

روش سطح تراز برای حرکت توسط خمیدگی میانگین**

تویاس هولک کولدینگ و ویلیام پی. مینیکوزی II
مترجمان: مهران امینیان* و مهران نامجو

چکیده. مدل سازی یک رشته ی گسترده از پدیده های فیزیکی، مثل رشد کریستال و انتشار شعله، منجر به ردیابی جهت هایی می شود که با سرعت وابسته به خمیدگی حرکت می کنند. وقتی که سرعت خمیدگی است، منجر به یکی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی تبهگون کلاسیک در فضای اقلیدسی می شود. سوالی که به صورت طبیعی مطرح می شود، چگونگی منظم بودن جواب ها است. جواب های تئوریک تنها در مفهوم ضعیف تعریف می شوند، اما منجر به این می شوند که جواب های کلاسیک همواره دو بار مشتق پذیر باشند. این نتیجه بهینه است؛ مشتق مرتبه دوم آنها فقط وقتی پیوسته است که در وضعیت های بسیار صلب باشند که تعبیر هندسی ساده ای دارند. برهان آنالیز و هندسه را به هم می بافد. بدون فهم عمیق از هندسه ی اصلی، غیر ممکن است که خواص تحلیلی خوبی را اثبات کرد.

گسترش آتش جنگل، رشد یک کریستال، تورم یک کیسه هوا، و یک قطره روغن شناور در آب را می توان با روش سطح تراز مدل سازی کرد. شکل ۱ را ببینید. یکی از چالش های مدل سازی، وجود ناپیوستگی هاست. برای مثال دو آتش جدا از هم می تواند در طول زمان گسترش یابد و در نهایت به یکی ادغام شود، مانند شکل ۲، یا یک قطره مایع مانند شکل ۳ می تواند تقسیم شود. روش سطح تراز این موارد را مجاز می شمارد.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۷/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۶

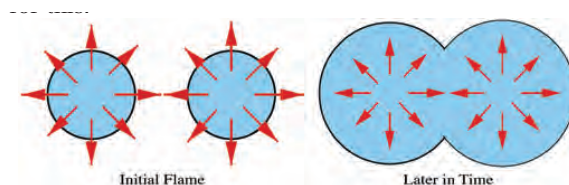
** نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:

T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, Level Set Method For Motion by Mean Curvature, *Notices of the AMS*, 63 no. 10 (2016) 1148–1153.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2019.113074.1296>



شکل ۱: قطره‌های روغن در آب را می‌توان با روش سطح تراز مدل‌سازی کرد.



شکل ۲: بعد از اینکه دو آتش ادغام می‌شود، جبهه گسترش یافته همبند می‌گردد.



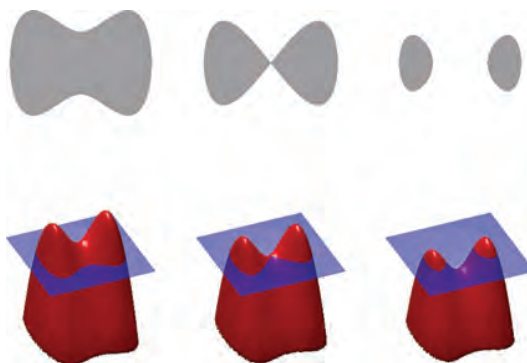
شکل ۳: آب به قطره‌ها تقسیم می‌شود.

روش سطح تراز در ریاضیات محض و کاربردی با موفقیت عظیمی در سی سال اخیر بکار گرفته شده است. فرض کنید یک رابطه اولیه یا جبهه M یک ناحیه در $\mathbb{R}^{n+1}$ را احاطه کند، روش سطح تراز استفاده می‌شود تا به تحلیل حرکت انجام شده تحت یک میدان سرعت بپردازد. ایده این است که جبهه گسترش یافته را به عنوان سطح تراز یک تابع $v(x, t)$

