

مصور کردن گروه‌ها با نمودار کیلی

سجاد محمودرباطی

چکیده. در این مقاله فرایند ساخت نمودارهای کیلی برخی از ساختارهای تعریف شده در نظریه گروه‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. مقدمه

بیشتر شاخه‌های ریاضی از تصاویر و شکل‌ها برای انتقال آسانتر مفاهیم‌شان کمک می‌گیرند. معلمان حساب دیفرانسیل و انتگرال، از مستطیل‌های زیر یک منحنی برای توجیه مجموع ریمان استفاده می‌کنند. اساتید توپولوژی با استفاده از دایره‌ای به شعاع ε به مرکز یک نقطه روی صفحه مطالب مورد نظرشان را توضیح می‌دهند. پس چرا برای درس جبر مجرد مقدماتی از تصاویر استفاده نمی‌کنیم؟

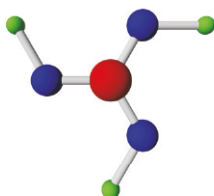
روش‌های زیادی برای به تصویر کشیدن یک گروه وجود دارد. نمودار کیلی Cayley diagram مهمترین و شهودی‌ترین روش است که توسط آرتور کیلی ریاضیدان انگلیسی قرن نوزدهم ابداع گردید. در حالت کلی، نمودار کیلی یک گروه متناهی شامل رئوسی است که توسط یال‌های جهت‌دار رنگی (برچسب دار) به هم متصل شده و ویژگی‌های زیر را داراست.

- (۱) هر یال جهت‌دار با یک رنگ خاص نمایانگر یک مولد خاص برای گروه است.
- (۲) هر عضو گروه در نمودار کیلی توسط یک راس نمایش داده می‌شود.
- (۳) اگر یک یال جهت‌دار متناظر با مولد g راس a را به b متصل کند یعنی عمل g روی a ، b را نتیجه می‌دهد و به عبارت دیگر $a.g = b$.
- (۴) اگر $a.g = b$ و $b.g = a$ ، در اینصورت به جای یال جهت‌دار دوطرفه بین رئوس a و b ، یال غیرجهت‌دار رسم می‌کنیم.

فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه مولد برای گروه G باشد بطوریکه هیچ زیرمجموعه سرهای از A ، G را پدید نیاورد. برای رسم نمودار کیلی این گروه متناهی، ابتدا راس همانی گروه را رسم کرده و یک یال جهت‌دار از راس همانی به هر راس a_i متصل می‌کنیم. سپس، هر مولد a_i را بر تمامی رئوس غیرهمانی موجود اثر داده و در صورتیکه $b.a_i = c$ ، یک یال جهت‌دار متناظر با مولد a_i از راس b به راس c رسم می‌کنیم. با ادامه این روند نمودار کیلی گروه مذکور بدست می‌آید. بدین ترتیب، در بخش‌های بعد، نمودارهای کیلی برخی از ساختارهای موجود در نظریه گروه‌ها را رسم می‌کنیم. لازم به ذکر است تمامی مطالب این مقاله برگرفته از کتاب [۱] است.

