

انتخاب بهینه سبد سهام بر مبنای ریسک‌های گوناگون

سید مرتضی امینی، ساجده جوادی و مجید سلیمانی دامنه*

چکیده. چگونگی تخصیص سرمایه در بین موقعیت‌های سرمایه‌گذاری در بازار سهام، که به آن انتخاب بهینه سبد سهام گفته می‌شود، یکی از زمینه‌های مورد توجه در اقتصاد ریاضی و مدیریت مالی و یک مساله مورد علاقه سرمایه‌گذاران است. در دهه‌های اخیر، فرمول‌بندی این مساله در قالب مدل‌های بهینه‌سازی و تحلیل آن با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی توسط محققین متعددی انجام شده است. چگونگی تعریف و اندازه‌گیری ریسک نقشی کلیدی در این مساله دارد و می‌تواند منجر به سبدهای سهام بهینه گوناگونی شود. در این نوشتار، با در نظر گرفتن معیارهای مختلف برای اندازه‌گیری ریسک، شامل واریانس (ریسک l_2)، ریسک احتمالی و ریسک l_∞ ، مدل‌های متفاوتی را برای انتخاب بهینه سبد سهام از نگاه نظری و عددی بررسی می‌کنیم. دو نمونه از مدل‌های بهینه‌سازی مین‌ماکس و ماکس‌مین را مورد کنکاش قرار می‌دهیم. مدل‌های معرفی شده را برای تحلیل داده‌هایی از بازار بورس تهران استفاده کرده و نتایج را با هم مقایسه می‌کنیم.

۱. مقدمه

نحوه تخصیص سرمایه در بین موقعیت‌های مختلف قابل سرمایه‌گذاری (در بازار بورس) یک مساله کلیدی است. سرمایه‌گذار در انتخاب بهینه سبد سهام، به دنبال بیشینه‌کردن بازده مورد انتظار و در عین حال کمینه‌کردن ریسک است. مدل‌های انتخاب سبد سهام، با توجه به نحوه تعریف و اندازه‌گیری ریسک، چنین هدفی را دنبال می‌کنند. مارکویتز^۱ (دارنده نوبل اقتصاد، ۱۹۹۰)، با معرفی مدل میانگین-واریانس^۲ در سال ۱۹۵۲ نخستین گام را در استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی برای انتخاب بهینه سبد سهام برداشت. در این مدل از واریانس بازده سبد سهام به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک (تابع ریسک l_2) استفاده می‌شود. در دهه‌های اخیر، معیارهای گوناگونی برای اندازه‌گیری ریسک، با هدف برطرف کردن برخی ایرادهای مدل مارکویتز، تعریف و به کار گرفته شده‌اند. از آن جمله، می‌توان به ریسک l_1 ، ریسک احتمالی و ریسک l_∞ اشاره کرد. می‌توان به مدل‌های انتخاب بهینه سبد سهام از منظر یک مساله بهینه‌سازی دوهدفه پرداخت که در آن حداکثر ریسک و قرینه بازده مورد انتظار کمینه می‌شوند. دو مدل مین‌ماکس^۳ و ماکس‌مین^۴ مدل‌های پرکاربردی در این زمینه هستند. هم‌چنین شیوه‌های مختلفی برای حل مساله بهینه‌سازی دوهدفه حاصل به کار رفته است.

عبارات و کلمات کلیدی. انتخاب بهینه سبد سهام، مدل میانگین-واریانس، مدل مین‌ماکس، ریسک، بازده، مرز کارا، بهینه‌سازی دوهدفه. دبیرتخصصی رابط: مجید فخار

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۸/۱۳

DOI: <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2019.118340.1332>

^۱Markowitz ^۲mean-variance model ^۳minimax model ^۴maxmin model

در این مقاله، ضمن بررسی نظری و تحلیلی مدل‌های ذکر شده در بالا، با استفاده از داده‌های واقعی بازار بورس تهران مرز کارا ترسیم و تحلیل شده و نتیجه مدل‌های گوناگون با یکدیگر مقایسه شده‌اند. انتخاب بهینه سبد سهام با استفاده از ریسک‌های l_2 ، احتمالی و l_∞ به ترتیب در بخش‌های دوم تا چهارم ارائه شده‌اند. در هر بخش، مثالی از تحلیل داده‌های بورس تهران برای روشن‌سازی شیوه به کارگیری هر روش آورده شده است. مقایسه مدل‌ها و جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از مطالب بیان شده، بخش آخر این مقاله است.

۲. انتخاب بهینه سبد سهام با استفاده از ریسک l_2 (مدل میانگین-واریانس مارکوویتز)

فرض کنید یک سرمایه‌گذار دارای سرمایه اولیه $M_0 > 0$ است و قصد دارد در N موقعیت سرمایه‌گذاری احتمالا مخاطره‌آمیز s_j ، $j = 1, \dots, N$ ، سرمایه‌گذاری کند. x_j ، کسری از سرمایه اولیه در نظر گرفته می‌شود که قرار است در موقعیت s_j سرمایه‌گذاری شود. داریم $\sum_{j=1}^N x_j = 1$. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که فروش استقراضی از محل موقعیت‌های مخاطره‌آمیز مجاز نباشد. به عبارتی دیگر، $x_j \geq 0$ برای هر $j = 1, 2, \dots, N$. فرض کنید متغیر تصادفی R_j با امید ریاضی r_j بیانگر بازده موقعیت s_j است. بازده مورد انتظار برای سبد سهام $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ به صورت زیر است:

$$r(x_1, x_2, \dots, x_N) := E\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j\right) = \sum_{j=1}^N E(R_j) x_j = \sum_{j=1}^N r_j x_j.$$

مارکوویتز [۴] در مدلی که امروزه تحت عنوان مدل «میانگین-واریانس» (مدل $M - V$) شناخته می‌شود، از واریانس بازده سبد سهام به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک استفاده کرده است. این تابع را تابع ریسک l_2 می‌نامیم.

تعریف ۱.۲. [۴] تابع ریسک l_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_2(x_1, x_2, \dots, x_N) := E\left(\left[\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right]^2\right).$$

مسئله انتخاب بهینه سبد سهام به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & w_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^N r_j x_j \geq \rho, \\ & \sum_{j=1}^N x_j = 1, \\ & 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن اسکالر داده شده‌ی $\rho > 0$ نشان دهنده حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار است. اسکالر u_j حداکثر کسری از سرمایه است که می‌توان در موقعیت s_j سرمایه‌گذاری کرد.

نکته ۱. اگر $R_1, R_2, \dots, R_N$ متغیرهایی تصادفی باشند، آنگاه $\sum_{j=1}^N R_j x_j$ نیز یک متغیر تصادفی است و

$$\begin{aligned} w_2(x_1, x_2, \dots, x_N) &= \text{var}\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j\right) = \sum_{j=1}^N x_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} x_i x_j \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

که σ_j^2 ، واریانس متغیر تصادفی R_j است و σ_{ij} کواریانس بین دو متغیر تصادفی R_i و R_j می‌باشد.

با توجه به نکته بالا، مساله (۱) معادل است با

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^N r_j x_j \geq \rho, \\ & \sum_{j=1}^N x_j = 1, \\ & 0 \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

که یک مساله درجه دوم می‌باشد. مدل شناخته شده بالا، رویکرد یک سرمایه‌گذار ریسک‌گریز را دنبال می‌کند (منظور از سرمایه‌گذار ریسک‌گریز در اینجا، فردی است که ترجیح می‌دهد انحراف معیار بازده سبد سهام انتخابی او کم باشد).

۱.۲. مرز کارا. برای (r_i, σ_{ij}) با $i, j = 1, 2, \dots, N$ و بردار نامنفی $x \in \mathbb{R}^N$ ثابت داده شده، اسکالره‌های M و V را به صورت

$$M := \sum_{i=1}^N r_i x_i, \quad V := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

تعریف می‌کنیم. با تغییر x ، بردار (M, V) تغییر می‌کند. مجموعه این (M, V) ها را ترکیبات ممکن (شدنی) سهام می‌نامیم. مدل میانگین- واریانس $(M - V)$ بیان می‌کند که سرمایه‌گذار به دنبال سبد سهام متناظر با یک ترکیب (M, V) کارا است. به عبارتی دیگر، به دنبال ترکیباتی است که برای بازده داده شده (یا حتی بیش‌تر از آن)، حداقل واریانس را دارند یا برای واریانس داده شده (یا حتی کم‌تر از آن)، حداکثر بازده را دارند. مارکوویتز به دلیل عدم آشنایی با بهینه‌سازی دوهدفه، به کمک ترکیبات (M, V) کارا، مرز کارا را به صورت هندسی ترسیم کرد. رویکرد هندسی برای رسم مرز کارا فقط برای مواردی کارساز است که تعداد موقعیت‌های سرمایه‌گذاری کم باشد، زیرا رسم هندسی مرز کارا با بررسی همه حالت‌های ممکن صورت می‌گیرد (مرجع [۱] را ببینید). این موضوع از جمله ایرادات ترسیم مرز کارا به صورت هندسی می‌باشد. تعریف زیر جواب کارا و مرز کارا را به طور دقیق معرفی می‌نماید.

تعریف ۲.۲. [۲] مساله بهینه‌سازی چند هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in S. \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $f_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ برای $j = 1, 2, \dots, p$ توابع هدف هستند و $S \subset \mathbb{R}^n$ ناحیه شدنی است. بردار $\bar{x} \in S$ را یک **نقطه کارا**^۵ یا **بهینه پارتو**^۶ برای مساله (۳) می‌نامیم هرگاه برداری مانند $x \in S$ وجود نداشته باشد که $f_j(x) \leq f_j(\bar{x})$ برای هر j و $f_j(x) < f_j(\bar{x})$ برای برخی j . تصویر مجموعه جواب‌های کارای یک مساله بهینه‌سازی چند هدفه را مرز کارای آن مساله می‌نامند.