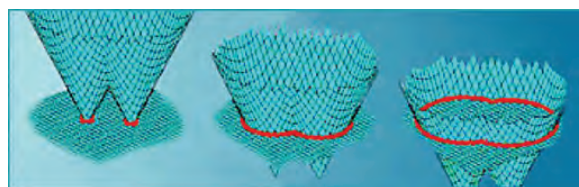
نشان داده شود که x در $\mathbb{R}^{n+1}$ و t زمان است. جبهه اولیه M_0 با رابطه زیر داده می شود

$$M_0 = \{x | \nu(x, 0) = 0\},$$

و جبهه گسترش یافته برای تمام زمان بعد از t تشریح می شود همانند یک مجموعه ای که $\nu(x, t)$ صفر می شود نظیر شکل ۴. توابع بسیاری وجود دارد که M_0 را به عنوان سطح تراز دارند، اما گسترش سطح تراز وابسته به انتخاب تابع $\nu(x, 0)$ نیست.



شکل ۴: مناطق خاکستری درختانی را نشان می دهد که آتش جنگل هنوز به آنها نرسیده است. لبه جبهه آتش سوزان به سمت داخل حرکت می کند وقتی که زمان از چپ به راست در بخش بالای شکل زیاد می شود. افزایش جبهه آتش به عنوان یک سطح تراز از تابع گسترش یافته در خط دوم فرض می شود.



شکل ۵: منحنی های قرمز نشان دهنده یک جبهه گسترش یافته در سه زمان مختلف هستند. هر کدام سطح تراز صفر از تابع گسترش یافته هستند. در اینجا جبهه به سمت خارج حرکت می کند مانند شکل ۲. در شکل های ۳ و ۴، جبهه به سمت داخل حرکت می کند.

در شار خمیدگی میانگین، میدان برداری سرعت، بردار خمیدگی میانگین است و جبهه گسترش یافته سطح تراز یک تابع است که در یک معادله سهموی تبهگون غیر خطی صدق می کند. جواب ها به صورت ضعیف در مفهوم "چسبندگی" تعریف شده اند؛ که در حالت کلی، حتی ممکن است مشتق پذیر نباشند (دو بار مشتق پذیری را مستثنی کنید). به هر حال، برای یک جبهه که بطور یکنواخت گسترش می یابد، جواب های چسبده در حقیقت دو بار مشتق پذیرند و در مفهوم کلاسیک در معادله صدق می کنند. به علاوه وضعیت بسیار صلب می شود وقتی که مشتق دوم پیوسته است.

فرض کنید $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ یک ابرویه نشانده شده باشد و $\vec{n}$ قائم یک بر Σ باشد. خمیدگی میانگین با $H = \text{div}_\Sigma(\vec{n})$ داده می‌شود. اینجا

$$\text{div}_\Sigma(\vec{n}) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \vec{n}, e_i \rangle,$$

است که e_i یک کنج متعامد یک برای فضای مماس Σ است. برای مثال، در یک نقطه که $\vec{n}$ در جهت x_{n+1} است و جهت‌های اصلی همه در جهت محورهای دیگر هستند،

$$\text{div}_\Sigma(\vec{n}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial x_i},$$

همان مجموع (n بار میانگین) خمیدگی‌های اصلی است. اگر $\Sigma = u^{-1}(s)$ سطح تراز تابع u در $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد و s یک مقدار منظم باشد، آنگاه $\vec{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ و

$$H = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \vec{n}, e_i \rangle = \text{div}_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

آخرین تساوی به این علت است که $\langle \nabla_{\vec{n}} \vec{n}, \vec{n} \rangle$ ، همواره صفر است چون $\vec{n}$ بردار واحد است. یک خانواده یک پارامتری از ابرویه‌های هموار $M_t \subset \mathbb{R}^{n+1}$ توسط شار خمیدگی میانگین، جریان می‌یابند اگر سرعت برابر خمیدگی میانگین و به سمت داخل باشد:

$$x_t = -H \vec{n},$$

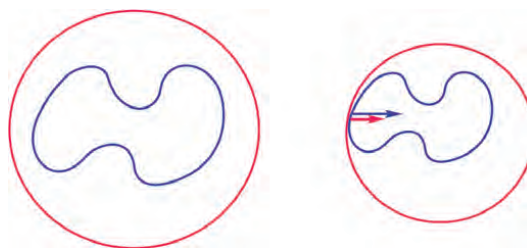
که H و $\vec{n}$ به ترتیب خمیدگی میانگین و قائم یک بر M_t در نقطه x هستند. این شار، همواره در یک ابرویه هموار همبند نشانده شده آغاز می‌شود، حتی اگر در زمان‌های بعدی ناهمبند و ناهموار گردد. اولین مرجع برای شار خمیدگی میانگین تا آنجا که می‌دانیم، در کار جرج بیرکف^۱ در دهه ۱۹۱۰ است، که روی نسخه گسسته آن را استفاده کرد و بطور مستقل در ادبیات علم مواد در دهه ۱۹۲۰ استفاده شده است.

دو ویژگی کلیدی

- H گرادیان ناحیه است، لذا شار خمیدگی میانگین، شار گرادیان منفی برای حجم است ($\text{Vol } M_t$ بطور موثر کاهش می‌یابد).
- ویژگی بازدارندگی: اگر M_0 و N_0 مجزا باشند، آنگاه M_t و N_t مجزا باقی می‌مانند.

اصل بازدارندگی به سادگی فرمول هندسی اصل ماکزیمم است. کاربردی از آن در شکل ۶ تشریح می‌شود، که نشان می‌دهد اگر یک ابرویه بسته (شکل قرمز) دیگری را احاطه کند (شکل آبی)، آنگاه ابرویه بیرونی هرگز نمی‌تواند با داخلی تماس بگیرد. دلیل این است که اگر این کار انجام شود، آنگاه اولین نقطه تماس حاصل می‌شود و درست قبل از آن، ابرویه داخلی سریع‌تر از بیرونی منقبض شده است و این متناقض با این است که ابرویه بیرونی در تماس گرفتن بوده است.

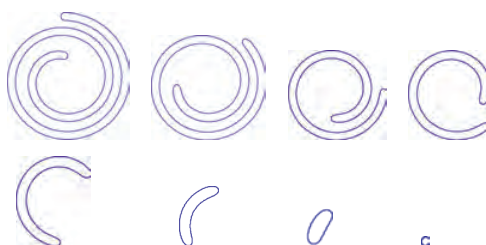
¹George Birkhoff



شکل ۶: رویه‌های مجزا از یکدیگر اجتناب می‌کنند؛ تماس منجر به تناقض می‌شود.

شار منقبض‌کننده منحنی

وقتی $n = 1$ ، و ابر رویه یک منحنی است، شار، یک شار منقبض‌کننده منحنی است. تحت شار منقبض‌کننده منحنی، یک دایره گرد از طریق دایره‌های گرد در یک زمان متناهی به یک نقطه منقبض می‌شود. یک نتیجه برجسته از متیو گریسون^۲ در سال ۱۹۸۷ (با استفاده از کار قبلی ریچارد همیلتون^۳ و میکائیل گیج^۴) نشان می‌دهد هر منحنی بسته ساده در صفحه، تحت شار هموار باقی می‌ماند تا وقتی که در زمان متناهی در یک نقطه محو می‌شود. درست قبل از آن که محو بشود، منحنی تقریباً یک دایره گرد خواهد بود. تغییر شکل منحنی بسته مار مانند در شکل ۷ این واقعیت برجسته را تشریح می‌کند (هشت شکل، عکس‌های زمان تکامل هستند).



شکل ۷: گریسون ثابت کرد که حتی یک ناحیه محکم پیچ خورده، تحت شار منقبض‌کننده منحنی گرد می‌شود.

شار سطح تراز

صورت بندی تحلیلی از شار، معادله سطح تراز است که می‌تواند به شرح زیر استنباط شود. یک ابر رویه نشانده شده بسته $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ را در نظر بگیرید، یک تابع $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$: ν انتخاب کنید که روی Σ صفر است، داخل ناحیه‌ای که توسط Σ احاطه شده مثبت است و خارج آن منفی است. (از سوی دیگر، یک تابع را انتخاب کنید که داخل منفی و خارج مثبت است.)

- اگر ما بطور همزمان برای $s_1 \neq s_2$ ، $\{\nu_o = s_1\}$ و $\{\nu_o = s_2\}$ را به جریان بیاندازیم، آنگاه بازدارندگی ایجاب می‌کند که آنها مجزا باقی بمانند.