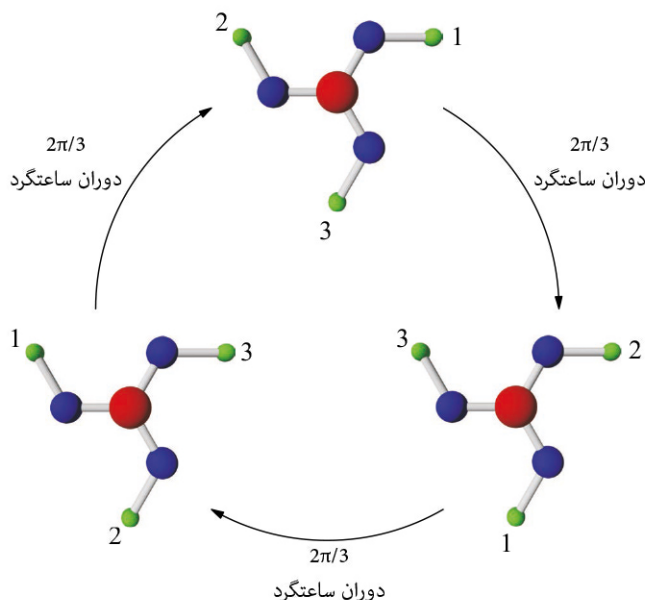
۲. گروه‌های دوری

ابتدایی‌ترین عضو خانواده گروه‌ها، گروه‌های دوری، اجسامی را توصیف می‌کنند که فقط و فقط دارای تقارن دورانی حول یک محور هستند. به عبارت دیگر، گروه تقارنی یک جسم فیزیکی دوری است اگر و فقط اگر تنها تقارن آن جسم دوران حول یک محور باشد.



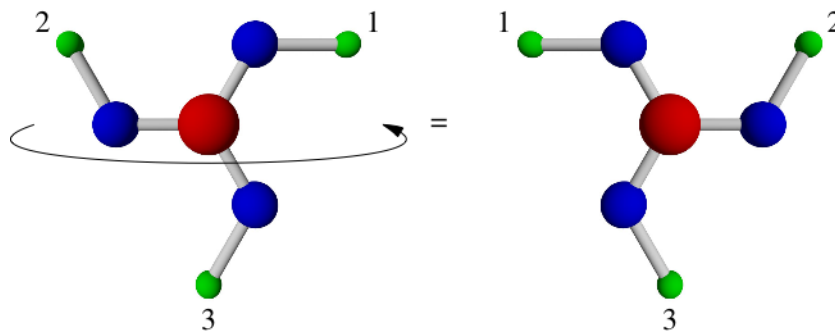
شکل ۱: مولکول اسیدبوریک $B(OH)_3$

می‌دانیم شیمی‌دان‌ها مولکول‌ها را براساس گروه تقارنی آن مولکول طبقه‌بندی می‌کنند، زیرا این گروه‌ها بر رفتار مولکول‌ها تاثیر می‌گذارد. در شکل ۱، یک مولکول اسیدبوریک را به تصویر کشیده است. می‌بینیم دوران ساعتگرد به اندازه $2\pi/3$ شکل مولکول را حفظ می‌کند، شکل ۲ را مشاهده نمایید.



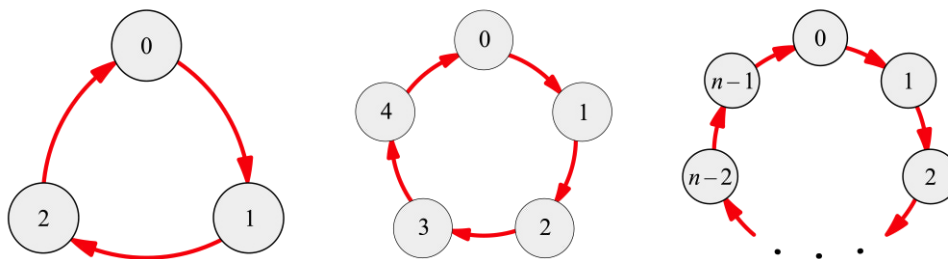
شکل ۲: دورانهای ساعتگرد به اندازه‌های $2\pi/3$ ، $4\pi/3$ و 2π

با این حال، بنا به شکل ۳، تقارن بازتابی یک تقارن مولکول $B(OH)_3$ نیست. بنابراین، گروه توصیف کننده تقارن‌های $B(OH)_3$ یک گروه دوری با سه عنصر، دوران به اندازه‌های $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ و 2π ، می‌باشد و آن را با C_3 نمایش می‌دهیم. در حالت کلی، گروه دوری شامل n عنصر، گروه دوری مرتبه n نامیده و آن را با C_n نمایش می‌دهیم.