نکته ۲. به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار به تنهایی پذیرفتنی نیست، زیرا در نظر نگرفتن ریسک سبد با وجود بازدهی بالا می‌تواند منجر به نتایج (سبدهایی) نامطلوب شود. از طرف دیگر، در نظر گرفتن بازده به تنهایی، متنوع بودن سبد سهام را تضمین نمی‌کند. مدل $M - V$ ، متنوع بودن سبد سهام را مادامی‌که تعداد موقعیت‌های سرمایه‌گذاری زیاد است، نشان می‌دهد. ممکن است یک موقعیت سرمایه‌گذاری دارای بازده بسیار بالا و واریانس کم نسبت به سایر موقعیت‌ها باشد، و منجر به یک سبد سهام غیرمتنوع با بازده بالا و واریانس پایین شود؛ اما برای یک طیف گسترده از مقادیر r_i و σ_{ij} ، مدل $M - V$ معمولاً سبدهای سهام کارای تقریباً متنوعی را می‌دهد.

نکته ۳. در بسیاری از موارد، تلاش برای به حداقل رساندن واریانس، کافی نیست. لازم است از سرمایه‌گذاری در موقعیت‌هایی که کوواریانس (معیاری برای اندازه‌گیری همبستگی) میان آن‌ها بالاست، خودداری شود. معمولاً توصیه می‌شود سرمایه‌گذار در انتخاب صنایع (موقعیت‌ها) برای سرمایه‌گذاری، تنوع طلب باشد زیرا شرکت‌های حاضر در صنایع مختلف، بویژه صنعتی که ویژگی‌های اقتصادی متفاوتی دارند، نسبت به شرکت‌های موجود در یک صنعت، همبستگی کم‌تری دارند و ریسک سبد سهام را پایین می‌آورند.

نکته ۴. [۱، ۲، ۵] اگر سرمایه‌گذار به جای استفاده از واریانس، به استفاده از انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\text{var}(R)}$ یا ضریب پراکندگی $\frac{\sigma}{\mu}$ با $\mu = E(R)$ علاقه‌مند باشد، انتخاب او همچنان در مجموعه سبد سهام کارا قرار خواهد گرفت.

نکته ۵. برخی از مهم‌ترین دلایلی که موجب ناکارآمدی مدل $M - V$ شده، به شرح زیر است [۱، ۲، ۵]:

- مدل $M - V$ منجر به یک مساله بهینه‌سازی درجه دوم می‌شود و حل این مساله‌ها در مقیاس بزرگ، از نظر محاسباتی می‌تواند بسیار پیچیده باشد.
- طراحی مساله بهینه‌سازی در مدل $M - V$ بار محاسباتی زیادی دارد، زیرا باید $\frac{N(N+1)}{2}$ ثابت σ_{ij} با توجه به داده‌های جمع‌آوری شده محاسبه شوند. اهمیت این موضوع در مواردی که تعداد موقعیت‌های سرمایه‌گذاری بسیار زیاد است، نمایان می‌شود.
- یک جواب بهینه $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$ برای مساله درجه دوم در مقیاس بزرگ، می‌تواند مولفه‌های ناصفر زیادی داشته باشد. این بدین معناست که سرمایه‌گذار باید در موقعیت‌های متفاوت بسیاری، سرمایه‌گذاری کند. این موضوع برای کارشناسان (سرمایه‌گذاران) خوشایند نیست، زیرا باید مبلغ قابل توجهی کارمزد معاملات، برای خرید تعداد زیادی سهام با مقادیر کم صرف کنند. علاوه بر این، ممکن است در عمل مجاز به سرمایه‌گذاری با مقداری کم‌تر از حداقل واحد معامله در یک موقعیت نباشند. بنابراین باید اعداد را به مضرب صحیح حداقل واحد معامله، گرد کنیم یا یک مساله درجه دوم صحیح را حل کنیم که چنین مساله‌ای نیز در مقیاس بزرگ اگر غیرقابل حل نباشد، بسیار سخت است. بنابراین مجبوریم از موقعیت‌هایی که مقدار سرمایه‌گذاری در آن‌ها کم است صرف‌نظر کنیم تا این مشکل برطرف شود؛ اما این عمل، می‌تواند منجر به انحراف سبد سهام از جواب بهینه شود.

^۵Efficient point ^۶Pareto optimal

- سرمایه‌گذاران به‌طور طبیعی خواهان سود زیاد هستند و سود کم یا در موارد خاص ضرر (سود منفی) خواسته هیچ سرمایه‌گذاری نیست. بنابراین با توجه به خواسته سرمایه‌گذار برای مثبت بودن بازده، معمولاً در عمل توزیع بازده حول میانگین متقارن نیست. لذا باید علاوه بر مولفه‌های میانگین و واریانس، چولگی توزیع را نیز در نظر بگیریم، در حالیکه در مدل $M - V$ این کار صورت نمی‌گیرد. اگر ریسک، احتمال بیش‌تر بودن اختلاف بازده کل واقعی با بازده کل مورد انتظار، از یک سطح از پیش تعیین شده، یعنی برابر

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right| \geq \xi\right)$$

باشد، این احتمال باید در حد امکان کوچک شود. با استفاده از نامساوی مارکوف^۷ داریم:

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right| \geq \xi\right) \leq \frac{1}{\xi^2} E\left(\left[\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right]^2\right).$$

پس می‌توان واریانس را، به عنوان کران بالای ریسک، کمینه کرد. در حالت کلی داریم

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right| \geq \xi\right) = P\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j \geq \sum_{j=1}^N r_j x_j + \xi\right) + P\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j \leq \sum_{j=1}^N r_j x_j - \xi\right).$$

از بین دو عبارت سمت راست تساوی بالا، $P\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j \leq \sum_{j=1}^N r_j x_j - \xi\right)$ بیانگر احتمال زیان است و می‌توان آن را به عنوان ریسک در نظر گرفت. اگر توزیع متقارن باشد، داریم:

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right| \geq \xi\right) = 2P\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j \leq \sum_{j=1}^N r_j x_j - \xi\right)$$

که نشان می‌دهد در نظر گرفتن $P\left(\left|\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right| \geq \xi\right)$ به عنوان ریسک منطقی است. در این حالت، واریانس به عنوان یک کران بالا برای احتمال گفته شده می‌تواند معیار مناسبی برای ریسک باشد. برای یک توزیع چوله به راست، داریم

$$P\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j \geq \sum_{j=1}^N r_j x_j + \xi\right) > P\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j \leq \sum_{j=1}^N r_j x_j - \xi\right),$$

و بنابراین،

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} E\left(\left[\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right]^2\right) &\geq P\left(\left|\sum_{j=1}^N R_j x_j - \sum_{j=1}^N r_j x_j\right| \geq \xi\right) \\ &> 2P\left(\sum_{j=1}^N R_j x_j \leq \sum_{j=1}^N r_j x_j - \xi\right) \end{aligned}$$

لذا واریانس می‌تواند یک کران بالای نسبتاً دور از معیار ریسک (زیان) باشد. بنابراین، در صورت نامتقارن بودن توزیع (تغییرات) بازده، واریانس نمی‌تواند معیار چندان مناسبی برای ریسک باشد.

⁷Markov inequality

• مدل $M - V$ تحت فرض نرمال بودن توزیع بازده نتایج مناسبی تولید می‌کند؛ ولی داده‌های تجربی حاکی از آن است که توزیع نرمال مدل مناسبی برای توزیع بازده نیست. امروزه از توزیع‌های نامتقارن و دم‌سنگین برای این کار استفاده می‌شود.

۲.۲. تحلیل و رسم مرز کارا برای داده‌های بورس تهران. همان‌طور که بیان شد ترسیم مرز کارا با استفاده از رویکرد ساختاری (هندسی) مارکوویتز کار آسانی نیست [۱]. با لحاظ کردن بهینه‌سازی چند هدفه، برای بدست آوردن مرز کارا کافی است مساله دوهدفه

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j, - \sum_{j=1}^N r_j x_j \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^N x_j = 1, \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

را حل کنیم.

در این بخش، با در نظر گرفتن داده‌هایی از سایت «بورس اوراق بهادار تهران»^۸ مرز کارای مدل $M - V$ را با استفاده از دستور زیر در متلب محاسبه نموده و مورد تحلیل قرار داده‌ایم:

$$\text{portopt}(\text{Return}, \text{Covariance}, k)$$

در دستور بالا *Return* و *Covariance* به ترتیب بردار بازده و ماتریس کوواریانس-واریانس هستند که از کاربر گرفته می‌شوند (از داده‌ها استخراج و در اختیار دستور بالا قرار داده می‌شوند). عدد k تعداد نقاط کارایی است که برای رسم مرز کارا تولید می‌شوند.