²Matthew Grayson ³Richard Hamilton ⁴Michael Gage

- در شار سطح تراز، $\nu: \mathbb{R}^{n+1} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ای را جستجو می‌کنیم که هر سطح تراز $\{ \nu(\cdot, t) = s \}$ $t \rightarrow$ توسط خمیدگی میانگین و $\nu(\cdot, 0) = v_0$ جریان می‌یابد.
- اگر $\nabla \nu \neq 0$ و سطوح تراز ν توسط خمیدگی میانگین جریان یابند، آنگاه

$$\nu_t = |\nabla \nu| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \nu}{|\nabla \nu|} \right).$$

اگر $|\nabla \nu| = 0$ ، آنگاه سهموی تبهگون و تعریف نشده است و در این حالت ممکن است جواب‌های کلاسیک نداشته باشد. در مقاله‌ای که بیش از ۱۲۰۰۰ بار از سال ۱۹۸۸ ارجاع شده است، استنلی اوشر^۵ و جیمز سشیان^۶ این معادله را به لحاظ عددی مطالعه کرده‌اند. پایه و اساس تحلیلی توسط کرایگ ایونز^۷ و جوئل اسپراک^۸ در یک سری از چهار مقاله در اوایل دهه ۱۹۹۰، و بطور مستقل در همان زمان توسط یون گانگ چن^۹، یوشیکازو گیگا^{۱۰}، و شونیچی گوتو^{۱۱}، انجام شد. هر دوی این دو گروه جواب‌های چسبنده (پیوسته) ساختند و یکتایی را نشان دادند. مفهوم جواب‌های چسبنده توسط پیر-لویس لاینز^{۱۲} و میکائیل جی. کراندال^{۱۳} در اوایل دهه ۱۹۸۰ توسعه یافته بود. کار این دو گروه بر روی شار سطح تراز، یکی از کاربردهای برجسته این نظریه بود.

مثال‌هایی از تکنیکی

تحت شار خمیدگی میانگین یک کره گرد، گرد باقی می‌ماند اما منقبض می‌شود و سرانجام در یک نقطه معدوم می‌شود. یک استوانه گرد، گرد باقی می‌ماند و در نهایت در یک خط معدوم می‌شود. حلقه ازدواج یک مثال از چنبره ضخیم دورانی در $\mathbb{R}^3$ است. تحت شار حلقه ازدواج به یک دایره منقبض می‌گردد، سپس ناپدید می‌گردد. شکل ۸ را ببینید.



شکل ۸: حلقه ازدواج تحت شار خمیدگی میانگین به یک دایره منقبض می‌گردد.