شکل ۳: بازتاب حول محور عمودی

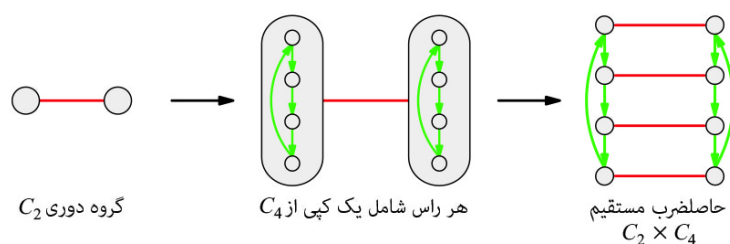
برای نمایش عناصر C_n ، عنصرهمانی را با ۰، یک دوران ساعتگرد را با ۱، دو بار دوران ساعتگرد را با ۲ و به همین ترتیب تا $n-1$ بار دوران ساعتگرد را با $n-1$ نمایش می‌دهیم. در شکل ۴، نمودارهای کیلی C_3 ، C_5 و C_n نشان داده شده است. روشن است که نمودار کیلی یک گروه دوری همیشه یک دور می‌باشد.



شکل ۴: نمودارهای کیلی C_3 ، C_5 و C_n

۳. حاصلضرب مستقیم گروه‌ها

در این بخش می‌خواهیم با استفاده از نمودارهای کیلی گروه‌های A و B ، یک نمودار کیلی برای حاصلضرب مستقیم این گروه‌ها یعنی $A \times B$ بسازیم. به طور نمونه در شکل ۵، هر مرحله از فرایند تعریف زیر برای $A = C_2$ و $B = C_4$ به تصویر کشیده شده است.

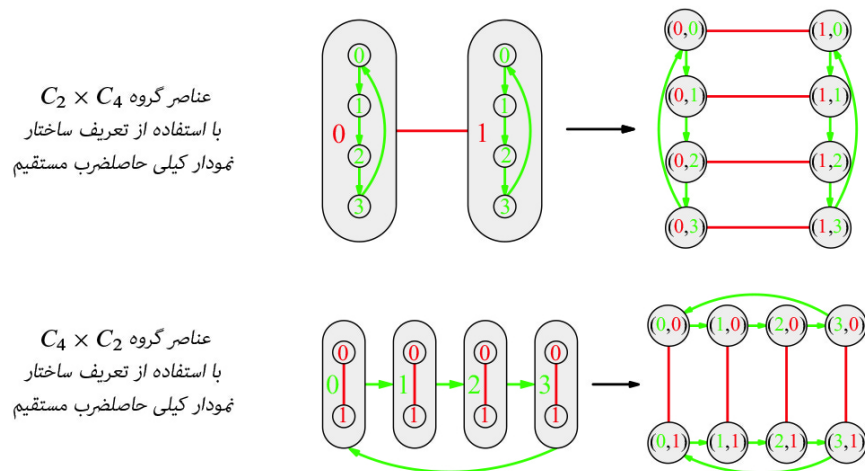


شکل ۵: فرایند ساخت نمودار کیلی $C_2 \times C_4$ با استفاده از نمودارهای کیلی C_2 و C_4

تعریف ۱.۳. برای ساختن نمودار کیلی $A \times B$ از نمودارهای کیلی A و B ، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

- (۱) نمودار کیلی A را رسم می‌کنیم.
- در شکل ۵، نمودار کیلی $A = C_2$ در سمت چپ رسم شده است.
- (۲) یک کپی از نمودار کیلی B را در درون هر راس از نمودار کیلی A قرار می‌دهیم.
- در وسط شکل ۵، در درون هر دو راس C_2 ، نمودار کیلی C_4 قرار داده شده است.
- (۳) رئوس نمودار کیلی A را پاک کرده و با استفاده از یال‌های A ، راس‌های متناظر هر کپی از نمودارهای کیلی B را به هم متصل می‌کنیم.

