ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۳، شماره ۴ (۱۳۹۷)، صص. ۸-۱
© ۱۳۹۷ دانشگاه اصفهان
http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.iranjournals.ir

احتمال و انتخابات: شاخص‌های قدرت در رأی‌گیری

رضا فرهادیان

چکیده. انتخابات مهم‌ترین رخداد سیاسی‌ـ اجتماعی در جوامع دارای نظام انتخاباتی است. عدم آگاهی از نتیجهٔ انتخابات را می‌توان توسط مدل‌های احتمالی مدل‌بندی کرد و به پیش‌بینی احتمالی دربارهٔ این نتیجه پرداخت. از این‌رو در این نوشتار ابتدا احتمال تساوی در انتخابات را بررسی کرده و سپس به معرفی قدرت رأی‌گیری و شاخص قدرت پن‌روز‌ـ بانزاف و اندازه‌گیری‌های احتمالاتی مرتبط با آن می‌پردازیم. بررسی این اندازه‌گیری‌های احتمالاتی برای مطالعه و شناخت پدیدهٔ انتخابات از نقطه نظر احتمالی و تشخیص بخش‌هایی از جامعه که بیشترین تأثیر را بر نتیجهٔ انتخابات دارند بسیار حائز اهمیت است.

۱. مقدمه

انتخابات یک پدیدهٔ سیاسی‌ـ اجتماعی است که نتیجهٔ آن کاملاً وابسته به جمعیّت می‌باشد. در یک انتخابات سالم که نتیجهٔ آن از قبل به‌طور قطع معلوم نیست و وابسته به آراء مردم است، با توجه به عدم آگاهی از نتیجهٔ انتخابات می‌توان از مدل‌های احتمالی برای مدل‌بندی نتیجه استفاده کرد. این ویژگی از انتخابات به ما امکان می‌دهد تا این رخداد را براساس قوانین احتمال بررسی کنیم. هنگامی که نتیجهٔ یک رخداد از قبل به‌طور قطع معلوم نباشد، به آن یک رخداد تصادفی[۱] می‌گویند. برای بررسی و آنالیز رخدادهای تصادفی از نظریهٔ احتمالات استفاده می‌شود و با به‌کارگیری این نظریه به همراه علم آمار می‌توان برای رخدادهای تصادفی برنامه‌ریزی کرد. بنابراین، بهره‌گیری از مدل‌بندی احتمالی این امکان را به نامزدها می‌دهد تا برای پیروزی در انتخابات برنامه‌ریزی داشته باشند و همچنین به مردم این امکان را می‌دهد که در طول انتخابات از میزان تأثیر مشارکت خود مطلع شوند.

بررسی انتخابات با استفاده از نظریهٔ احتمال به اواخر قرن هجدهم برمی‌گردد، اما درواقع در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم این موضوع به‌طور جدی مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفت. ازجمله مسائل معروف در این دوره می‌توان به مسئلهٔ رأی‌گیری برتراند[۲] اشاره کرد که در سال ۱۸۸۷ توسط ریاضی‌دانان معروف فرانسوی جوزف برتراند[۳] (۱۸۲۲-۱۹۰۰) مطرح شد [۵]. برتراند یک اثبات براساس استقراء برای این مسئله ارائه داد و در ادامه این سؤال را مطرح کرد که آیا می‌توان یک اثبات مستقیم برای این مسئله ارائه نمود؟ درست در همان سال و در همان مجله‌ای که برتراند مسئلهٔ خود را منتشر کرده بود، یک ریاضی‌دان فرانسوی دیگر به نام امیل باربِیر[۴] (۱۸۳۹-۱۸۸۹)، تعمیمی از مسئلهٔ برتراند را بدون هیچ استدلالی منتشر ساخت [۳]. نهایتاً در ادامهٔ کار برتراند و باربِیر در همان سال و در همان مجله ریاضی‌دانی به نام دی سیقو آندره[۵]

عبارات و کلمات کلیدی. انتخابات، احتمال تساوی در انتخابات، احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی، متوسط قدرت رأی‌دهنده.
دبیر تخصصی رابط: حمید پزشک
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۴/۳۰
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106194.1241

[1]Random event [2]Bertrand's ballot theorem [3]Joseph Louis François Bertrand [4]Joseph-Émile Barbier [5]Désiré André