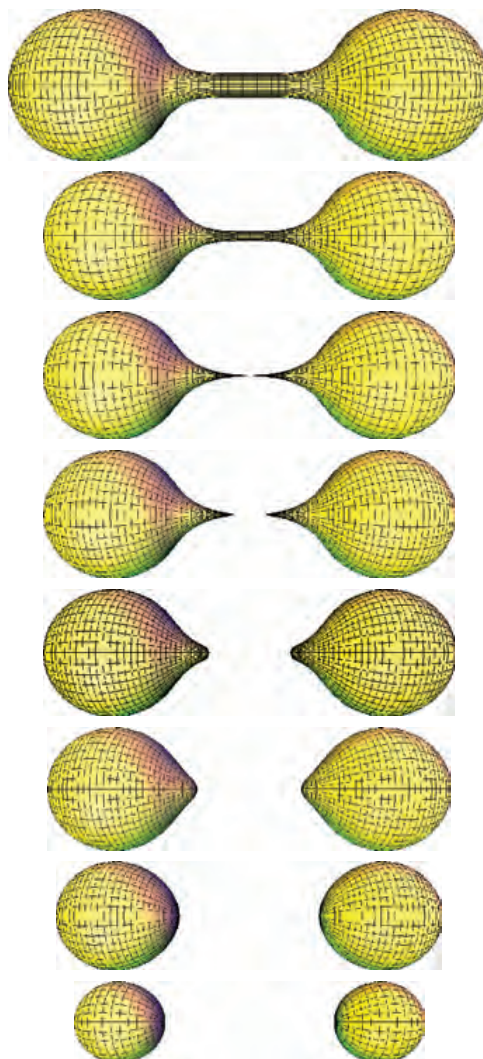
دمبل

شکل ۹، تغییر شکل یک دمبل دورانی متقارن محدب میانگین را در $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهد. اگر گردن به اندازه‌ی کافی باریک باشد، آنگاه در ابتدا گردن قاپیده می‌شود و رویه به دو مولفه، ناهمبند می‌گردد. سپس هر مولفه (زنگ) به یک نقطه منقبض می‌شود. این مثال در زمره رسته بزرگتری از رویه‌های متقارن دورانی حول یک محور قرار دارد. به دلیل تقارن، جواب به یک معادله یک بعدی گرما تبدیل می‌شود. این مورد در اوایل دهه ۱۹۹۰ توسط سیگارد آنگنت^{۱۴}، استیون

⁵Stanley Osher ⁶James Sethian ⁷Craig Evans ⁸Joel Spruck ⁹Yun Gang Chen ¹⁰Yoshikazu Giga ¹¹Shunichi Goto

¹²Pierre-Louis Lions ¹³Michael G. Crandall ¹⁴Sigurd Angenent

آلتشولر^{۱۵}، و گیگا تجزیه و تحلیل شد؛ همچنین با کار هلیل میت سانر^{۱۶} و پاناگیوتیز سوگانیدیز^{۱۷} در محدوده همان زمان مقایسه کنید. یک ابزار کلیدی در مباحث آنگنت-آلتشولر-گیگا، قضیه استورم-لیوویل سهموی از آنگنت است که در یک بعد فضایی برقرار است.



شکل ۹: گردن نازک از یک دمبل قاپیده می شود و سپس هر نیمه به یک نقطه منقبض می شود.

مجموعه تکین

تحت شار خمیدگی میانگین ابررویه های بسته منقبض می شوند، تکنیکی ها را گسترش می دهند و در نهایت معدوم می شوند. مجموعه تکین S ، مجموعه نقاطی در فضا و زمان است که شار هموار نیست. در سه مثال اول کره، استوانه و

¹⁵Steven Altschuler ¹⁶Halil Mete Soner ¹⁷Panagiotis Souganidis

حلقه ازدواج به ترتیب S یک نقطه، یک خط، و یک منحنی بسته است. در هر حالت، تکنیکی‌ها تنها در یک زمان رخ می‌دهند. در مقابل دمل دارای دو زمان تکنیکی است همراه با یک نقطه تکنیک در اولین زمان و دوتا در دومین زمان.

شارهای محدب میانگین

یک ابررویه محدب است اگر هر خمیدگی اصلی مثبت باشد. ابررویه محدب میانگین است اگر $H > 0$ ، یعنی اگر مجموع خمیدگی‌های اصلی در هر نقطه مثبت باشد. تحت شار خمیدگی میانگین، یک ابررویه محدب میانگین به سمت داخل حرکت می‌کند، و چون محدب میانگینی حفظ می‌شود حرکتش به سمت داخل ادامه می‌یابد و در نهایت قلمرو فشرده کاملی را که توسط ابررویه اولیه احاطه شده است را جاروب می‌کند. در بسیاری از کاربردها، سرعت رابط متحرک تغییر علامت نمی‌دهد و جبهه بطور یکنوا حرکت می‌کند. این امر مطابق با خمیدگی میانگین مثبت در حالت ما است. حرکت یکنوا را می‌توان به صورت یک روش عددی کارایی توسط روش پیاده روی سریع از جیمز شسیان مدل‌سازی کرد.