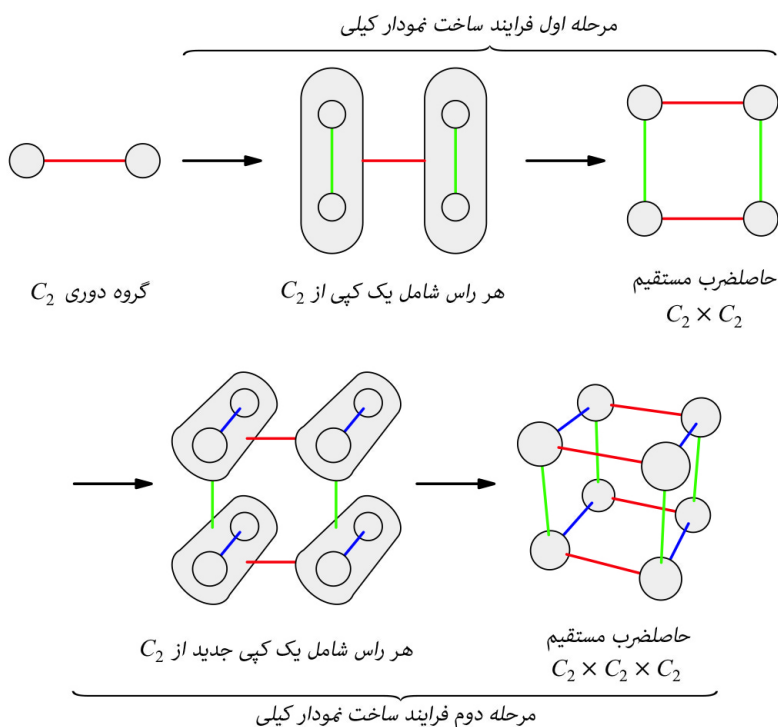
گروهی که نمودار کیلی آن از تعریف ۱.۳ نتیجه می‌شود را حاصلضرب مستقیم گروه‌های A و B می‌نامیم. با استفاده از مرحله ۲ در تعریف ۱.۳، یک عنصر گروه $A \times B$ بصورت (a, b) است که در آن $a \in A$ و $b \in B$ می‌باشد؛ همانطور که در شکل ۶ مشاهده می‌نمایید. بعلاوه، در این شکل به طور نمونه مشاهده می‌کنیم که نمودار کیلی $A \times B$ بر نمودار کیلی $B \times A$ منطبق است.



شکل ۶: عناصر گروه $C_2 \times C_4$

۴. گروه‌های آبلی

یک راه برای ساختن یک گروه آبلی تقسیم کردن آن به گروه‌های دوری است. این حقیقت، قضیه اساسی گروه‌های آبلی نام دارد که بیان می‌کند هر گروه آبلی حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری‌اش است. در نتیجه به راحتی با استفاده از نتایج بخش‌های قبل می‌توانیم نمودار کیلی یک گروه آبلی را رسم نماییم. به طور مثال، گروه $C_2 \times C_2 \times C_2$ یک گروه آبلی است. برای رسم نمودار کیلی این گروه، آنرا بصورت $(C_2 \times C_2) \times C_2$ در نظر گرفته و با استفاده از تعریف ۱.۳ و مانند شکل ۷، ابتدا نمودار $C_2 \times C_2$ را رسم کرده سپس نمودار کیلی مورد نظر را رسم می‌کنیم.