اثباتی مستقیم از مسئلهٔ برتراند ارائه کرد [۱]. مسئلهٔ رأی‌گیری برتراند که به قضیهٔ رأی‌گیری برتراند[۶] نیز شهرت دارد بیان می‌کند اگر بدانیم که نامزد انتخاباتی A با تعداد a رأی پیروز انتخابات می‌شود و نامزد انتخاباتی B به‌عنوان رقیب او با تعداد b رأی شکست خواهد خورد، آنگاه احتمال آنکه در دنبالهٔ شمارش آراء همواره A بر B پیشی بگیرد برابر است با $\frac{a-b}{a+b}$. امروزه قضیهٔ رأی‌گیری برتراند از موضوعات کلاسیک در زمینهٔ بررسی انتخابات به‌وسیلهٔ نظریهٔ احتمالات به‌شمار می‌رود، اما همچنان نیز اثبات‌های جدیدی برای آن عرضه می‌شود. برای ملاحظهٔ چند اثبات زیبا از قضیهٔ رأی‌گیری برتراند، می‌توانید مثلاً به منابع [۶] و [۸] مراجعه کنید.

در قرن بیستم بررسی انتخابات با استفاده از ریاضیات و به‌خصوص نظریهٔ احتمالات وارد مرحلهٔ جدیدی شد، با این رویکرد که این‌بار محوریت اصلی در بررسی انتخابات، پیش‌بینی نتیجهٔ انتخابات تا قبل از انجام آن بود. احتمال تساوی در انتخابات[۷]، احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی[۸] و متوسط قدرت رأی‌دهنده[۹] ازجمله رایج‌ترین اندازه‌گیری‌ها و بررسی‌ها در این زمینه و در چارچوب نظریهٔ احتمالات هستند که مورد توجه بسیاری از سیستم‌های انتخاباتی در کشورهای پیشرفته قرار گرفته‌اند. ازجمله کشورهای پیشرو در این خصوص می‌توان به کشورهای غربی و به‌خصوص ایالات متحده آمریکا اشاره کرد. در واقع مطالعه و بررسی احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی و متوسط قدرت رأی‌دهندگان در آمریکا پیش از کشورهای اروپایی صورت گرفته و همچنان نیز از موضوعات بسیار مهم در رابطه با انتخابات ریاست جمهوری این کشور به‌شمار می‌رود، اما بعضی از کشورهای اروپایی نیز در اواخر قرن بیستم، بررسی روی این موضوعات مهم را آغاز کردند [۹]. در ادامه به بررسی احتمال تساوی در انتخابات و همچنین به معرفی احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی و متوسط قدرت رأی‌دهندگان، خواهیم پرداخت. توجه داشته باشید که در کل مقاله فرض بر آن است که رقابت انتخاباتی بین دو حزب یا نامزد A و B در جریان است. این فرض به ما کمک می‌کند تا مدل احتمال را براساس مدل احتمال دوجمله‌ای[۱۰] مدل‌بندی کنیم.

۲. احتمال تساوی در انتخابات

در برخی از نظام‌های انتخاباتی این قانون مرسوم است که نامزدهای انتخاباتی برای پیروزی در انتخابات، علاوه‌بر کسب آراء بیشتر نسبت به سایر رقبا، باید حدنصاب آراء را نیز کسب کنند. در چنین انتخاباتی این امکان وجود دارد که‌هیچ یک از نامزدهای انتخاباتی حدنصاب آراء برای برگزیده شدن را کسب نکنند. در این صورت انتخابات به دور دوم موکول می‌شود و این بدان‌معناست که باید فرایند رأی‌گیری مجدداً تکرار شود. بدیهی است که تساوی بین دو نامزد انتخاباتی منجر به تکرار فرایند رأی‌گیری می‌شود. ازآنجایی‌که به‌وقوع پیوستن حالت تساوی در واقعیت غیرممکن به‌نظر می‌رسد، اما احتمال حالت تساوی بسیار حائز اهمیت است، چرا که بزرگ بودن احتمال تساوی در انتخابات متناسب است با بزرگی احتمال نزدیک به هم بودن تعداد آراء کسب شده توسط نامزدهای انتخاباتی و می‌دانیم که هر چقدر آراء کسب شده توسط نامزدهای انتخاباتی به‌هم نزدیکتر باشد، این امکان وجود خواهد داشت که هیچ‌کدام از نامزدها حدنصاب آراء موردنیاز را کسب نکنند.