شار سطح تراز برای ابررویه‌های محدب میانگین

وقتی ابررویه‌ها محدب میانگین هستند، معادله را می‌توان به فرم یک معادله بیضوی تبهگون برای تابع u تعریف شده بصورت زیر

$$u(x) = \{t | x \in M_t\},$$

بازنویسی کرد. در این حالت u را زمان رسیدن می‌گوییم، چون زمانی است که ابررویه‌های M_t به x می‌رسند وقتی که جبهه، قلمرو فشرده احاطه شده توسط ابررویه اولیه را جاروب می‌کند. زمان رسیدن دارای یک تعبیر نظریه بازی با کار رابرت کهن^{۱۸} و سیلویا سرفاتی^{۱۹} است. به آسانی نتیجه می‌شود اگر فرض کنیم $t = u(x) - \nu(x, t)$ ، آنگاه ν در شار سطح تراز صدق می‌کند. اکنون معادله سطح تراز $\left(\frac{\nabla \nu}{|\nabla \nu|}\right)$ به

$$-1 = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right),$$

تبدیل می‌شود. این معادله، وقتی که $\nabla u = 0$ ، یک معادله بیضوی تبهگون و تعریف نشده است. توجه کنید که اگر u در این معادله صدق کند، آنگاه u به اضافه یک ثابت نیز صدق می‌کند. این درست مطابق با انتقال زمان است وقتی که شار توسط یک ثابت می‌رسد. یک مثال خاص از یک جواب به این معادله، تابع $u = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ است، که زمان رسیدن برای استوانه‌های گرد منقبض شونده در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. بطور کلی، ایونز-اسپراک (مقایسه کنید چن-گیگا-گوتر) جواب‌های لپشیتز برای این معادله را ساخته‌اند.

مجموعه تکنیک از شار سطح تراز محدب میانگین

مجموعه تکنیک شار، مجموعه نقاط بحرانی u است. یعنی، $(x, u(x))$ تکنیک است اگر و تنها اگر $\nabla_x u = 0$. برای نمونه، در مثال استوانه‌های گرد منقبض شونده در $\mathbb{R}^2$ ، زمان رسیدن توسط $u = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ داده شده است، و شار در خط $x_1 = x_2 = 0$ تکنیک است، یعنی دقیقاً جایی که $\nabla u = 0$. در آینده خواهیم دید که حتی اگر زمان رسیدن تنها یک جواب به معادله سطح تراز در مفهوم ضعیف باشد، نتیجه می‌شود که همواره دارای یک جواب کلاسیک دو بار مشتق‌پذیر است.

¹⁸Robert Kohn ¹⁹Sylvia Serfaty

مشتق پذیری

از [۲]:

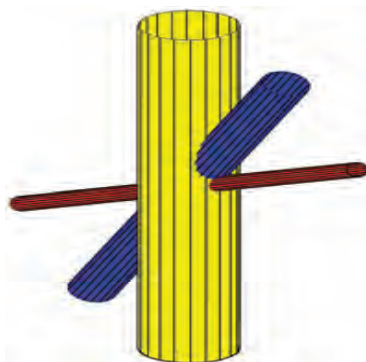
- u همه جا، دو بار مشتق پذیر، با مشتقات دوم کراندار است و خارج از مجموعه نقاط بحرانی هموار است.
- u همه جا در مفهوم کلاسیک در معادله صدق می کند.
- در هر نقطه بحرانی هسیان متقارن است و فقط دارای دو مقدار ویژه، 0 و $-\frac{1}{k}$ ؛ که $-\frac{1}{k}$ دارای چندگانگی $k+1$ است.

این نتیجه معادل با این است که بگوییم در نقطه بحرانی، گیریم $x=0$ و $u(x)=0$ ، تابع u (بعد از احتمالاً یک دوران از $\mathbb{R}^{n+1}$) با تقریب ترم های مرتبه بالاتر برابر با چندجمله ای درجه دوم

$$-\frac{1}{k}(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2),$$

است. این تقریب مرتبه دوم به سادگی زمان رسیدن استوانه های متقبض شونده است. این موضوع نشان می دهد که سطوح تراز u ، درست قبل از مقدار بحرانی و نزدیک مبدأ باید تقریباً استوانه باشند (به همراه یک محور $n-k$ بعدی). این مطلب برای مدت طولانی شناخته شده بود و به هریسکن^{۲۰}، وایت^{۲۱}، سین استراری^{۲۲}، اندروز^{۲۳} و هاسلهوفر-کلینر^{۲۴} نسبت داده شده است. از این مطلب همچنین آشکار می شود که آن استوانه ها باید تقریباً یکسان باشند (بعد از دوباره مقیاس بندی به اندازه واحد). یعنی، محور استوانه ها نباید وابسته به مقدار سطح تراز باشد. این ویژگی آخر، به هر حال، اخیراً در [۱] ثابت شده است و کلید اثبات دو بار مشتق پذیری تابع است.^۱

