \\ \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8} \end{cases}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم معادله همنهشتی $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ برای کدام اعداد اول p دارای جواب نیست، و یا معادلاً با توجه به نماد لژاندر می‌خواهیم بدانیم به ازای کدام اعداد اول مانند p ، $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$. لذا با توجه به سطر سوم قانون تقابل مربعی، به دنبال اعداد اول p ای هستیم که $-1 = (-1)^{(p^2-1)/8}$ که براحتی می‌توان دید همه اعداد اول به صورت $p = 8k \pm 3$ این شرط را برآورده می‌سازند. بعلاوه بینهایت عدد اول به این شکل وجود دارد.

پس اگر قرار دهیم $\{p\}$ اول است و معادله همنهشتی $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ دارای جواب نیست: $\mathcal{P} = \{p\}$ ، آنگاه به ازای هر $p \in \mathcal{P}$ ، معادله $x^2 = 2$ در میدان متناهی $\mathbb{Z}_p$ دارای جواب نیست. اکنون به کمک $\{\mathbb{Z}_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ میدانی مثل $\mathbb{F}$ می‌سازیم که توسیعی از $\mathbb{Q}$ است و معادله $x^2 = 2$ در آن فاقد جواب است و این به این معنی است که $x^2 = 2$ در $\mathbb{Q}$ نیز جواب ندارد. برای ساختن میدان $\mathbb{F}$ از تکنیک ابر ضرب استفاده می‌کنیم. فرض کنید D یک ابرفیلتر روی مجموعه $\mathcal{P}$ باشد و فرض کنید رابطه هم‌ارزی $\equiv$ روی عناصر $\mathbb{Z}_p$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\bar{x} \equiv \bar{y} \leftrightarrow \{i \in \mathcal{P} : x_i = y_i\} \in D$$

اکنون اگر $[\bar{x}]_D$ کلاس هم‌ارزی عنصر $\bar{x}$ تحت $\equiv$ باشد، ابرضرب خانواده $\{\mathbb{Z}_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ تحت ابرفیلتر D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{F} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p / D = \{[\bar{x}]_D : \bar{x} \in \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p\}$$

با توجه به قضیه واش در نظریه مدل، ابرضرب حافظ گزاره‌های مرتبه اول است. در واقع با توجه به ساختار ابرضرب، هر گزاره‌ای که تقریباً در همه p ‌های متعلق به $\mathcal{P}$ درست باشد، آن گزاره در $\mathbb{F}$ نیز درست خواهد بود. لذا اولاً $\mathbb{F}$ یک میدان است. زیرا گزاره‌های معرف میدان همگی از نوع مرتبه اول بوده و در همه $\mathbb{Z}_p$ ‌ها درست‌اند. ثانیاً چون به ازای هر $p \in \mathcal{P}$ گزاره $\neg \exists x x^2 = 2$ در $\mathbb{Z}_p$ درست است، این گزاره در $\mathbb{F}$ نیز درست خواهد بود. ثالثاً چون به ازای هر $p \in \mathcal{P}$ فقط خود $\mathbb{Z}_p$ از مشخصه p است، پس گزاره $\neg \exists x px = 1$ در هر $\mathbb{Z}_q$ که $q \in \mathcal{P}$ و $q \neq p$ درست است. به عبارت دیگر به ازای هر $p \in \mathcal{P}$ گزاره $\neg \exists x px = 1$ در $\mathbb{F}$ درست است که به این معنی است که $\mathbb{F}$ از مشخصه صفر است. پس $\mathbb{F}$ توسیعی از $\mathbb{Q}$ است که به دنبال آن بودیم و کار تمام است.

۲۱. مطلب پایانی

با توجه به تنوع اثبات‌ها، سعی کردیم در انتخاب اثبات‌ها، آنهایی را برگزینیم که شباهت کمتری به هم دارند. بیشتر اثبات‌ها را با کمک گرفتن از مجله ریاضی ماهیانه انجمن ریاضی آمریکا نوشته‌ایم. اثبات ۲۴ که ظاهراً در جای دیگری ارائه نشده است، توسط نویسنده اول صورت‌بندی شده است [۳۱]. در عین حال سایت [۳۲] نیز که دارای بروز رسانی‌های مداومی هست و مجموعه نسبتاً کاملی از اثبات‌ها را کنار هم گردآورده است، خیلی به ما کمک کرد. در انتها از داوران محترم مجله که باعث بهبود مقاله شدند تشکر می‌کنیم.