۱.۲. محاسبهٔ احتمال تساوی در انتخابات. فرض کنید در یک حوزهٔ انتخاباتی (که می‌تواند یک روستا، بخش، شهرستان، استان و... باشد) تعداد افراد دارای حق رأی برابر با n باشد. همچنین فرض کنید که همهٔ افراد دارای حق رأی، شانس برابری برای شرکت در انتخابات داشته باشند. اگر احتمال پیروزی حزب یا نامزد انتخاباتی A برابر با p و احتمال پیروزی حزب یا نامزد انتخاباتی B برابر با $q = ۱ - p$ باشد، آنگاه تعداد آراء کسب شده توسط هریک از حزب‌ها یا نامزدهای انتخاباتی، یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای[۱۱] است. حال به پیروی از [۴] فرض کنید که متغیر تصادفی X نشان‌دهندهٔ تعداد آراء کسب شده توسط نامزد انتخاباتی A باشد. از آنجایی‌که X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای است، بنابراین احتمال تساوی در انتخابات برابر است با:

[6] Bertrand's ballot theorem [7] Probability of a tied election [8] Probability that a single vote is decisive [9] Average voting power [10] Binomial probability model [11] Binomial random variable

(۱) مادامی‌که n زوج باشد:

$$\Pr(\text{تساوی در انتخابات}) = \Pr(X = \frac{n}{۲}) = \binom{n}{\frac{n}{۲}} p^{\frac{n}{۲}} q^{\frac{n}{۲}}, \tag{۱}$$

که در آن

$$\binom{n}{\frac{n}{۲}} = \frac{n!}{(\frac{n}{۲})!(\frac{n}{۲}!)}. \tag{۲}$$

اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، می‌توان از تقریب استرلینگ[۱۲] برای $n!$ استفاده کرد. یعنی

$$n! \approx (\frac{n}{e})^n \sqrt{۲\pi n}. \tag{۳}$$

با به‌کارگیری تقریب (۳) در رابطهٔ (۲)، خواهیم داشت

$$\binom{n}{\frac{n}{۲}} \approx \frac{\sqrt{۲\pi n}(\frac{n}{e})^n}{\pi n(\frac{n}{۲e})^n} = ۲^n \sqrt{\frac{۲}{\pi n}}. \tag{۴}$$

با جایگذاری رابطهٔ (۴) در رابطهٔ (۱)، رابطهٔ تقریبی زیر برای احتمال تساوی در انتخابات به‌دست می‌آید

$$\Pr(\text{تساوی در انتخابات}) \approx ۲^n p^{\frac{n}{۲}} q^{\frac{n}{۲}} \sqrt{\frac{۲}{\pi n}} = (۴pq)^{\frac{n}{۲}} \sqrt{\frac{۲}{\pi n}}. \tag{۵}$$

(۲) مادامیکه n فرد باشد: به‌طور مشابه اگر n فرد باشد، احتمال تساوی در انتخابات برابر خواهد بود با

$$\Pr(\text{تساوی در انتخابات}) = \binom{n-۱}{\frac{n-۱}{۲}} p^{\frac{n-۱}{۲}} q^{\frac{n-۱}{۲}} \approx ۲^n (pq)^{\frac{n-۱}{۲}} \sqrt{\frac{۱}{۲\pi(n-۱)}}. \tag{۶}$$

۲.۲. تقریبی از احتمال تساوی در انتخابات به‌وسیلهٔ توزیع نرمال. از آنجایی‌که اگر n بزرگ باشد، می‌توان از توزیع نرمال برای تقریب زدن توزیع دوجمله‌ای استفاده کرد، بنابراین یک تقریب مناسب برای احتمال وقوع تساوی در انتخابات، با همان فرضیات زیربخش قبل، برابر است با

(۱) مادامیکه n زوج باشد:

$$\Pr(\text{تساوی در انتخابات}) = \Pr(\frac{n}{۲} - \frac{۱}{۲} < X < \frac{n}{۲} + \frac{۱}{۲}) \approx \Phi(\frac{\frac{n}{۲} + \frac{۱}{۲} - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{\frac{n}{۲} - \frac{۱}{۲} - np}{\sqrt{npq}}). \tag{۷}$$

(۲) مادامیکه n فرد باشد:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{تساوی در انتخابات}) &= \Pr(\frac{n-۱}{۲} - \frac{۱}{۲} < X < \frac{n-۱}{۲} + \frac{۱}{۲}) \\ &\approx \Phi(\frac{\frac{n-۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - (n-۱)p}{\sqrt{(n-۱)pq}}) - \Phi(\frac{\frac{n-۱}{۲} - \frac{۱}{۲} - (n-۱)p}{\sqrt{(n-۱)pq}}).\end{aligned} \tag{۸}$$