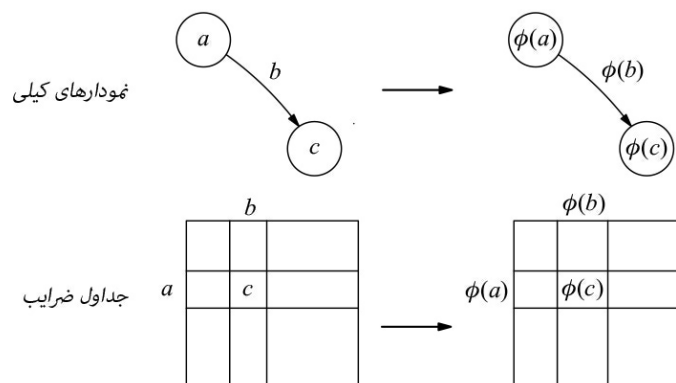


شکل ۷: فرایند ساخت نمودار کیلی حاصلضرب مستقیم سه گروه

۵. همریختی گروهی

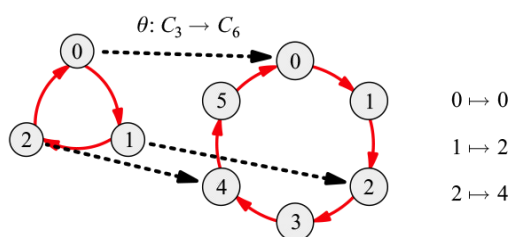
ابتدا به تعریف همریختی می‌پردازیم:

- تعریف ۱.۵.** یک همریختی، یک تابع ϕ از گروه G به گروه H است اگر در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.
- (۱) در نمودار کیلی، اگر یال جهت‌دار b در G عنصر a را به عنصر c متصل کند، در اینصورت یال جهت‌دار $\phi(b)$ در H باید عنصر $\phi(a)$ را به عنصر $\phi(c)$ متصل کند.
 - (۲) در جدول ضرایب، اگر در جدول ضرب G ، معادله $a.b = c$ برقرار باشد، در اینصورت در جدول H ، معادله $\phi(a).\phi(b) = \phi(c)$ نیز باید برقرار باشد.
- این گزاره‌ها باید برای هر a, b, c در G برقرار باشد. (شکل ۸ و ۹)



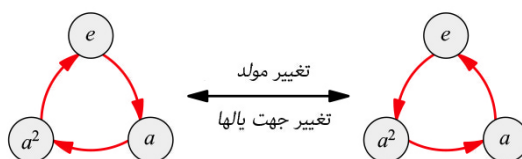
شکل ۸: نمایش تصویری شرایط معادل در تعریف همریختی

یک همریختی یک به یک و پوشا از یک گروه به خودش را یک خودریختی می‌نامیم. مجموعه تمام خودریختی‌های یک گروه را با $\text{Aut}(G)$ نمایش می‌دهیم که این مجموعه با عمل ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهد.



شکل ۹: یک همریختی از C_3 به C_6

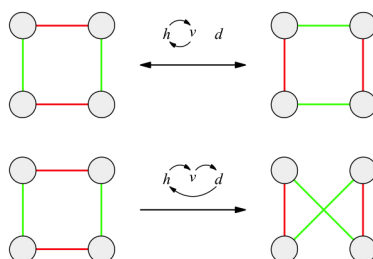
می‌دانیم هر خودریختی روی گروه G یک جایگشت بین مولدهای G است که ساختار گروه را حفظ می‌کند. بعلاوه، چون نمودار کیلی وابسته به مولدها است، پس هر جایگشت بین مولدهای گروه G یک نمودار کیلی جدید برای گروه G پدید می‌آورد. برای نمونه در شکل ۱۰، تمام نمودارهای کیلی گروه دوری C_3 نمایش داده شده است.