اثبات آن که محور یکتا و مستقل روی سطح تراز است، بر پایه یک نامساوی جدید کلیدی استوار است که از هندسه جبری حقیقی الهام گرفته شده است، گرچه اثبات کاملاً جدید است. این نوع یکتایی، یک مسأله سخت مشهور در آنالیز هندسی است و قبل از آن حالت کلی شناخته شده نبود.



شکل ۱۰: شکل وضعیتی را تشریح می کند که عدم امکان پذیری را موجب می شود جایی که محورهای استوانه ها برای سه سطح تراز مختلف نزدیک نقطه بحرانی، بطور اساسی متفاوتند. در عوض وقتی که سطوح تراز نزدیک به نقطه بحرانی می شوند، محورها به حد یکتایی میل می کنند.

^۱ یکتایی محور معادل با این واقعیت است که یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر است، دقیقاً اگر برای تمام مقادیر به اندازه کافی کوچک، در آن نقطه شبیه یک تابع خطی یکسان به نظر آید.

²⁰Huisken ²¹White ²²Sinestrari ²³Andrews ²⁴Haslhofer-Kleiner

منظم بودن جواب‌ها

قبلاً مشاهده کردیم که زمان رسیدن همواره دو بار مشتق‌پذیر است، و شخص ممکن است تعجب کند که آیا نظم بیشتری وجود دارد. گرهارد هویسکن^{۲۵} در سال ۱۹۹۰ نشان داد که زمان رسیدن برای M محدب، C^2 است. به هر حال در سال ۱۹۹۲، تام ایلمان^{۲۶} مثالی از یک M محدب میانگین، متقارن و دورانی در $\mathbb{R}^3$ ارائه داد که C^2 نبود. این نتیجه از ایلمان نشان می‌دهد که قضیه بالا در مورد مشتق‌پذیری نمی‌تواند به C^2 بهبود یابد. در آینده خواهیم دید که در واقع شخص می‌تواند بطور کامل مشخص کند که چه وقت زمان رسیدن C^2 است. در صفحه، کهن و سرفاتی (۲۰۰۶) نشان دادند، C^3 ، u است، و برای $n > 1$ ، ناتاشا سوزان^{۲۷} (۲۰۰۸) یک مثال از M محدب ارائه داد که u ، C^3 نیست. بنابراین نتیجه هویسکن، برای $n > 1$ مطلوب است. نتیجه بعدی نشان می‌دهد که شخص می‌تواند بطور کامل تعیین کند که چه وقت زمان رسیدن C^2 است.

مشتق‌پذیری پیوسته

[۳]: u ، C^2 است اگر و تنها اگر:

- دقیقاً یک زمان تکین وجود داشته باشد (جایی که شار از بین می‌رود).
 - مجموعه تکینگی S ، یک زیرخمینه C^1 نشانده شده، همبند، بسته و k -بعدی از تکینگی‌های استوانه‌ای است. بعلاوه، محور هر استوانه، صفحه مماس به S است.
- وقتی u ، C^2 در $\mathbb{R}^3$ است، مجموعه تکینگی S یکی از دو حالت زیر است:
- (۱) یک نقطه تنها با یک تکینگی کروی؛
 - (۲) یک منحنی بسته ساده C^1 از تکینگی‌های استوانه‌ای.
- مثال‌های کره و حلقه ازدواج نشان می‌دهد هر یک از این پدیده‌ها می‌تواند رخ دهد، در حالی که مثال دمبل هیچ یک از این دو حالت نیست، و نشان می‌دهد که در آن حالت، زمان رسیدن C^2 نیست. ما می‌توانیم این نتیجه را برای $\mathbb{R}^3$ براساس ساختار مجموعه بحرانی و هسیان دوباره بیان کنیم: u ، C^2 است اگر و تنها اگر u دقیقاً یک مقدار بحرانی داشته باشد و مجموعه بحرانی یکی از دو حالت زیر باشد:
- (۱) یک نقطه تنها که Hess_u ، $\mathbb{R}^3$ ضربدر همانی است؛
 - (۲) یک منحنی ساده بسته C^1 که Hess_u دارای مقادیر ویژه ۰ و ۱- به ترتیب با چندگانگی ۱ و ۲ است.
- در حالت (۲)، هسته Hess_u ، مماس بر منحنی است.