در روابط (۷) و (۸)، تابع Φ نشان‌دهندهٔ تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد می‌باشد. تابع Φ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}x^۲} dx.$$

البته ازآنجایی‌که محاسبهٔ انتگرال بالا به‌سادگی ممکن نیست، بنابراین باید از جدول توزیع نرمال استاندارد استفاده کرد. این جدول معمولاً در پیوست همهٔ کتاب‌های آماری یافت می‌شود و همچنین نرم‌افزارهای بسیاری نیز برای محاسبهٔ

[12] Stirling approximation

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106194.1241

احتمال‌های توزیع نرمال استاندارد وجود دارند، که از آن جمله می‌توان به *StatSurf* ، *SPSS*، *Minitab*، R و بسیاری دیگر حتی *Office Excell* اشاره کرد. به‌طور کلی تقریب نرمال زمانی‌که $npq \geq ۱۰$ باشد، یک تقریب مناسب به‌شمار می‌رود.

۳.۲. برآورد p و q. واضح است که برای محاسبهٔ احتمالات گفته شده، باید مقدار n (تعداد افراد واجد شرایط شرکت در انتخابات)، p (احتمال پیروزی نامزد انتخاباتی A) و q (احتمال پیروزی نامزد انتخاباتی B) را در اختیار داشته باشیم. البته می‌دانیم که $q = ۱ - p$. معمولاً مقدار n در اطلاعیه‌هایی که توسط فرمانداری‌های هر حوزهٔ انتخاباتی اعلام می‌شود، مشخص خواهد شد. اما مقدار p و q باید با استفاده از نمونه‌گیری و نظرسنجی برآورد شود. در نظریهٔ احتمال یکی از ساده‌ترین فرم‌های محاسبهٔ احتمال به‌صورت فراوانی نسبی تعریف می‌شود. یعنی احتمال یک پیشامد تصادفی مانند E برابر است با حد فراوانی نسبی آن، زمانی‌که تعداد آزمایشات به‌سمت بی‌نهایت میل کند. به بیان ریاضی اگر یک آزمایش تصادفی k بار انجام شود و در طول این k آزمایش، پیشامد E به تعداد E_k بار رخ داده باشد، آنگاه احتمال رخ دادن E برابر است با

$$\Pr(E) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{E_k}{k}.$$

پس به بیان ساده برآورد احتمال یک پیشامد برابر است با فراوانی نسبی آن در یک نمونهٔ تصادفی و هر چقدر که اندازهٔ نمونه بزرگتر باشد، دقت برآورد نیز بیشتر می‌شود. از این‌رو اگر بخواهیم p را برآورد کنیم، باید ابتدا یک نمونهٔ تصادفی kتایی از افراد دارای حق رأی را انتخاب کنیم. سپس اگر در این نمونه E_k نفر بخواهند به نامزد انتخاباتی A رأی دهند، آنگاه برآورد احتمال پیروزی نامزد انتخاباتی A که آن را با $\hat{p}$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$\hat{p} = \frac{E_k}{k},$$

و برای برآورد احتمال پیروزی نامزد انتخاباتی B، خواهیم داشت $\hat{q} = ۱ - \hat{p}$.

مثال ۱.۲. *در یک حوزهٔ انتخاباتی دو نامزد A و B، برای پیروزی در انتخابات مجلس شورای اسلامی در رقابت هستند. در یک نظرسنجی که ۵۰۰ نفر از افراد دارای حق رأی در آن شرکت کرده‌اند، ۳۵۰ نفر قصد دارند به نامزد انتخاباتی A رأی دهند و ۱۵۰ نفر نیز می‌خواهند به نامزد انتخاباتی B رأی بدهند. اگر p نشان‌دهندهٔ احتمال پیروزی نامزد انتخاباتی A و q نشان‌دهندهٔ احتمال پیروزی نامزد انتخاباتی B باشد، آنگاه برآورد این احتمالات با توجه به نظرسنجی فوق برابر است با*

$$\hat{p} = \frac{۳۵۰}{۵۰۰} = ۰/۷, \qquad \hat{q} = ۱ - \hat{p} = ۱ - ۰/۷ = ۰/۳.$$