مثال ۳.۲. ۱۰ موقعیت سرمایه‌گذاری از بازار بورس تهران را به دلخواه انتخاب کرده ایم. قیمت پایانی سهام موقعیت‌های مذکور در بازه‌های زمانی سه ماهه به مدت ۵ سال (فروردین ۱۳۹۳ تا مهر ۱۳۹۷) در نظر گرفته شده است. برای استفاده از این داده‌ها، تغییرات نسبی قیمت‌های پایانی را محاسبه می‌کنیم. به طور مثال، اگر قیمت پایانی یک موقعیت در یک ماه، P و در سه ماه بعد قیمت پایانی همان موقعیت، $\hat{P}$ باشد، تغییر نسبی به صورت $\frac{\hat{P}-P}{P}$ محاسبه می‌شود. تغییرات نسبی مربوط به این داده‌ها در جدول ۱ آمده است. میانگین و انحراف معیار این تغییرات نسبی و کوواریانس بین آن‌ها به ترتیب در جدول‌های ۲ و ۳ نمایش داده شده‌اند.

مرز کارای حاصل به صورت نمایش داده شده در شکل ۱ است. در این جا k را برابر ۲۰ در نظر گرفته ایم. به عنوان مثال، نقطه A در شکل ۱ را در نظر بگیرید. هیچ سبد سهام شدنی وجود ندارد که بازده آن از بازده نقطه A بزرگ‌تر یا مساوی باشد و در عین حال ریسک آن از ریسک این نقطه کمتر باشد. ولی برای نقطه B موضوع متفاوت است و سبدهای سهام متعددی وجود دارند که بازده‌های آن‌ها از بازده B بیش‌تر و ریسک آن‌ها از ریسک B کم‌تر است. اکنون با لحاظ کردن این نکته که مدل مارکوویتز یک مساله بهینه‌سازی درجه دوم است (مساله (۲) را ببینید)، با در نظر گرفتن حداقل بازده‌های مورد انتظار متفاوت، ریسک و درصد تخصیص یافته به هر یک از موقعیت‌های سرمایه‌گذاری را بدست می‌آوریم. بدین منظور، از دستور

$$x = \text{quadprog}(H, \circ, -A, -b, Aeq, beq, lb, ub)$$

^۸<http://www.tse.ir>

در متلب بهره می‌گیریم که در آن H ماتریس کوواریانس- واریانس، A بردار بازده، b حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار، Aeq برداری N تایی با مولفه‌های ۱ و beq اسکالر برابر ۱ می‌باشند. به علاوه، lb و ub به ترتیب کران‌های پایین و بالا برای میزان تخصیص به هر یک از موقعیت‌های سرمایه‌گذاری می‌باشند. در این‌جا، کران بالای میزان تخصیص به هر یک از موقعیت‌ها را ۱ و کران پایین آنها را صفر در نظر گرفته‌ایم. پارامتر بین H و A مربوط به قسمت خطی تابع هدف مساله درجه دوم است که در این‌جا بردار N تایی صفر می‌باشد. جدول ۴ نتایج حاصل را برای حداقل بازده‌های مورد انتظار مختلف نشان می‌دهد. برای در نظر گرفتن حداقل بازده‌های مورد انتظار مختلف، بازه‌ای را که دو سر آن مقادیر گردشده می‌نیم و ماکزیمم میانگین بازده‌های مثبت (مستخرج از جدول ۲) هستند، را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و اعداد ۰/۰۴۹، ۰/۰۵۸، ... و ۰/۱۳۰ را بدست آورده‌ایم.

اکثر سبدهایی که در جدول ۴ دیده می‌شوند، نسبتاً متنوع هستند ولی سهم بعضی از شرکت‌ها چندان بزرگ نیست. به علاوه، x_j متناظر با شرکت‌هایی که میانگین بازده آن‌ها منفی است، صفر است (به جز مواردی بسیار استثنایی که x_j متناظرشان بسیار نزدیک به صفر است). ماکزیمم بازده متوسط، متناظر با "فیبر ایران" است؛ و ملاحظه می‌شود که با افزایش بازده مورد انتظار، سهم این شرکت در سبد بهینه سهام رشد می‌کند. نکته دیگری که اهمیت دارد، این است که با افزایش بازده مورد انتظار، ریسک سرمایه‌گذاری نیز در حال افزایش است.

جدول ۱: تغییرات نسبی قیمت پایانی سهام موقعیت‌ها در بازه‌های سه ماهه در مدت ۵ سال در مثال ۳.۲

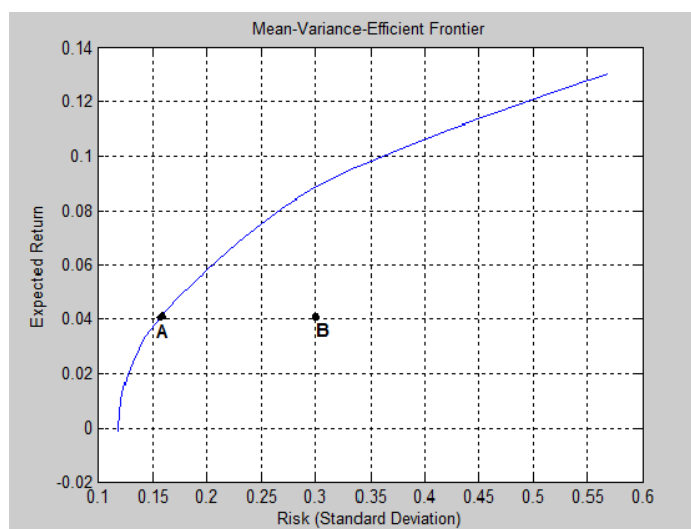
ایران خودرو	بیمه آسیا	پارس خزر	داده پرداز ایران	داروسازی ابوریحان	پتروشیمی خلیج فارس	فیبر ایران	مخابرات ایران	سرمایه گذاری مسکن	تراکتورسازی ایران
۰/۱۲۴۴	۰/۰۳۷۷	۰/۰۰۰۸	۰/۰۳۳۰۹	۰/۰۲۳۹۷	۰/۰۰۹۱۷	۰/۰۱۸۲۷	۰/۰۲۴۰۸	۰/۰۱۶۰۵	۰/۰۱۷۲۶
۰/۰۲۸۲	۰/۰۱۷۹۷	۰/۰۲۹۴۴	۰/۰۱۰۳۹	۰/۰۰۹۱۴	۰/۰۰۲۰۹	۰/۰۲۵۱۷	۰/۰۰۳۷۰	۰/۰۰۲۲۰	۰/۰۱۳۷۰
۰/۰۵۶۵	۰/۰۳۰۴۷	۰/۰۲۲۴۴	۰/۰۰۹۷۴	۰/۰۰۹۹۹	۰/۰۲۸۰۰	۰/۰۲۵۲۹	۰/۰۰۲۵۲	۰/۰۰۴۱۱	۰/۰۱۶۹۶
۰/۰۱۳۱۸	۰/۰۰۳۱۰	۰/۰۰۹۳۹	۰/۰۱۳۱۸	۰/۰۲۲۴۸	۰/۰۰۶۳۹	۰/۰۰۲۷۹	۰/۰۱۸۰۱	۰/۰۰۰۶۱	۰/۰۰۵۶۷
۰/۰۰۴۴۸	۰/۰۰۵۸۲	۰/۰۱۳۲۵	۰/۰۰۸۴۹	۰/۰۲۵۸۸	۰/۰۰۱۶۰	۰/۰۲۲۵۰	۰/۰۲۲۰۲	۰/۰۰۰۳۱	۰/۰۰۳۵۳
۰/۰۳۸۲۹	۰/۰۲۲۷۱	۰/۰۲۸۸۶	۰/۰۲۱۰۵	۰/۰۰۰۹۶	۰/۰۰۲۰۴	۰/۰۲۲۸۸	۰/۰۰۴۵۴	۰/۰۲۴۱۷	۰/۰۰۶۱۱۹
۰/۰۰۱۶۸	۰/۰۲۹۹۱	۰/۰۳۷۷۷	۰/۰۰۵۳۰	۰/۰۰۷۷۷	۰/۰۰۵۸۳	۰/۰۲۳۹۳	۰/۰۰۷۵۳	۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۱۳۵۶
۰/۰۲۶۵۸	۰/۰۰۲۸۷	۰/۰۰۴۲۹	۰/۰۰۶۶۵۱	۰/۰۰۸۲۷	۰/۰۰۵۹۶	۰/۰۱۲۸۳	۰/۰۱۷۰۴	۰/۰۰۰۰۸	۰/۰۰۴۶۰
۰/۰۲۶۵۸	۰/۰۱۶۹۲	۰/۰۲۹۷۷	۰/۰۰۰۵۱	۰/۰۰۳۷۱	۰/۰۰۸۰۳	۰/۰۲۴۵۱	۰/۰۲۴۹۴	۰/۰۱۰۰۸	۰/۰۰۲۹۲
۰/۰۱۲۴۳	۰/۰۰۳۹۲	۰/۰۱۷۲۳	۰/۰۲۹۳۰	۰/۰۰۰۳۹	۰/۰۰۱۸۹	۰/۰۰۹۳۴	۰/۰۱۲۵۴	۰/۰۰۹۳۳	۰/۰۱۶۵۱
۰/۰۲۶۶۷	۰/۰۲۴۳۳	۰/۰۱۱۹۰	۰/۰۲۲۲۹	۰/۰۰۰۳۴	۰/۰۱۱۲۰	۰/۰۱۷۵۴	۰/۰۰۵۵۶	۰/۰۱۵۶۴	۰/۰۰۰۶۵
۰/۰۱۳۴۸	۰/۰۰۲۴۱	۰/۰۰۲۵۹	۰/۰۳۴۴۶	۰/۰۴۳۸۲	۰/۰۰۹۱۶	۰/۰۴۵۴۲	۰/۰۰۴۱۷۰	۰/۰۰۹۵۰	۰/۰۰۰۴۰
۰/۰۱۰۵۰	۰/۰۰۵۸۸	۰/۰۱۵۵۵	۰/۰۴۷۰۵	۰/۰۰۴۹۷	۰/۰۰۸۰۹	۰/۰۱۶۲۴	۰/۰۱۶۲۷۲	۰/۰۱۳۱۸	۰/۰۰۱۶۰
۰/۰۰۲۹۶	۰/۰۱۸۴۸	۰/۰۰۲۸۲	۰/۰۱۶۳۴	۰/۰۰۲۷۰	۰/۰۱۲۷۴	۰/۰۱۵۸۹	۰/۰۰۷۳۵	۰/۰۱۱۷۲	۰/۰۱۸۸۸
۰/۰۱۶۳۸	۰/۰۰۴۴۱	۰/۰۱۰۰۷	۰/۰۲۶۴۴	۰/۰۰۴۹۸	۰/۰۱۰۲۴	۰/۰۳۵۶۱	۰/۰۰۷۵۱	۰/۰۱۴۸۲	۰/۰۲۳۸۸
۰/۰۱۵۷۶	۰/۰۰۵۵۶۶	۰/۰۰۱۹۵	۰/۰۰۶۳۵	۰/۰۱۰۷۷	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۰۴۴۵	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۱۵۱۰	۰/۰۰۴۵۷
۰/۰۰۲۸۲	۰/۰۱۳۹۱	۰/۰۱۳۱۴	۰/۰۰۱۵۷	۰/۰۰۴۱۲	۰/۰۱۵۴۳	۰/۰۰۶۰۱۵	۰/۰۱۵۲۰	۰/۰۱۲۱۹	۰/۰۰۷۹۱
۰/۰۱۴۶۳	۰/۰۸۷۲۰	۰/۰۵۶۷۱	۰/۰۲۶۹۹	۰/۰۴۹۹۴	۰/۰۴۱۹۸	۰/۰۶۳۸۷	۰/۰۲۳۴۳	۰/۰۷۴۶۸	۰/۰۶۹۵۰