مراجع

- [۱] س. شهشاهی، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ۱، ویراست دوم، انتشارات فاطمی، (۱۳۸۸).
- [2] K. V. Fritz, The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, *Ann. of Math.*, Second Series, **46** (1945) 242–264.
- [3] Aristotle (Translator : R. Smith), *Prior Analytics*, Hackett Publishing Company, (1989).
- [4] B. L. Van Der Waerden, *Science Awakening I*, Springer Netherlands, (1975).
- [5] T. M. Apostol, Irrationality of the square root of two - a geometric proof, *Amer. Math. Monthly*, **107** (2000) 841–842.
- [6] O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd. edition, Brown University Press, Providence, R. I., (1957).
- [7] O. Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte/Mathematical Cuneiform Texts*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1935).
- [8] V. C. Harris, Terminal digit proof that $\sqrt{2}$ is irrational, *The Mathematical Gazette*, **53** (1969) 65.
- [9] V. C. Harris, On proofs of the irrationality of $\sqrt{2}$, *The Mathematics Teacher*, **64** (1971) 19–21.
- [10] H. Eves, The irrationality of $\sqrt{2}$, *The Mathematics Teacher*, **38** (1945) 317–318.
- [11] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th edition, Cambridge University Press, (1927).
- [12] M. V. Subbarao, A simple irrationality proof for quadratic surds, *Amer. Math. Monthly*, **75** (1968) 772–773.
- [13] E. Halfar, The irrationality of $\sqrt{2}$, *The American Mathematical Monthly*, **62** (1955) 437.
- [14] R. Dedekind (Translator: W. W. Beman), *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, (1963).
- [15] J. Conway and V. Neumann, The power of mathematics, in *Power (Darwin College Lectures)*, editors: A. Blackwell, D. MacKay, Cambridge University Press, (2005).
- [16] S. J. Miller and D. Montague, Picturing Irrationality, *Math. Mag.*, **85** (2012) 110–114.
- [17] G. Cairns, Proof without words: $\sqrt{2}$ is irrational, *Math. Mag.*, **85** (2012) 123.
- [18] J. Stillwell, *Mathematics and Its History*, 3rd edition, Springer-Verlag New York, (2010).
- [19] D. Kalman, R. Mena, S. Shahriari, S. J. Miller and D. Montague, Variations on an irrational theme-geometry, dynamics, algebra, *Math. Mag.*, **70** (1997) 93–104.
- [20] M. Laczkovich, *Conjecture and Proof*, Mathematical Association of America, (2001).
- [21] V. H. Moll, *Numbers and Functions: From a classical-experimental mathematician's point of view*, Mathematical Association of America, (2012).
- [22] F. V. Waugh and M. W. Maxfield, Side and diagonal numbers, *Math. Mag.*, **40** (1967) 74–83.
- [23] T. M. Liggett and P. Petersen, The law of large numbers and $\sqrt{2}$, *Amer. Math. Monthly*, **102** (1995) 31–35.
- [24] J. Conway and R. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag New York, (1996).
- [25] G. C. Berresford, A simpler proof of a well-known fact, *Amer. Math. Monthly*, **115** (2008) 524.
- [26] N. C. Ferreno, Yet another proof of the irrationality of $\sqrt{2}$, *Amer. Math. Monthly*, **116** (2009) 68–69.
- [27] R. W. Floyd, What else Pythagoras could have done, *Amer. Math. Monthly*, **96** (1989) 67.
- [28] D. Hensley, *Continued Fractions*, World Scientific Publishing, (2006).
- [29] J. A. C. Araujo, A difference equation leading to the irrationality of $\sqrt{2}$, *Amer. Math. Monthly*, **121** (2014) 443.
- [30] K. K. Usadi and K. Mikhail, Meaning in classical mathematics: is it at odds with intuitionism?, *Intellectica*, **56** (2011) 223–302.
- [31] S. M. A. Khatami, A model theoretic proof of the irrationality of $\sqrt{2}$, *Amer. Math. Monthly*, (submitted).
- [32] A. Bogomolny, Square root of 2 is irrational, *Cut the Knot*, (1996–2018).

سید محمد امین خاتمی

بیرجند، دانشگاه صنعتی بیرجند، گروه علوم کامپیوتر

khatami@birjandut.ac.ir

سید محمد امین خاتمی متولد بیرجند (۱۳۵۷) و دانش‌آموخته سال ۱۳۹۴ دکتری منطق ریاضی از دانشگاه صنعتی امیرکبیر تحت راهنمایی مسعود پورمهدیان می‌باشد و از سال ۱۳۹۴ عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی بیرجند است. نظریه مدل منطق پیوسته و منطق فازی و منطق کلاسیک، نظریه مجموعه‌ها، تاریخ و فلسفه ریاضی از علایق پژوهشی آقای خاتمی هستند. وی قبل از پیوستن به کادر هیات علمی دانشگاه صنعتی بیرجند، ۵ سال به عنوان دبیر ریاضی در شهرستان بیرجند مشغول به تدریس بوده است.



قاسم خاکشور

بیرجند، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، آموزشکده فنی و حرفه‌ای دختران بیرجند، گروه علوم پایه

ghkhakshoor@gmail.com

قاسم خاکشور متولد بیرجند (۱۳۵۳) است. وی فارغ‌التحصیل کارشناسی ریاضی محض دانشگاه بیرجند (۱۳۷۶) و فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد هندسه جبری (۱۳۷۹) دانشگاه صنعتی امیرکبیر است و در حال حاضر عضو هیات علمی دانشگاه فنی و حرفه‌ای (پردیس دختران بیرجند) می‌باشد. او سابق بر این، به مدت ۲۰ سال به عنوان دبیر ریاضی در شهرستان بیرجند مشغول به تدریس بوده است و به همراه آقای خاتمی جزو موءسسین انجمن علمی آموزشی معلمین ریاضی خراسان جنوبی بوده‌اند.