شکل ۱۰: دو نمودار کیلی برای گروه C_3

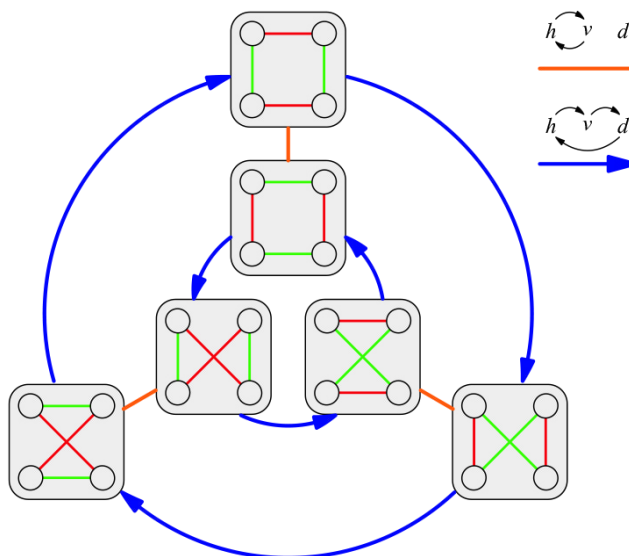
۶. حاصلضرب نیم مستقیم گروه‌ها

در این بخش، حاصلضرب نیم مستقیم گروه‌ها را معرفی می‌کنیم که عملگری پیچیده‌تر از حاصلضرب مستقیم می‌باشد. در بخش‌های قبل آموختیم که حاصلضرب مستقیم از اتصال عناصر متناظر کپی‌های یک عامل بر طبق نمودار کیلی عامل دیگر بدست می‌آید. حاصلضرب نیم مستقیم نیز ساده است، در آن نیز دو عامل وجود دارد، که یکی نقشه اتصال عناصر متناظر در کپی‌های عامل دیگر را مشخص می‌کند. با این تفاوت که این کپی‌ها الزاماً یکی نیستند.



شکل ۱۱: دو نمودار کیلی برای V_4 پدید آمده توسط جایگشت‌های (h, v) ، (h, d) . که در آن h خط افقی، v خط عمودی و d قطر مستطیل می‌باشد.

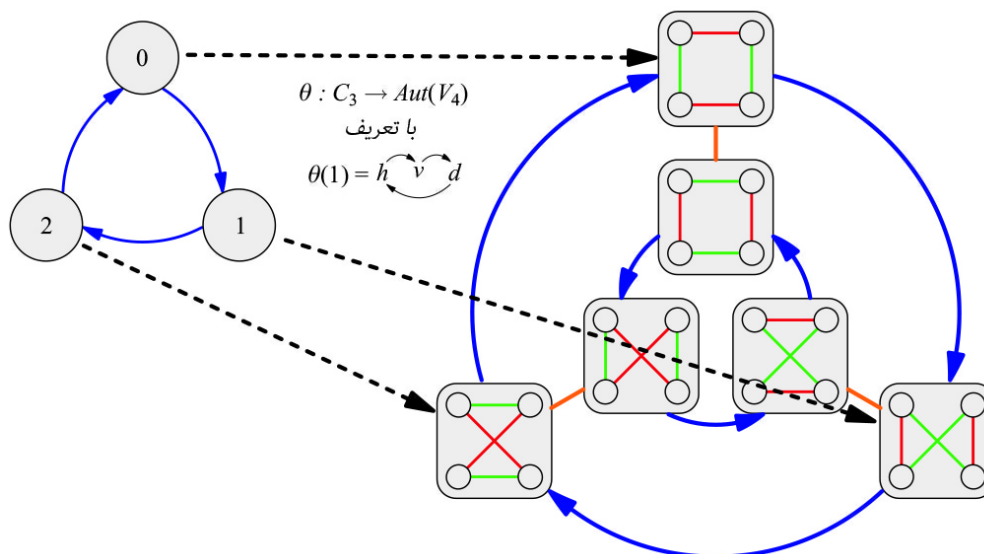
حال می‌خواهیم گروه خودریختی‌های گروه چهارتایی کلاین V_4 را بدست آوریم. فرض کنیم e, h, v, d عناصر گروه V_4 باشند بطوریکه $e = h^2 = v^2 = d^2$. چون عناصر h, v, d مولدهای گروه V_4 هستند، پس $\text{Aut}(V_4)$ زیرگروهی از گروه تمام جایگشت‌های روی سه حرف h, v, d یا همان گروه متقارن S_3 است.