جدول ۲: میانگین و انحراف معیار تغییرات نسبی قیمت پایانی موقعیت‌ها در مثال ۳.۲

ایران خودرو	بیمه آسیا	پارس خزر	داده پرداز ایران	داروسازی ابوریحان	پتروشیمی خلیج فارس	فیبر ایران	مخابرات ایران	سرمایه گذاری مسکن	تراکتورسازی ایران
۰/۰۴۳۸۱۲	۰/۰۵۸۱۸۵	۰/۰۳۶۳۴۹	۰/۰۴۳۲۸۹	۰/۰۳۵۱۷۱	۰/۰۱۰۳۸۵	۰/۰۱۳۰۴۱۳	۰/۰۱۱۷۰۴	۰/۰۰۰۰۶۶۵	۰/۰۴۵۷۶۱
۰/۳۴۳۲۳۸	۰/۲۶۳۸۲۴	۰/۲۲۰۴۶۶	۰/۲۷۲۲۲۱	۰/۱۹۴۹۳۳	۰/۱۹۰۰۲۷	۰/۵۸۴۲۰۷	۰/۱۴۸۸۱۳	۰/۲۱۵۲۳۴	۰/۲۴۸۷۳۲

جدول ۳: کوواریانس بین تغییرات نسبی قیمت پایانی سهام موقعیت‌ها در مثال ۳.۲

ایران خودرو	بیمه آسیا	پارس خزر	داده پردازی ایران	داروسازی ابوریحان	پتروشیمی خلیج فارس	فیبر ایران	مخابرات ایران	سرمایه‌گذاری مسکن	تراکتورسازی ایران
۰/۱۱۱۹۷	۰/۰۰۹۱۳	۰/۰۰۲۶۳	۰/۰۵۲۳۷	۰/۰۰۳۸۱	۰/۰۱۲۲۱	۰/۱۵۹۹۴	۰/۰۲۲۰۹	۰/۰۱۷۴۳	۰/۰۲۳۹۴
۰/۰۰۹۱۳	۰/۰۰۶۵۷۳	۰/۰۳۵۱۶	۰/۰۱۳۴۶	۰/۰۲۵۰۲	۰/۰۰۵۰۷	۰/۰۲۲۰۲	۰/۰۱۵۲۷	۰/۰۳۹۳۰	۰/۰۴۵۶۱
۰/۰۰۲۶۳	۰/۰۰۳۵۱۶	۰/۰۴۵۹۰	۰/۰۰۴۰۱	۰/۰۱۶۴۹	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۳۱۷۲	۰/۰۱۵۱۶	۰/۰۲۱۵۲	۰/۰۱۱۰۲
۰/۰۵۲۳۷	۰/۰۱۳۴۶	۰/۰۰۴۰۱	۰/۰۰۶۹۹۸	۰/۰۰۷۷۷	۰/۰۰۹۷۵	۰/۰۱۰۵۸۱	۰/۰۱۰۹۷	۰/۰۱۴۹۲	۰/۰۱۵۸۴
۰/۰۰۳۸۱	۰/۰۰۲۵۰۲	۰/۰۱۶۴۹	۰/۰۰۷۷۷	۰/۰۳۵۸۸	۰/۰۱۳۸۰	۰/۰۲۵۲۳	۰/۰۰۹۵۵	۰/۰۲۰۶۳	۰/۰۱۹۲۸
۰/۰۱۲۲۱	۰/۰۰۵۰۷	۰/۰۰۲۴۹	۰/۰۰۹۷۵	۰/۰۱۳۸۰	۰/۰۳۴۱۰	۰/۰۲۲۲۹	۰/۰۰۶۲۶	۰/۰۱۹۰۴	۰/۰۰۹۲۵
۰/۱۵۹۹۴	۰/۰۲۲۰۲	۰/۰۰۳۱۷۲	۰/۰۰۶۹۹۸	۰/۰۳۵۸۸	۰/۰۱۳۸۰	۰/۰۲۲۲۹	۰/۰۰۶۲۶	۰/۰۱۹۰۴	۰/۰۰۹۲۵
۰/۰۲۲۰۹	۰/۰۱۵۲۷	۰/۰۰۳۹۳۰	۰/۰۰۲۰۶۳	۰/۰۰۱۹۲۸	۰/۰۰۱۲۲۱	۰/۰۰۲۵۲۳	۰/۰۰۱۰۵۸۱	۰/۰۰۰۹۵۵	۰/۰۰۰۷۷۷
۰/۰۱۷۴۳	۰/۰۰۳۹۳۰	۰/۰۰۲۱۵۲	۰/۰۰۱۴۹۲	۰/۰۰۰۹۲۵	۰/۰۰۰۷۷۷	۰/۰۰۰۶۲۶	۰/۰۰۰۵۰۷	۰/۰۰۰۴۰۱	۰/۰۰۰۳۵۱۶
۰/۰۲۳۹۴	۰/۰۰۴۵۶۱	۰/۰۰۱۱۰۲	۰/۰۰۰۲۳۹۴	۰/۰۰۰۱۹۲۸	۰/۰۰۰۱۲۲۱	۰/۰۰۰۰۹۲۵	۰/۰۰۰۰۷۷۷	۰/۰۰۰۰۶۲۶	۰/۰۰۰۰۵۰۷



شکل ۱: مرز کارایی مدل $M - V$ در مثال ۳.۲

جدول ۴: ریسک و درصد تخصیص به هر یک از موقعیت‌ها تحت مدل $M - V$ در مثال ۳.۲

ردیف	حداقل بازده مورد انتظار	ریسک	ایران خودرو	بیمه آسیا	پارس خزر	داده پردازی ایران	داروسازی ابوریحان	پتروشیمی خلیج فارس	فیبر ایران	مخابرات ایران	سرمایه‌گذاری مسکن	تراکتورسازی ایران
۱	۰/۰۴۹	۰/۰۱۵۵	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۵۵۴	۰/۰۲۷۰۶	۰/۰۱۸۹۸	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۷۶۹	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۳۰۷۱
۲	۰/۰۵۸	۰/۰۱۹۹	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۲۱۷۵	۰/۰۲۷۰۴	۰/۰۱۸۸۸	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۱۴۶۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۲۴۷۱
۳	۰/۰۶۷	۰/۰۲۵۴	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۳۷۹۸	۰/۰۱۷۰۱	۰/۰۰۴۷۷	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۲۱۵۵	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۱۸۶۹
۴	۰/۰۷۶	۰/۰۳۲۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۵۵۸۴	۰/۰۰۵۳۴	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۲۸۱۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۱۰۷۱
۵	۰/۰۸۵	۰/۰۴۰۳	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۶۲۸۷	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۳۷۱۳	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
۶	۰/۰۹۴	۰/۰۵۳۵	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۵۰۴۱	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۴۹۵۹	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
۷	۰/۱۰۳	۰/۰۷۲۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۳۷۹۵	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۶۲۰۵	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
۸	۰/۱۱۲	۰/۰۹۵۸	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۲۵۴۹	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۷۴۵۱	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
۹	۰/۱۲۱	۰/۱۲۵۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۱۳۰۳	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۸۶۹۷	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
۱۰	۰/۱۳۰	۰/۱۵۹۵	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۵۷	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۹۹۴۳	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰

۳. انتخاب بهینه سبد سهام با ریسک احتمالی

در این بخش یک مدل ماکس مین را برای انتخاب بهینه سبد سهام مورد بررسی قرار می‌دهیم. با حفظ فرضیات بخش قبل، می‌توان ناحیه شدنی مساله انتخاب بهینه سبد سهام را به صورت

$$X = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{j=1}^N x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \right\}$$

در نظر گرفت. در این بخش فرض می‌کنیم متغیر تصادفی R_j از یک توزیع نرمال با میانگین r_j و انحراف معیار σ_j پیروی می‌کند.