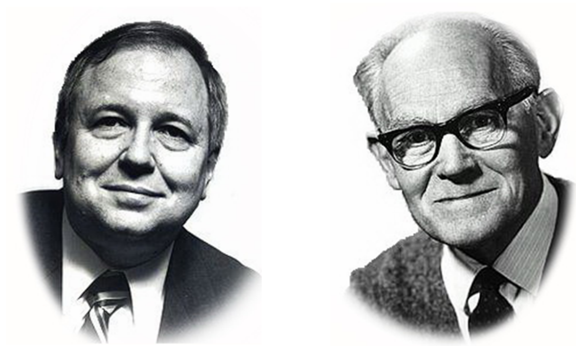
حال اگر تعداد کل افراد دارای حق رأی در این حوزهٔ انتخاباتی ۳۰۰۰ نفر باشند، آنگاه با بهره‌گیری از این برآوردها و با استفاده از رابطهٔ (۵)، برآورد احتمال تساوی در انتخابات برابر با $(۴ \times ۰/۷ \times ۰/۳)^{\frac{۳۰۰۰}{۲}} \sqrt{\frac{۲}{۳۰۰۰\pi}} \approx ۱/۲ \times ۱۰^{-۱۱۵}$ به‌دست می‌آید که مقداری بسیار کوچک و نزدیک به صفر است. از این‌رو می‌توان این‌گونه استدلال کرد که در این حوزهٔ انتخاباتی، تساوی در انتخابات تقریباً غیرممکن است.

همان‌طور که گفته شد، احتمال تساوی در انتخابات از آن جهت حائز اهمیت است، زیراکه بزرگ بودن این احتمال متناسب است با بزرگی احتمال نزدیک به هم بودن تعداد آراء کسب شده توسط دو نامزد انتخاباتی و این امر ممکن است موجب آن شود تا هیچ‌یک از نامزدهای انتخاباتی حدنصاب آراء موردنیاز برای پیروزی را کسب نکنند. با این‌وجود، حتی اگر دو نامزد انتخاباتی A و B تا پیش از انتخابات شانس برابری برای پیروزی در انتخابات داشته باشند (یعنی $p = q = \frac{۱}{۲}$)، آنگاه روابط (۵) و (۶) به‌روشنی نشان می‌دهند که با افزایش تعداد رأی‌دهندگان در یک حوزهٔ انتخاباتی، احتمال تساوی در انتخابات کاهش می‌یابد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106194.1241

۳. قدرت رأی‌گیری و شاخص قدرت پِن‌روز_ بانزاف

یکی از انگیزه‌های انتخابات این است که حتی یک رأی هم می‌تواند در نتیجهٔ انتخابات تغییر ایجاد کند. از این‌رو ممکن است این سؤال برای فرد رأی‌دهنده مطرح شود که رأی او به چه اندازه می‌تواند در نتیجهٔ انتخابات تأثیرگذار باشد و تغییر ایجاد کند؟ ازطرفی ممکن است برای نامزدهای انتخاباتی و ستادهای تبلیغاتی آنان نیز یک سؤال مشابه ایجاد شود که آراء کدام حوزهٔ انتخاباتی و یا کدام گروه جمعیّتی بیشترین تأثیر را در نتیجهٔ انتخابات خواهد داشت؟ برای پاسخ دادن به این مسائل از نظریهٔ ریاضی ***قدرت رأی‌گیری***[۱۳] استفاده می‌شود. قدرت رأی‌گیری یعنی امکان تأثیرگذار بودن یک رأی واحد در نتیجهٔ انتخابات [۷]. در قدرت رأی‌گیری، توانایی هر رأی‌دهنده برای تعیین نتیجهٔ انتخابات که شاخص قدرت[۱۴] نام دارد، بسیار حائز اهمیت است. یکی از شاخص‌های قدرت بسیار مهم که به‌منظور تجزیه‌وتحلیل سیستم‌های رأی‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد، شاخص قدرت پن‌روز_ بانزاف[۱۵] یا شاخص قدرت بانزاف[۱۶] است که اولین‌بار در سال ۱۹۴۶ توسط ریاضی‌دان انگلیسی لیونل شارپس پِن‌روز[۱۷] (۱۸۹۸–۱۹۷۲) معرفی شد [۷] و سپس در سال ۱۹۶۵ مجدداً توسط حقوق‌دان آمریکایی جان فرانسیس بانزاف[۱۸] مورد مطالعه قرار گرفت [۲]. شاخص قدرت پِن‌روز_ بانزاف مبتنی بر تحلیل احتمالی رأی‌دهندگان فردی در یک سیستم رأی‌گیری است. از این‌رو برای بررسی و اندازه‌گیری توزیع قدرت رأی‌دهندگان از نظریهٔ احتمالات استفاده می‌شود. احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی و متوسط قدرت رأی‌دهنده ازجمله مهم‌ترین اندازه‌گیری‌ها و بررسی‌ها در این خصوص هستند که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.