شکل ۱۲: گروه تمام نمودارهای کیلی V_4 پدید آمده توسط دو جایگشت مذکور

می توان بررسی کنیم که دو جایگشت (hv) و (hvd) دو خودریختی گروه V_4 را القا می کنند و در نتیجه دو نمودار کیلی جدید برای این گروه می سازند (شکل ۱۱). بعلاوه براحتی می توان بررسی کنیم که این جایگشت ها S_3 و در نتیجه $Aut(V_4)$ را تولید می کنند. در شکل ۱۲، مجموعه تمامی نمودارهای کیلی گروه V_4 و رابطه بین آنها را نمایش داده شده است.

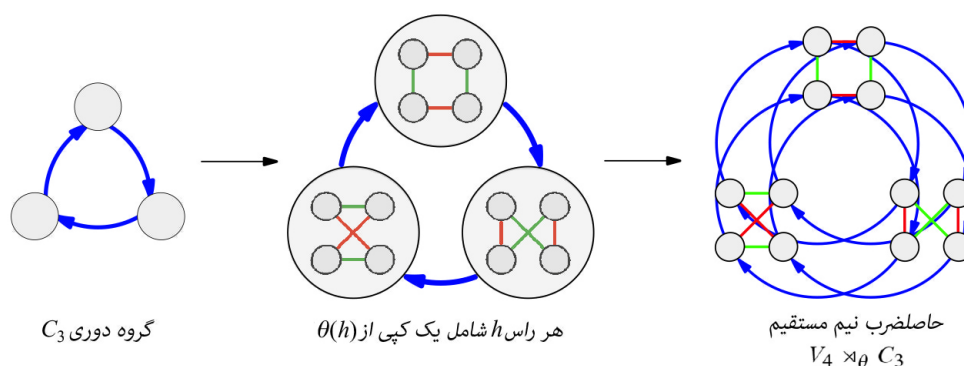
حال فرض کنیم θ یک همریختی از C_3 به $Aut(V_4)$ باشد بطوریکه $\theta(1) = (hvd)$ (شکل ۱۳). حال با استفاده از تعریف همریختی θ ، ساختار حاصلضرب نیم مستقیم $G \rtimes_{\theta} H$ بدست می آوریم. برای نمونه در شکل ۱۴، هر مرحله از فرایند تعریف زیر برای $G = V_4$ و $H = C_3$ به تصویر کشیده شده است که در آن θ همریختی تعریف شده در شکل ۱۳ است.



شکل ۱۳: یک همریختی از یک گروه به یک گروه خودریختی هایک گروه دیگر

تعریف ۱.۶. برای ساختن نمودار کیلی $G \rtimes_{\theta} H$ از نمودارهای کیلی G و H ، مراحل زیر را دنبال می کنیم:

- (۱) نمودار کیلی H را رسم می کنیم.
در شکل ۱۳، نمودار کیلی $H = C_3$ در سمت چپ رسم شده است.
- (۲) در درون هر راس h از نمودار کیلی H ، نمودار کیلی $\theta(h)$ را قرار می دهیم.
در وسط شکل ۱۴، با استفاده از شکل ۱۳ در هر سه راس $h \in C_3$ ، یک کپی از نمودار کیلی $\theta(h)$ را قرار داده شده است.
- (۳) رئوس نمودار کیلی H را پاک کرده و با استفاده از یال های جهت دار H ، راس های متناظر هر کدام از نمودارهای کیلی V_4 را به هم متصل می کنیم. حال نمودار کیلی حاصلضرب نیم مستقیم $C_3 \rtimes_{\theta} V_4$ بدست می آید.