تعریف ۱.۳. [۵] ریسک احتمالی، بر اساس رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$w_p := \min_{1 \leq j \leq N} P(|R_j x_j - r_j x_j| \leq \Theta \epsilon)$$

که در آن $P(\cdot)$ یک تابع احتمال، Θ ثابتی برای تنظیم سطح ریسک و ϵ متوسط ریسک کل سبد سهام است و از رابطه $\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sigma_j$ به دست می‌آید.

مساله انتخاب بهینه سبد سهام در قالب یک مساله بهینه‌سازی دوهدفه به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$(4) \quad \begin{aligned} \max \quad & \left(\min_{1 \leq j \leq N} f_j(x_j), \sum_{j=1}^N r_j x_j \right) \\ \text{s.t.} \quad & x \in X, \end{aligned}$$

که در آن $f_j(z) = P(|R_j z - r_j z| \leq \Theta \epsilon)$ می‌توان با اضافه کردن یک متغیر دیگر و N محدودیت، مساله بالا را به مساله زیر تبدیل کرد:

$$(5) \quad \begin{aligned} \max \quad & (y, \sum_{j=1}^N r_j x_j) \\ \text{s.t.} \quad & y \leq f_j(x_j), \quad j = 1, \dots, N, \\ & x \in X, \end{aligned}$$

که $y \leq f_j(x_j)$ محدودیت احتمالی j -ام می‌باشد. با توجه به این‌که در مساله (۵) فرایند بهینه‌سازی به گونه‌ای است که مقدار y را تا حد امکان افزایش می‌دهد تا به $\min_{1 \leq j \leq N} f_j(x_j)$ برسد، مساله‌های (۴) و (۵) باهم معادلند. با توجه به تعریف R_j ، می‌توان گفت که $R_j - r_j$ از یک توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار σ_j پیروی می‌کند. قرار می‌دهیم $P_j := R_j - r_j$ و آنگاه، با توجه به تابع چگالی احتمال در توزیع نرمال، داریم:

$$\begin{aligned} f_j(x_j) &= P(|R_j x_j - r_j x_j| \leq \Theta \epsilon) = P(|R_j - r_j| \leq \frac{\Theta \epsilon}{x_j}) \\ &= P(|P_j| \leq \frac{\Theta \epsilon}{x_j}) = \int_{-\frac{\Theta \epsilon}{x_j}}^{\frac{\Theta \epsilon}{x_j}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{p_j^2}{2\sigma_j^2}} dp_j = 2 \int_0^{\frac{\Theta \epsilon}{x_j}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{p_j^2}{2\sigma_j^2}} dp_j \end{aligned}$$

تابع $f_j(x_j)$ نسبت به x_j اکیدا نزولی است، زیرا با افزایش x_j کران بالای انتگرال بالا کاهش می‌یابد و با توجه به مثبت بودن تابع زیر انتگرال، مقدار انتگرال نیز کاهش می‌یابد.

اگر y یک عدد حقیقی دلخواه و ثابت بین ۰ و ۱ انتخاب گردد، با توجه به $y \leq f_j(x_j)$ ، می‌توان وجود یک کران پایین برای $f_j(x_j)$ را نتیجه گرفت و آنگاه با توجه به خاصیت یکنوایی $f_j(x_j)$ نسبت به x_j می‌توان یک کران بالا برای x_j به صورت زیر تعریف کرد:

$$(۶) \quad U_j = \min\{1, f_j^{-1}(y)\}.$$

برای مقدار ثابت y ، مساله بهینه‌سازی (۵) به مساله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$(۷) \quad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^N r_j x_j \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^N x_j = 1, \\ & 0 \leq x_j \leq U_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

قضیه زیر، تحت فرضیاتی یک جواب بهینه برای مساله انتخاب بهینه سبد سهام (۷) فراهم می‌آورد.

قضیه ۲.۳. [۵] فرض کنید هیچ دو موقعیت متمایزی وجود ندارند که دارای متوسط بازده مورد انتظار و انحراف معیار یکسان باشند، یعنی:

$$\nexists i, j \in \{1, \dots, N\}; \quad i \neq j, \quad r_i = r_j, \quad \sigma_i = \sigma_j$$

و متوسط بازده موقعیت‌های سرمایه‌گذاری به گونه‌ای مرتب شده‌اند که $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_N$ عدد صحیح $k \leq N$ وجود دارد به طوری که

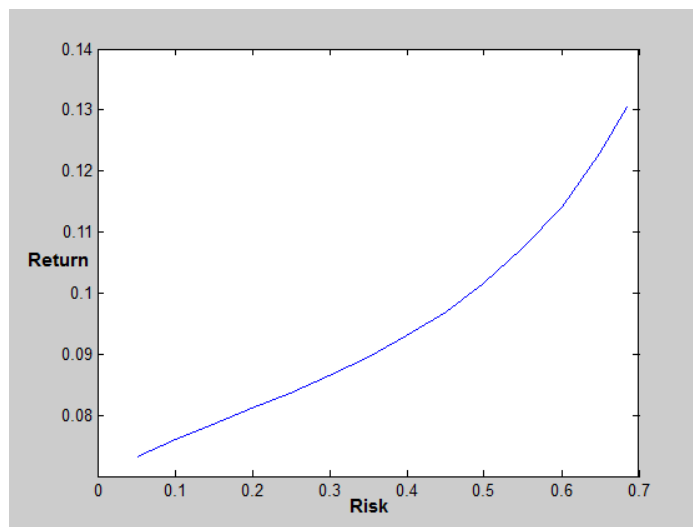
$$\sum_{j=1}^{k-1} U_j < 1, \quad \sum_{j=1}^k U_j \geq 1$$

که U_j کران بالایی برای x_j می‌باشد و از رابطه (۶) بدست می‌آید. به علاوه،

$$x_j^* = \begin{cases} U_j, & j = 1, \dots, k-1 \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} U_j, & j = k \\ 0, & j > k \end{cases}$$

یک جواب بهینه برای مساله (۷) می‌دهد.

۱.۳. تحلیل و رسم مرز کارا برای داده‌های بورس تهران. در ادامه، با پیاده‌سازی مدل مطرح شده در این بخش بر روی داده‌های مثال ۳.۲ (که از بازار بورس تهران استخراج شده‌اند)، مرز کارا و سبدهای سهام ناشی از این مدل احتمالی را بدست می‌آوریم. در این جا، Θ را برابر 25% در نظر گرفته‌ایم. با انتخاب این عدد (فرضی)، مطلوب ما این است که اختلاف بازده با بازده مورد انتظار از $\frac{1}{4}$ ریسک کل سبد سهام کمتر باشد. در واقع، مقدار پارامتر Θ سطح ریسک‌پذیری (ریسک‌گریزی) سرمایه‌گذار را نشان می‌دهد.



شکل ۲: مرز کارای مدل احتمالی برای داده‌های مثال ۳.۲

مرز کارای حاصل برای داده‌های مورد بررسی (شکل ۲)، ساختاری نسبتاً درجه دوم (نزدیک به خطی) دارد که چندان با ملاحظات کاربردی سازگار نیست. مقدار ریسک و بازده و همچنین درصدی از سرمایه اولیه که در هر یک از موقعیت‌ها سرمایه‌گذاری می‌شود را در جدول ۵ آورده‌ایم. سبدهای سهام حاضر در این جدول، متنوع نیستند. در واقع، سرمایه‌گذاری حداکثر در دو موقعیتی که دارای بیش‌ترین بازده هستند، صورت گرفته است که این موضوع، در عمده موارد، باعث بالا بودن ریسک شده و برای سرمایه‌گذاران رضایت‌بخش نیست. در جدول ۵، مقادیر داده‌شده به y ، به ترتیب، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، ... هستند.

جدول ۵: ریسک، بازده و درصد تخصیص به هر یک از موقعیت‌ها تحت ریسک احتمالی (برای داده‌های مثال ۳.۲)

ردیف	بازده مورد انتظار	ریسک	ایران خودرو	بیمه آسیا	پارس خزر	داده پردازی ایران	داروسازی ابوریحان	پتروشیمی خلیج فارس	فیبر ایران	مخابرات ایران	سرمایه‌گذاری مسکن	تراکتورسازی ایران
۱	۰/۱۳۰۴	۰/۶۸۴۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۲	۰/۱۳۰۴	۰/۶۸۴۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۳	۰/۱۳۰۴	۰/۶۸۴۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۴	۰/۱۳۰۴	۰/۶۸۴۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۵	۰/۱۳۰۴	۰/۶۸۴۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۶	۰/۱۳۰۴	۰/۶۸۴۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۷	۰/۱۲۲۸	۰/۶۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۱۰۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۸۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۸	۰/۱۱۴۱	۰/۶۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۲۵۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۷۷۴۴	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۹	۰/۱۰۷۳	۰/۵۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۳۲۰۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۶۷۹۴	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۰	۰/۱۰۱۷	۰/۵۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۳۹۷۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۶۰۲۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۱	۰/۰۹۷۰	۰/۴۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۴۶۲۴	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۵۳۷۶	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۲	۰/۰۹۳۰	۰/۴۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۵۱۷۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۴۸۲۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۳	۰/۰۸۹۶	۰/۳۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۵۶۵۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۴۳۴۵	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۴	۰/۰۸۶۵	۰/۳۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۶۰۸۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۳۹۱۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۵	۰/۰۸۳۷	۰/۲۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۶۴۷۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۳۵۳۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۶	۰/۰۸۱۱	۰/۲۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۶۸۳۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۳۱۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۷	۰/۰۷۸۶	۰/۱۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۷۱۷۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۸۲۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۸	۰/۰۷۶۰	۰/۱۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۷۵۳۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۴۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۱۹	۰/۰۷۳۲	۰/۰۵۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۷۹۲۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۰۷۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