شکل ۱. لیونل شارپس پِن‌روز (سمت راست) و جان فرانسیس بانزاف (سمت چپ).

۱.۳. احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی (قدرت یک رأی واحد). فرض کنید در یک حوزهٔ انتخاباتی همهٔ افراد رأی‌دهنده آراء خود را به‌طور مساوی بین دو نامزد انتخاباتی تقسیم کرده باشند و تنها یک رأی‌دهنده باقی مانده باشد که رأی او سرنوشت انتخابات در آن حوزهٔ انتخاباتی را رقم می‌زند. به این رأی یک ***رأی سرنوشت‌ساز*** می‌گویند. با به‌کارگیری نظریهٔ احتمالات ما قادر به محاسبهٔ مقدار عددی احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی هستیم که معمولاً از آن به‌عنوان ***قدرت یک رأی واحد*** یاد می‌شود و آن را با نماد ψ نشان می‌دهند.

مانند قسمت قبل، یک حوزهٔ انتخاباتی (که می‌تواند یک روستا، بخش، شهرستان، استان و ... باشد) با تعداد افراد دارای حق رأی n را در نظر بگیرید. فرض کنید که رقابت بین دو نامزد انتخاباتی A و B در جریان است. برای سادگی در انجام محاسبات فرض کنید که n عددی فرد و به‌صورت $n = 2j + 1$ است، اما اگر n زوج باشد باز هم نتیجه یکسان خواهد بود. با توجه به آنچه‌که درمورد سرنوشت‌ساز بودن یک رأی گفته شد، در چنین حوزهٔ انتخاباتی یک رأی‌دهنده دارای رأی سرنوشت‌ساز است، هرگاه تمامی $n - 1 = 2j$ نفر دیگر، رأی خود را به‌طور مساوی بین دو نامزد انتخاباتی A و B

[13]Voting power [14]Power index [15] Penrose–Banzhaf index [16]Banzhaf power index [17]Lionel Sharples Penrose [18]John Francis Banzhaf III

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106194.1241

تقسیم کرده باشند. این بدان معناست که j نفر با احتمال $p=\frac{1}{2}$ به نامزد انتخاباتی A و j نفر دیگر نیز با احتمال $q=\frac{1}{2}$ به نامزد انتخاباتی B رأی می‌دهند. پس احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی باقی مانده از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند و برابر است با

$$\psi=\Pr(\text{سرنوشت‌ساز بودن یک رأی})=\binom{2j}{j}(\frac{1}{2})^j(\frac{1}{2})^j=\frac{(2j)!}{j!j!}(\frac{1}{2})^{2j}. \tag{9}$$

اگر j (یا به‌طور معادل n) به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، با به‌کارگیری تقریب استرلینگ ($j!\approx(\frac{j}{e})^j\sqrt{2\pi j}$) در رابطهٔ (۹)، خواهیم داشت

$$\psi=\frac{(2j)!}{(j!)^2}(\frac{1}{2})^{2j}\approx 2^{-2j}\frac{(\frac{2j}{e})^{2j}\sqrt{4\pi j}}{[(\frac{j}{e})^j\sqrt{2\pi j}]^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi j}}. \tag{10}$$

همچنین به‌عنوان یک رابطهٔ هم‌ارزی، می‌توان ثابت کرد که

$$\frac{1}{\sqrt{\pi j}}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{11}$$

زیرا با توجه به فرضیات می‌دانیم که $n=2j+1$ و ازاین‌رو $2j=n-1$. درنتیجه داریم

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi j}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{2j\pi}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi(n-1)}}=1. \tag{12}$$

با توجه قضایای حدی در ریاضیات، می‌دانیم که حد (۱۲) معادل است با هم‌ارزی (۱۱). بنابراین با استفاده از هم‌ارزی (۱۱) در رابطهٔ (۱۰)، خواهیم داشت

$$\psi\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{13}$$

ازآنجایی‌که $\sqrt{\frac{2}{\pi}}=0/7978846...$ یک عدد ثابت است، درنتیجه احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی در یک حوزهٔ انتخاباتی با n نفر رأی‌دهنده، متناسب است با $\frac{1}{\sqrt{n}}$. معمولاً به این نتیجه ***قانون ریشهٔ دوم پِن‌روز***[19] می‌گویند. قانون ریشهٔ دوم پِن‌روز از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا تحت اطلاعات محدودی رفتارهای احتمالی مرتبط با رأی‌دهندگان را توجیه می‌کند.