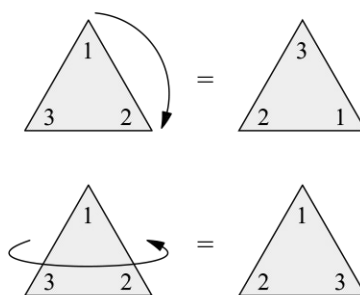


شکل ۱۴: فرایند ساخت نمودار کیلی $V_4 \rtimes_\theta C_3$ با θ تعریف شده در شکل ۱۳

براحتی با کشیدن نمودار کیلی A_4 می‌توانیم بررسی کنیم که نمودارهای کیلی A_4 و $V_4 \rtimes_\theta C_3$ برهم منطبق هستند.

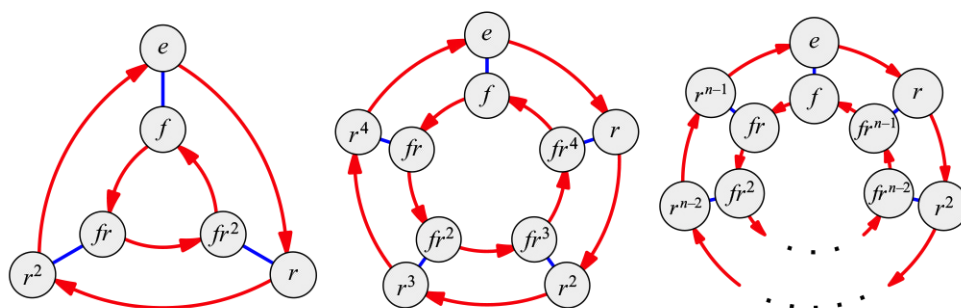
۷. گروه‌های دووجهی

گروه‌های دووجهی اجسامی را توصیف می‌کند که فقط دارای یک تقارن بازتابی و یک تقارن دورانی (حول یک محور) هستند. راحت‌ترین اشکال هندسی که هر دو تقارن بازتابی و دورانی را دارند، چند ضلعی‌های منتظم هستند. یک چندضلعی منتظم با n ضلع را n -گونا نامیم و گروهی که تقارن‌های یک n -گونا منتظم را توصیف می‌کند را با D_{2n} نمایش می‌دهیم.



شکل ۱۵: دوران ساعتگرد و تقارن بازتابی مثلث

فرض کنیم دوران ساعتگرد را با r و تقارن بازتابی را با f نمایش دهیم. براحتی می‌توان بررسی کرد که تقارن‌های r, r^2, f, rf, r^2f تمام تقارن‌های یک مثلث یا تمام عناصر D_6 است، شکل ۱۵ را مشاهده کنید. با توجه به این، نمودار کیلی D_6 در شکل ۱۶، رسم شده است. جالب آنجاست که این نمودار کیلی با نمودار کیلی حاصلضرب نیم‌مستقیم $C_3 \rtimes C_2$ انطباق دارد.



شکل ۱۶: نمودار کیلی گروه های دو وجهی D_6 و D_{10} و D_{2n}

در سمت راست شکل ۱۶، نمودار کیلی D_{2n} در حالت کلی رسم شده است.

مراجع

- [1] N. Carter, Visual group theory, 32, MAA, 2009.

سجاد محمودرباطی

قزوین، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی محض
mahmoodrobati@sci.ikiu.ac.ir

سجاد محمودرباطی متولد آذرماه ۱۳۶۳ در شهر شهریار می باشد. وی در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه تهران و در سال ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض در دانشگاه علم و صنعت ایران شد. در سال ۱۳۸۸ دوره دکتری در گرایش نظریه گروه ها را در دانشگاه تهران و تحت نظر دکتر محمدرضا درفشه آغاز و در سال ۱۳۹۱ از پایان نامه خود دفاع نمود. وی از سال ۱۳۹۲ تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) است.