۴. انتخاب بهینه سبد سهام با استفاده از ریسک l_∞

آخرین مدلی که در این نوشتار به بررسی آن می پردازیم، از تابع l_∞ برای بیان ریسک استفاده می کند. با حفظ مفروضات دو بخش قبل، فرض می کنیم R_j که متغیر تصادفی بازده موقعیت سرمایه گذاری s_j است، یک متغیر تصادفی با توزیع دلخواه است. قرار می دهیم:

$$r_j := E(R_j), \quad q_j := E(|R_j - r_j|).$$

تعریف ۱.۴. [۲] تابع ریسک l_∞ به صورت زیر تعریف می شود:

$$w_\infty := \max_{1 \leq j \leq N} E(|R_j x_j - r_j x_j|).$$

در واقع،

$$w_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} E(|R_j - E(R_j)|) x_j = \max_{1 \leq j \leq N} q_j x_j.$$

مساله انتخاب بهینه سبد سهام تحت معیار اندازه گیری ریسک l_∞ در قالب یک مساله بهینه سازی دوهدفه به صورت زیر مدل می شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\max_{1 \leq j \leq N} q_j x_j, - \sum_{j=1}^N r_j x_j \right) \\ \text{s.t.} \quad & x \in X. \end{aligned} \quad (۸)$$

با اضافه کردن یک متغیر و N محدودیت، مساله (۸) به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & (y, - \sum_{j=1}^N r_j x_j) \\ \text{s.t.} \quad & q_j x_j \leq y, \quad j = 1, \dots, N \\ & x \in X. \end{aligned} \quad (۹)$$

حال، با ایده گرفتن از روش مجموع وزن دار در بهینه سازی چند هدفه [۳]، مساله (۹) را به یک مساله پارامتری تبدیل می کنیم. پارامتر $\lambda \in (0, 1)$ را در نظر می گیریم و مساله زیر را می سازیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda y + (1 - \lambda) \left(- \sum_{j=1}^N r_j x_j \right) \\ \text{s.t.} \quad & q_j x_j \leq y, \quad j = 1, \dots, N \\ & x \in X. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

قضیه ۲.۴. [۲] بردار (x, y) یک جواب کارا برای مساله (۹) است اگر و تنها اگر $\lambda \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که (x, y) یک جواب بهینه برای مساله (۱۰) باشد.

۱.۴. مخاطره پذیر بودن تمام موقعیت‌ها. در این زیربخش، فرض می‌کنیم سرمایه‌گذاری در هر یک از موقعیت‌ها دارای ریسک باشد. به عبارت دیگر، سرمایه‌گذاری در هر کدام از آن‌ها، احتمال متضرر شدن سرمایه‌گذار را به همراه داشته باشد. قضیه زیر یک جواب تحلیلی برای مساله (۱۰) فراهم می‌آورد.

قضیه ۳.۴. [۲] تحت دو فرض

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_N$$

و

$$\nexists i \neq j; \quad r_i = r_j, \quad q_i = q_j$$

برای هر $\lambda \in (0, 1)$ ، یک جواب بهینه مساله (۱۰) به صورت زیر است:

$$(11) \quad x_j^* = \begin{cases} \frac{1}{q_j} \left(\sum_{i \in J^*(\lambda)} \frac{1}{q_i} \right)^{-1}, & j \in J^*(\lambda) \\ 0, & j \notin J^*(\lambda) \end{cases}$$

و

$$(12) \quad y^* = \left(\sum_{i \in J^*(\lambda)} \frac{1}{q_i} \right)^{-1}$$

که در آن $J^*(\lambda)$ مجموعه موقعیت‌هایی است که در آن‌ها سرمایه‌گذاری صورت گرفته است و طبق روند زیر مشخص می‌گردد.

الف) اگر عدد صحیحی مانند k وجود داشته باشد که $k \in [0, N-2]$ و

$$\frac{r_N - r_{N-1}}{q_N} < \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

$$\frac{r_N - r_{N-2}}{q_N} + \frac{r_{N-1} - r_{N-2}}{q_{N-1}} < \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

.....

$$\frac{r_N - r_{N-k}}{q_N} + \frac{r_{N-1} - r_{N-k}}{q_{N-1}} + \dots + \frac{r_{N-k+1} - r_{N-k}}{q_{N-k+1}} < \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

و

$$\frac{r_N - r_{N-k-1}}{q_N} + \frac{r_{N-1} - r_{N-k-1}}{q_{N-1}} + \dots + \frac{r_{N-k+1} - r_{N-k-1}}{q_{N-k+1}} + \frac{r_{N-k} - r_{N-k-1}}{q_{N-k}} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

آنگاه

$$(13) \quad J^*(\lambda) := \{N, N-1, \dots, N-k\}$$

ب) اگر شرایط بالا برای هیچ $k \in [0, N-2]$ برقرار نباشد، آنگاه

$$(14) \quad J^*(\lambda) := \{N, N-1, \dots, 1\}$$

نکته ۶. دو نکته در رابطه با سبد سرمایه‌گذاری بهینه‌ای که توسط قضیه بالا تعیین می‌شود، وجود دارد [۱، ۲، ۵]:

- این قضیه به نوعی یک تصمیم گیری دو مرحله‌ای را ارائه می‌دهد؛ به این صورت که در مرحله اول، موقعیت‌ها با توجه به نرخ بازده آن‌ها انتخاب می‌شوند و سپس در مرحله دوم، درصد تخصیص یافته به هر یک از موقعیت‌ها بر اساس ریسک آن‌ها تعیین می‌گردد. در مرحله دوم، تخصیص درصد بسیار کمی از سرمایه به یک موقعیت می‌تواند به این معنی باشد که این موقعیت باید از مجموعه موقعیت‌های سرمایه‌گذاری حذف شود. بنابراین، تحت این استراتژی یک موقعیت ممکن است در یکی از دو مرحله اول و دوم حذف گردد.
- در موقعیت‌هایی که برای سرمایه‌گذاری انتخاب شده‌اند باید مقداری را سرمایه‌گذاری کرد که میزان ریسک همه آن موقعیت‌ها y^* شود.

مرز کارا: برای تعیین مرز کارای مساله (۹) تعریف می‌کنیم:

$$\alpha_k := \frac{1}{q_N} + \frac{1}{q_{N-1}} + \dots + \frac{1}{q_{N-k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\beta_k := \frac{r_N - r_{N-k}}{q_N} + \frac{r_{N-1} - r_{N-k}}{q_{N-1}} + \dots + \frac{r_{N-k+1} - r_{N-k}}{q_{N-k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

که

$$\begin{cases} \alpha_k = \alpha_{k-1} + \frac{1}{q_{N-k+1}}, & k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1} + \alpha_k(r_{N-k+1} - r_{N-k}), & k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \beta_0 = 0 \end{cases}$$

روابط قسمت الف قضیه ۳.۴ معادل با پیدا کردن $k \in [0, N-2]$ است به طوری که

$$\beta_1 < \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \dots, \quad \beta_k < \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \beta_{k+1} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad (15)$$

از طرفی داریم:

$$q_j = E(|R_j - r_j|) > 0 \Rightarrow \alpha_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$r_j \leq r_{j+1} \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

دو رابطه بالا نتیجه می‌دهند

$$\beta_0 \leq \beta_1 \leq \dots \leq \beta_{N-1}.$$

رابطه (۱۵) معادل است با

$$\beta_k < \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \beta_{k+1} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

با انجام محاسباتی ساده داریم

$$\frac{\beta_k}{1+\beta_k} < \lambda \leq \frac{\beta_{k+1}}{1+\beta_{k+1}}.$$

با قرار دادن

$$\underline{\lambda}_k = \frac{\beta_k}{1+\beta_k}, \quad \bar{\lambda}_k = \frac{\beta_{k+1}}{1+\beta_{k+1}},$$

شرایط (۱۵) معادل است با

$$\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k].$$

قضیه ۳.۴ یک جواب بهینه برای مساله (۱۰) ارائه داده است. سوالی که مطرح می‌شود این است که آیا به ازای $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k]$ نقاط کارای دیگری برای مساله (۹) وجود دارد؟ در ادامه، به این سوال پاسخ می‌دهیم.

لم ۴.۴ [۲] برای یک $k = 0, 1, \dots, N-1$ ، اگر $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$ ، آنگاه جواب داده شده در قضیه ۳.۴، جواب بهینه یکتای مساله (۱۰) است.

(y^*, z^*) یک نقطه کارا برای مساله (۹) است که:

$$(16) \quad z^* = -\left(\sum_{i \in J^*(\lambda)} \frac{r_i}{q_i}\right) \left(\sum_{j \in J^*(\lambda)} \frac{1}{q_j}\right)^{-1}.$$

لم ۵.۴ [۲] برای یک $k = 0, 1, \dots, N-2$ اگر $\lambda = \bar{\lambda}_k$ ، آنگاه

$$(y^* - \Delta_y, z^* + \Delta_y \frac{\bar{\lambda}_k}{1 - \bar{\lambda}_k})$$

یک نقطه کارا برای مساله (۹) است به شرط این‌که Δ_y در رابطه زیر صدق کند

$$(17) \quad 0 \leq \Delta_y \leq \frac{y^*}{1 + \sum_{j \in J^*(\lambda)} \frac{q_{N-k-1}}{q_j}}.$$

قضیه زیر از دو لم بالا نتیجه می‌شود.