تبصره‌های پایانی

قبلاً مشاهده کردیم که برای یکی از معادلات دیفرانسیل کلاسیک، به منظور فهم تحلیل، لازم است که هندسه پایه و اساس شناخته شود. معادل‌های پیچیده بسیاری برای معادلات دیفرانسیل دیگر وجود دارد، که هم بیضوی و هم سهموی هستند.

برای مرجع در مورد شار خمیدگی میانگین مقاله‌های [۴] و [۱]-[۳] را ببینید.

مراجع

- [1] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, Uniqueness of blowups and Łojasiewicz inequalities, *Annals of Math.*, **182** (1) (2015) 221–285. MR 3374960
- [2] —, Differentiability of the arrival time, *Comm. Pure Appl. Math.*, DOI: 10.1002/cpa.21635.

²⁵Gerhard Huisken ²⁶Tom Ilmanen ²⁷Natasa Sesum

- [3] —, Regularity of the level set flow, submitted, <https://arxiv.org/abs/1606.05185>.
 [4] T. H. Colding, W. P. Minicozzi II, and E. K. Pedersen, Mean curvature flow, *Bull. Amer. Math. Soc.*, (N.S.) **52** (2015), no. 2, 297–333. MR 3312634

در مورد نویسندگان

توبیاس هولک کولدینگ^{۲۸}، دکتری خود را از دانشگاه پنسیلوانیا در سال ۱۹۹۲ تحت راهنمایی کریستوفر کروک کامل کرد. ایشان قبل از پیوستن به ام‌آی‌تی، در موسسه کورانت دانشگاه نیویورک استاد بوده است. وی از اعضای خارجی آکادمی علوم و نامه های سلطنتی دانمارک و از همکاران آکادمی هنر و علوم آمریکایی است. وی در سال ۲۰۱۰ جایزه اسوالد وبلن را در هندسه و در سال ۲۰۱۶ جایزه بنیاد تحقیقات کارلسبرگ را دریافت کرد.

ویلیام پی. مینیکوزی II^{۲۹}، دکتری خود را از دانشگاه استنفورد در سال ۱۹۹۴ تحت راهنمایی ریک اسکوتن دریافت کرد. ایشان در سال ۲۰۱۰ جایزه اسوالد وبلن را در هندسه دریافت کرد. وی از همکاران آکادمی هنر و علوم آمریکایی در سال ۲۰۱۵ برگزیده گشته است.

مهران امینیان

رفسنجان، دانشگاه ولی عصر (عج)، دانشکده ریاضی
 mehran.aminian@vru.ac.ir

مهران امینیان متولد اسفند ماه ۱۳۶۱ در شهر رفسنجان است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه شهید باهنر شد و در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف شد و در سال های ۱۳۹۰-۱۳۹۳ مدرک دکتری را در رشته ریاضی گرایش هندسه از دانشگاه تربیت مدرس دریافت کرد.



مهران نامجو

رفسنجان، دانشگاه ولی عصر (عج)، دانشکده ریاضی
 namjoo@vru.ac.ir

مهران نامجو متولد شهریور ماه ۱۳۵۱ در شهر زاهدان است. وی در سال ۱۳۷۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه شهید باهنر شد و در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشگاه سیستان و بلوچستان شد و در سال های ۱۳۸۰-۱۳۸۶ مدرک دکتری را در رشته ریاضی گرایش آنالیز عددی از دانشگاه سیستان و بلوچستان دریافت کرد.



²⁸Colding Holck Tobias ²⁹II Minicozzi P. William