۲.۳. متوسط قدرت رأی‌دهنده. اگر یک رأی‌دهنده بتواند در نتیجهٔ انتخابات تفاوت ایجاد کند، آنگاه رأی او دارای یک وزن تعیین‌کننده نسبت به سایر رأی‌ها می‌باشد. پس یک رأی سرنوشت‌ساز روی همهٔ آراء حوزهٔ انتخاباتی تأثیر می‌گذارد. ازآنجایی‌که یک حوزهٔ انتخاباتی مجموعه‌ای از رأی‌دهندگان انفرادی است، درنتیجه می‌توان مقدار متوسط قدرت آراء همهٔ رأی‌دهندگان که به آن ***متوسط قدرت رأی‌دهنده*** گفته می‌شود را اندازه‌گیری کرد و از آن به‌عنوان معیاری مناسب برای مطالعه و بررسی‌تأثیرگزاری حوزه‌های انتخاباتی مجزا در نتیجهٔ انتخابات استفاده کرد. در یک حوزهٔ انتخاباتی با n نفر رأی‌دهنده (که n می‌تواند عددی فرد یا زوج باشد)، با توجه به امید ریاضی توزیع دوجمله‌ای، متوسط قدرت رأی‌دهنده برابر است با

$$\text{متوسط قدرت رأی‌دهنده}=n\Pr(\text{سرنوشت‌ساز بودن یک رأی}). \tag{14}$$

ازطرفی با استفاده از هم‌ارزی (۱۳) در برابری (۱۴)، خواهیم داشت

$$\text{متوسط قدرت رأی‌دهنده}\sim n(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n}. \tag{15}$$

---
[19]Penrose square root law

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106194.1241

ازآنجایی‌که ...$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0/7978846$ یک عدد ثابت است، درنتیجه متوسط قدرت رأی‌دهنده در یک حوزهٔ انتخاباتی با n نفر رأی‌دهنده متناسب است با $\sqrt{n}$.

زیبایی شاخص قدرت پِن‌روز– بانزاف ازآنجایی پدیدار می‌شود که براساس آن هم حوزه‌های انتخاباتی کم‌جمعیّت و هم حوزه‌های انتخاباتی پرجمعیّت نقش قابل توجهی در نتیجهٔ انتخابات دارند. با توجه به احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی، می‌دانیم که قدرت یک رأی واحد برای ایجاد تغییر در نتیجهٔ انتخابات در حوزه‌های انتخاباتی کم‌جمعیّت بیشتر از حوزه‌های انتخاباتی پرجمعیّت است. این موضوع در رابطهٔ (۱۳) کاملاً مشهود است. ازطرفی با توجه به رابطهٔ (۱۵)، می‌دانیم که متوسط قدرت رأی‌دهندگان در حوزه‌های انتخاباتی پرجمعیّت بیشتر از متوسط قدرت رأی‌دهندگان در حوزه‌های انتخاباتی کم‌جمعیّت است. البته ازآنجایی‌که در انتخابات یک رأی منفرد نه به‌عنوان یک رأی مجزا بلکه به‌عنوان جزئی از مجموع آراء کلی به‌شمار می‌رود، بنابراین یک گروه از رأی‌دهندگان انفرادی می‌توانند با ایجاد ائتلاف متوسط قدرت رأی خود را افزایش دهند. شاخص قدرت پن‌روز– بانزاف را می‌توان برحسب گروه‌های جمعیّتی مختلف بررسی کرد. مثلاً می‌توان به احتمال سرنوشت‌ساز بودن هر رأی در بین مردان و زنان، متوسط قدرت رأی اولی‌ها، متوسط قدرت رأی‌دهنده در بین مشاغل مختلف و مانند این‌ها اشاره کرد. بااین‌حال محاسبهٔ احتمال سرنوشت‌ساز بودن یک رأی و متوسط قدرت رأی‌دهندگان در هر گروه جمعیّتی، نیازمند اطلاعات دقیق درمورد تعداد واجدین شرایط رأی دادن در آن گروه است.