قضیه ۶.۴ [۲] مرز کارای مساله (۹) را می‌توان با در نظر گرفتن N بازه $(\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N-1$ و همچنین $N-1$ نقطه پایانی $\bar{\lambda}_k$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N-2$ تعیین کرد. مرز کارا شامل:

(۱) نقطه کارای (y^*, z^*) مربوط به بازه $(\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N-1$ می‌باشد که y^* و z^* به ترتیب در روابط (۱۲) و (۱۶) ذکر شده‌اند.

(۲) نقطه کارایی مانند $(y^* - \Delta_y, z^* + \frac{\bar{\lambda}_k}{1 - \bar{\lambda}_k} \Delta_y)$ مربوط به $\bar{\lambda}_k$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N-2$ می‌باشد که محدوده تعریف Δ_y در رابطه (۱۷) داده شده است.

۲.۴. وجود موقعیتی بدون ریسک. در این بخش، فرض می‌کنیم در بین موقعیت‌های سرمایه‌گذاری، موقعیتی بدون ریسک نیز وجود دارد. بدون کاستن از کلیت مساله، فرض می‌کنیم موقعیت بدون ریسک، کم‌ترین میزان بازده را داشته باشد و این موقعیت را s_{i_0} می‌نامیم (از تمام موقعیت‌های مخاطره‌آمیزی که بازده آن‌ها از بازده موقعیت s_{i_0} کم‌تر است می‌توان چشم‌پوشی کرد). با توجه به توضیحات بالا، می‌توان فرض کرد $q_{i_0} = 0$. برای بدست آوردن سهام بهینه و به عبارتی جوابی بهینه برای مساله (۱۰) می‌توان فرض کرد $q_{i_0} = \epsilon > 0$ ، که ϵ عددی به اندازه کافی کوچک است و می‌توان نتیجه دلخواه را با $\epsilon \rightarrow 0^+$ بدست آورد. دو حالت متفاوت برای موقعیت s_{i_0} مورد بررسی قرار می‌گیرد.

الف) مطابق با قاعده بیان شده در قضیه ۳.۴، $i_0 \notin J^*(\lambda)$. در این صورت جواب بهینه مساله (۱۰) به همان صورت که در قضیه ۳.۴ بیان شد، بدون تغییر باقی می‌ماند.

ب) طبق قاعده ذکر شده، $i_0 \in J^*(\lambda)$. در این حالت، یک جواب بهینه برای مساله (۱۰) به صورت زیر تعیین می‌گردد.

$$\begin{aligned} x_j^* &= 0, & j &\notin J^*(\lambda) \\ x_j^* &= \frac{1}{q_j} \left(\frac{1}{\epsilon} + \sum_{\substack{i=N-k \\ i \neq i_0}}^N \frac{1}{q_i} \right)^{-1}, & j &\in J^*(\lambda) \\ y^* &= \left(\frac{1}{\epsilon} + \sum_{\substack{i=N-k \\ i \neq i_0}}^N \frac{1}{q_i} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

با میل دادن ϵ به سمت صفر، داریم:

$$x_j^* = 0, \quad j > 1, \quad x_{i_0}^* = 1, \quad y^* = 0.$$

زمانی موقعیت s_{i_0} برای سرمایه‌گذاری انتخاب می‌شود که

$$(18) \quad \frac{r_N - r_{i_0}}{q_N} + \frac{r_{N-1} - r_{i_0}}{q_{N-1}} + \dots + \frac{r_2 - r_{i_0}}{q_2} < \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

ترکیب حالت‌های الف و ب قضیه زیر را بدست می‌دهد.

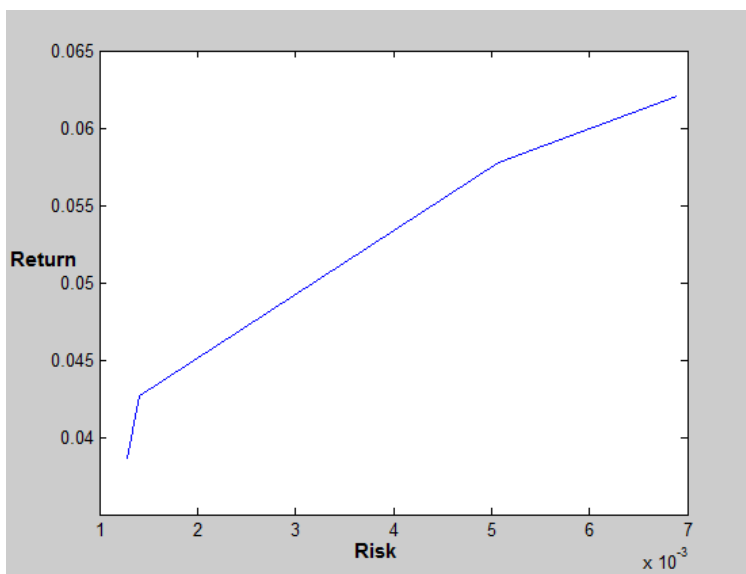
قضیه ۷.۴. [۲] فرض کنید $\lambda \in (0, 1)$ داده شده باشد. اگر رابطه (۱۸) برقرار نباشد، مجموعه $J^*(\lambda)$ و یک جواب بهینه مساله (۱۰) مطابق آنچه در قضیه ۳.۴ گفته شد تعیین می‌گردد. اگر رابطه (۱۸) برقرار باشد، استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه بدین صورت است که صد در صد سرمایه اولیه (M_0) ، در موقعیت بدون ریسک سرمایه‌گذاری می‌شود.

مرز کارا: همان‌طور که در قضیه بالا گفته شد، هرگاه رابطه (۱۸) برقرار باشد، و یا به عبارتی دیگر $\beta_{N-i_0} < \frac{\lambda}{1-\lambda}$ که معادل است با $\lambda \in (\underline{\lambda}_{N-i_0}, 1)$ ، جواب بهینه مساله (۱۰) حاصل از قضیه ۳.۴ به گونه‌ای است که تمام سرمایه اولیه به موقعیت s_{i_0} اختصاص داده می‌شود. در این حالت به راحتی می‌توان دید که هر جواب دیگری با $x_k > 0$ و در نتیجه $x_{i_0} < 1$ که $k < i_0$ نسبت به جواب با $x_k = 0$ و $x_{i_0} = 1$ بهتر نیست (زیرا $r_k \leq r_{i_0}$ اما $q_k > q_{i_0} = 0$ و تخصیص دادن درصدی از M_0 به x_k ، مقدار تابع هدف مساله (۱۰) را افزایش می‌دهد). این بدین معناست که جواب بهینه مساله (۱۰) در حالت $\lambda \in (\underline{\lambda}_{N-i_0}, 1)$ یکتاست. بنابراین اگر $\lambda \notin (\underline{\lambda}_{N-i_0}, 1)$ ، آنگاه بنابر قاعده قضیه ۳.۴ موقعیت s_{i_0} برای سرمایه‌گذاری انتخاب نمی‌گردد، و تجزیه و تحلیل صورت‌گرفته در حالت اول معتبر است. قضیه زیر، مرز کارا برای حالتی که موقعیت بدون ریسک در بین موقعیت‌های کاندیدای سرمایه‌گذاری وجود داشته باشد را تعیین می‌کند.

قضیه ۸.۴. [۲] مرز کارای مساله (۹) با در نظر گرفتن $N - i_0 + 1$ بازه $(\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N - i_0 - 1$ و بازه $(\underline{\lambda}_{N-i_0}, 1)$ و همچنین $N - i_0$ نقطه پایانی $\bar{\lambda}_k$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N - i_0 + 1$ تعیین می‌شود. بنابراین مرز کارا شامل:

- (۱) نقطه کارای (y^*, z^*) مربوط به بازه $(\underline{\lambda}_k, \bar{\lambda}_k)$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N - i_0 - 1$ و یا بازه $(\underline{\lambda}_{N-i_0}, 1)$ می‌باشد که y^* و z^* به ترتیب در روابط (۱۲) و (۱۶) بیان شده‌اند.
- (۲) نقاط کارایی مانند $(y^* - \Delta_y, z^* + \frac{\bar{\lambda}_k}{1-\bar{\lambda}_k} \Delta_y)$ مربوط به $\bar{\lambda}_k$ به ازای $k = 0, 1, \dots, N - i_0 - 1$ می‌باشد که محدوده تعریف Δ_y در رابطه (۱۷) داده شده است.

۳.۴. تحلیل و رسم مرز کارا برای داده‌های بورس تهران. در این بخش، با پیاده‌سازی مدل l_∞ بر روی داده‌های بورس تهران (مثال ۳.۲)، مرز کارای این مدل را در شکل ۳ ترسیم نموده‌ایم.



شکل ۳: مرز کارای مدل l_∞ برای داده‌های مثال ۳.۲

جدول ۶: ریسک، بازده و درصد تخصیص به هر یک از موقعیت‌ها تحت مدل l_∞ (برای داده‌های مثال ۳.۲)

ردیف	بازده مورد انتظار	ریسک حاصل	ایران خودرو	بیمه آسیا	پارس خزر	داده پردازی ایران	داروسازی ابوریحان	پتروشیمی خلیج فارس	فیبر ایران	مخابرات ایران	سرمایه‌گذاری مسکن	تراکتورسازی ایران
۱	۰/۰۶۲۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۲	۰/۰۶۲۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۳	۰/۰۶۲۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۴	۰/۰۶۲۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۵	۰/۰۶۲۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۶	۰/۰۶۲۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۷	۰/۰۶۲۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۰۰	۰/۹۴۵۹	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۵۴۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۸	۰/۰۵۷۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۶۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۵۳
۹	۰/۰۵۷۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۶۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۵۳
۱۰	۰/۰۵۷۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۶۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۵۳
۱۱	۰/۰۵۷۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۶۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۵۳
۱۲	۰/۰۵۷۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۶۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۵۳
۱۳	۰/۰۵۷۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۶۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۵۳
۱۴	۰/۰۵۷۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰	۰/۶۹۵۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۳۹۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۵۳
۱۵	۰/۰۴۲۷	۰/۰۰۱۴	۰/۰۱۵۸	۰/۱۹۳۶	۰/۶۷۱۹	۰/۰۳۳۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۱۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۷۳۹
۱۶	۰/۰۴۲۷	۰/۰۰۱۴	۰/۰۱۵۸	۰/۱۹۳۶	۰/۶۷۱۹	۰/۰۳۳۸	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۱۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۷۳۹
۱۷	۰/۰۳۸۷	۰/۰۰۱۳	۰/۰۱۴۳	۰/۱۷۵۷	۰/۶۱۰۰	۰/۰۳۰۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۹۲۱	۰/۰۶۷۱
۱۸	۰/۰۳۸۷	۰/۰۰۱۳	۰/۰۱۴۳	۰/۱۷۵۷	۰/۶۱۰۰	۰/۰۳۰۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۹۲۱	۰/۰۶۷۱
۱۹	۰/۰۳۸۷	۰/۰۰۱۳	۰/۰۱۴۳	۰/۱۷۵۷	۰/۶۱۰۰	۰/۰۳۰۷	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۹۲۱	۰/۰۶۷۱

به علاوه، با پیاده‌سازی مدل مربوطه در متلب برای داده‌های مثال ۳.۲، مقدار ریسک و بازده و هم‌چنین کسری از سرمایه اولیه که در هر یک از موقعیت‌ها سرمایه‌گذاری می‌شود را در جدول ۶ آورده‌ایم. در این جدول، مقادیر داده‌شده به

۸، به ترتیب، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ ، ... هستند. با توجه به مدل (۱۰)، هر چه λ افزایش می‌یابد، اثر ریسک در تابع هدف افزایش و اثر بازده در آن کاهش می‌یابد. به همین دلیل، سهم شرکت "فیبر ایران"، با ماکزیمم متوسط بازده، در سبد سهام متناظر با λ های کوچک، بیش‌تر است. به علاوه، از جدول مورد اشاره دیده می‌شود که هر چه بازده کاهش می‌یابد، ریسک نیز کاهش می‌یابد. برای بازده‌های پایین، سبدهای سهام متنوع‌تر هستند و ریسک پایین‌تر است. در مجموع، سبدهای ردیف ۱۵ به بعد سبدهای متنوع‌تری هستند. از این جدول دیده می‌شود که، این مدل می‌تواند سبدهای سهام متنوعی را با بازده و ریسک‌های متنوع در اختیار سرمایه‌گذار قرار دهد تا هر سرمایه‌گذار مطابق با ریسک‌پذیری خود، به انتخاب از بین آن‌ها بپردازد. به عنوان نکته پایانی، توجه کنید که مدل مطرح شده با ریسک l_∞ مستقل از توزیع داده‌هاست.

۵. مقایسه مدل‌ها و نتیجه‌گیری

مدل کلاسیک $M - V$ ، نقطه عطفی در انتخاب بهینه سبد سهام به شمار می‌رود. مارکوویتز (دارنده نوبل اقتصاد- ۱۹۹۰) با ارائه این مدل اولین گام در نظریه ریاضی انتخاب بهینه سبد سهام را برداشته است ولی مدل ایشان خالی از ایراد نیست. مهم‌ترین ایرادات این مدل، وابستگی کارکرد آن به توزیع داده‌ها، استفاده از ریسک مبتنی بر واریانس- کوواریانس و همچنین استفاده از برنامه‌ریزی درجه دوم برای بدست آوردن سبد بهینه سهام است. در دو مدل دیگر بررسی شده در این نوشتار، مساله انتخاب بهینه سبد سهام در قالب یک مساله بهینه‌سازی دوهدفه مدل شده است.

با پیاده سازی سه مدل بررسی شده بر روی داده‌هایی از بورس تهران، بازده، ریسک و درصد تخصیص یافته به هر یک از موقعیت‌ها را بدست آوردیم. نتایج در جدول‌های ۴، ۵ و ۶ آمده است. با توجه به این‌که چگونگی تعریف ریسک در سه مدل بررسی شده متفاوت است، نمی‌توان نتایج این سه جدول را از منظر ریسک و بازده به طور مستقیم مقایسه کرد. با این حال می‌توان نسبت افزایش نسبی بازده به افزایش نسبی ریسک را برای بررسی عملکرد نسبی مدل‌ها در نظر گرفت. این شاخص را، که کارایی نسبی می‌نامیم، برای هر جدول با در نظر گرفتن بیش‌ترین دو بازده و ریسک متناظر با آن‌ها محاسبه کرده‌ایم. کارایی نسبی برای جدول‌های ۴، ۵ و ۶ به ترتیب برابر با $0.27/1$ ، $0.21/1$ و $0.21/1$ بدست آمده است، که نشان می‌دهد مدل دوم از منظر کارایی نسبی، برای داده‌های در نظر گرفته شده، نسبت به دو مدل دیگر عملکرد بهتری داشته است.

از طرفی دیگر، با توجه به جدول ۵، مشاهده می‌شود که در نتایج مدل دوم، سرمایه‌گذاری حداکثر در دو موقعیت که بیش‌ترین بازده را دارند صورت گرفته است. یعنی تنوع سرمایه‌گذاری کم است. پیاده‌سازی مدل مین ماکس بررسی شده در بخش ۴ بر روی این داده‌ها، نتایج ذکر شده در جدول ۶ را به همراه داشت. همان‌طور که در جدول ۶ مشاهده کردیم در حالت‌های مختلف با توجه به ریسک و بازده حاصل، سرمایه‌گذاری در موقعیت‌های متنوع‌تری انجام گرفته و تنوع در سبد سهام بدست آمده از آخرین مدل به خوبی مشهود است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از داور محترم، به دلیل وقتی که صرف مطالعه مقاله کرده‌اند و نظرات ارزشمندشان که منجر به بهبود مقاله گردید، تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

- [1] S. Javadi, Portfolio selection based on the minimax risk, *Master dissertation*, University of Tehran, (2019), In Persian.
- [2] X. Q. Cai, K. L. Teo, X. Q. Yang and X. Y. Zhou, Portfolio optimization under a minimax rule, *Management Science*, **46** (2000) 957—972.

- [3] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, 2nd ed., Springer, New York, 2005.
- [4] H. Markowitz, Portfolio selection, *The Journal of Finance*, 7 (1952) 77-91.
- [5] Y. Sun, G. Aw, K. L. Teo and G. Zhou, Portfolio optimization using a new probabilistic risk measure, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 11 (2015) 1275-1283.

سید مرتضی امینی

تهران، خیابان انقلاب، دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
morteza.amini@ut.ac.ir

سید مرتضی امینی فارغ التحصیل کارشناسی ارشد و دکتری آمار از دانشگاه فردوسی مشهد در سال‌های ۱۳۸۴ و ۱۳۹۰ و از سال ۱۳۹۰ تا حال حاضر استادیار و عضو هیات علمی دانشگاه تهران است. او تاکنون بیش از ۲۰ مقاله در مجلات بین‌المللی داوری شده و دو کتاب درسی به زبان فارسی در حوزه رگرسیون به چاپ رسانیده است. علائق پژوهشی او یادگیری و استنباط آماری، مدل بندی آماری و رگرسیون است. وی هم اکنون دبیر هسته پژوهشی یادگیری ماشین و پردازش سیگنال دانشگاه تهران بوده و به فعالیت‌های ترویجی و پژوهشی در این زمینه مشغول است.



ساجده جوادی

تهران، خیابان انقلاب، دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
sajedehjavadi3@gmail.com

ساجده جوادی دوره کارشناسی را در رشته ریاضیات و کاربردها در دانشگاه کاشان و دوره کارشناسی ارشد را در رشته ریاضی کاربردی (بهینه‌سازی و تحقیق در عملیات) در دانشگاه تهران به پایان رسانده است. وی در زمستان ۱۳۹۷ از پایان نامه کارشناسی ارشد خود با عنوان "انتخاب سبد سهام بر پایه ریسک مینی ماکس" تحت راهنمایی دو مولف دیگر مقاله حاضر، دفاع نموده است.



معجید سلیمانی دامنه

تهران، خیابان انقلاب، دانشگاه تهران، پردیس علوم، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر
soleimani@khayam.ut.ac.ir

معجید سلیمانی دامنه، فارغ التحصیل کارشناسی ارشد و دکتری ریاضی کاربردی از دانشگاه خوارزمی تهران و در حال حاضر عضو هیات علمی دانشگاه تهران (با مرتبه دانشیاری) است. علائق پژوهشی وی، تحقیق در عملیات و بهینه‌سازی (نظری و کاربردی)، مدل‌سازی، ریاضیات و مدیریت مالی است و مقالات متعددی در این زمینه‌ها در مجلات بین‌المللی به چاپ رسانده است. ایشان رئیس سابق دانشکده ریاضی، آمار و علوم دانشگاه تهران و در حال حاضر معاون پژوهشی پردیس علوم همین دانشگاه است.