۴. پیوست: آشنایی با مفاهیم انتخاباتی و تقسیمات کشوری

۱.۴. مفاهیم انتخاباتی. با ارجاع به [۱۰]، برخی از مهم‌ترین مفاهیم مربوط به انتخابات عبارتند از:

(۱) **داوطلب انتخاباتی:** فردی که در یکی از انتخابات به‌عنوان انتخاب‌شونده ثبت نام می‌نماید.
(۲) **کاندیدای (نامزد) انتخاباتی:** داوطلب انتخاباتی که تأیید صلاحیت شده است.
(۳) **واجد شرایط رأی در انتخابات:** فردی که از شرایط لازم تعریف‌شده در قوانین انتخابات به‌منظور رأی دادن برخوردار است.
(۴) **شعبهٔ ثبت نام و اخذ رأی:** محلی که صندوق اخذ رأی و نیروهایی اجرایی و نظارتی انتخابات به‌منظور رأی‌گیری در آن مستقر می‌شوند.

۲.۴. تقسیمات کشوری. براساس ماده ۱ از قانون تعاریف و ضوابط تقسیمات کشوری جمهوری اسلامی ایران مصوب ۱۳۶۲/۰۴/۱۵ عناصر تقسیمات کشوری عبارتند از روستا، دهستان، شهر، بخش، شهرستان و استان، که به‌طور خلاصه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

(۱) **آبادی (نقطهٔ روستایی):** محدوده‌ای جغرافیایی واقع در یک دهستان.
(۲) **دهستان:** مجموعهٔ چند آبادی هم‌جوار.
(۳) **شهر (نقطهٔ شهری):** محدوده‌ای جغرافیایی دارای نهاد شهرداری.
(۴) **بخش:** مجموعهٔ چند شهر و دهستان هم‌جوار.
(۵) **شهرستان:** مجموعهٔ چند بخش هم‌جوار.
(۶) **استان:** مجموعهٔ چند شهرستان هم‌جوار.

براساس آخرین تقسیمات کشوری در پایان اسفندماه سال ۱۳۹۴، کشور ایران از ۳۱ استان، ۴۲۹ شهرستان، ۱۰۵۷ بخش، ۱۲۴۵ شهر و ۲۵۸۹ دهستان تشکیل شده است. برای اطلاعات بیشتر درمورد تاریخچهٔ تقسیمات کشوری در ایران به‌همراه جزئیات آماری به منبع [۱۱] رجوع کنید.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2018.106194.1241

تشکر و قدردانی

از دبیر تخصصی رابط و همچنین داور محترم به خاطر راهنمایی‌های مفیدشان تشکر به عمل می‌آید.

مراجع

[1] D. André, Solution directe du probléme résolu par M. Bertrand, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, **105** (1887) 436–437.

[2] J. F. Banzhaf, Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis, *Rutgers Law Review*, **19** (1965) 317–343.

[3] É. Barbier, Généralisation du probléme résolu par M. J. Bertrand, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, **105** (1887), p. 407.

[4] N. Beck, A Note on the Probability of a Tied Election, *Public Choice*, **23** (1975) 75–79.

[5] J. Bertrand, Solution d'un problème, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris,**105** (1887), p. 369.

[6] K. Pąk, Bertrand's Ballot Theorem, *Formalized Mathematics*, **22** (2014) 119–123.

[7] L. S. Penrose, The Elementary Statistics of Majority Voting, *Journal of the Royal Statistical Society*, **109** (1946) 53–57.

[8] M. Renault, Four Proofs of the Ballot Theorem, *Mathematics Magazine*, **80** (2007) 345–352.

[9] M. A. Cichocki and K. Zyczkowski, *Institutional Design and Voting Power in the European Union*, Routledge, London, 2016.

[۱۰] مرکز آمار ایران، تعاریف و مفاهیم استاندارد آماری (برای استفاده در طرح‌ها و گزارش‌های آماری)، ویرایش سوم، تهران: مرکز آمار ایران، دفتر ریاست، روابط عمومی و همکاری‌های بین الملل، ۱۳۹۳.

[۱۱] م. خبازنیا، تاریخچه‌ی تقسیمات کشوری در ایران و کاربرد آن در سرشماری، *دوماهنامه‌ی تحلیلی پژوهشی آمار*، سال چهارم، شماره پنجم، (۱۳۹۵)، ۲۹–۲۷.

رضا فرهادیان
گروه آمار، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران
farhadian.reza@yahoo.com

رضا فرهادیان متولد شهریور ماه ۱۳۷۱ در شهر خرم‌آباد است. وی در سال ۱۳۹۰ وارد مقطع کارشناسی رشتهٔ آمار دانشگاه لرستان شد و در سال ۱۳۹۴ در همان دانشگاه مقطع کارشناسی ارشد خود را در رشتهٔ آمار ریاضی ادامه داد. ایشان در حوزهٔ فرایندهای تصادفی، نظریهٔ ماتریس‌ها و نظریهٔ اعداد فعالیت می‌نماید.